

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

АНАЛИТИЧЕСКАЯ
ГЕОМЕТРІЯ.

СОЧИНЕНІЕ

БРІО и БУКЕ.

ПЕРЕВЕЛЪ СЪ ПОСЛѢДНЯГО ФРАНЦУЗСКАГО ИЗДАНІЯ

В. СИНЦОВЪ.



ИЗДАНІЕ КНИГОПРОДАВЦА-ТИПОГРАФА М. О. ВОЛЬФА.

САНКТПЕТЕРБУРГЪ. *Гостиный Дворъ, №№ 18, 19 и 20.*

МОСКВА. *Кузнецкій мостъ, д. Рудакова.*

1868.

ПЕЧАТАНО ВЪ ТИПОГРАФІИ М. О. ВОЛЬФА (СПБ., ПО ФОНТАНКѢ, № 59.)

АНАЛИТИЧЕСКАЯ ГЕОМЕТРІЯ.

Аналитическая Геометрія разсматриваетъ *фигуры* посредствомъ вычисленія или алгебраическаго анализа.

Декартъ былъ первый, который началъ выражать фигуры посредствомъ алгебраическихъ символовъ,—что, какъ мы увидимъ, даетъ общій способъ для рѣшенія геометрическихъ вопросовъ.

Сперва мы займемся плоскими фигурами, или фигурами двухъ измѣреній; потомъ фигурами въ пространствѣ, или фигурами трехъ измѣреній.

ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОСКОСТИ.

КНИГА ПЕРВАЯ.

Введеніе.

ГЛАВА I.

Координаты.

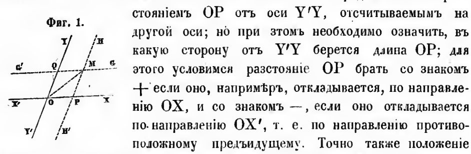
Положеніе точки на плоскости опредѣляется двумя величинами, которыя называются *координатами* точки.

Системъ *координатъ* можетъ быть весьма много; но мы объяснимъ только самыя простыя и наиболѣе употребительныя изъ нихъ.

Прямолинейныя координаты.

1. Начертимъ на плоскости двѣ прямыя линіи или неизмѣняемыя оси $X'X$ и $Y'Y$ (*фиг.* 1); положеніе какой-нибудь точки M на плоскости

будетъ вполнѣ опредѣлено пересѣченіемъ двухъ прямыхъ G'G H'H, параллельныхъ этимъ осямъ. Положеніе линіи H'H опредѣляется ея разстояніемъ OP отъ оси Y'Y, отсчитываемымъ на другой оси; но при этомъ необходимо означить, въ какую сторону отъ Y'Y берется длина OP; для этого условимся разстояніе OP брать со знакомъ + если оно, напримѣръ, откладывается, по направленію OX, и со знакомъ —, если оно откладывается по направленію OX', т. е. по направленію противоположному предъидущему. Точно также положеніе линіи G'G опредѣляется ея разстояніемъ OQ отъ оси X'X, отсчитываемымъ на второй оси, и берется со знакомъ + или —, смотря потому откладывается ли оно по направленію OY или OY'.



Фиг. 1.

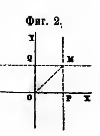
Эти двѣ величины OP и OQ (взятыя съ приличными знаками), которыя такимъ образомъ опредѣляютъ положеніе двухъ параллельныхъ линій, а слѣдовательно, и точки M ихъ пересѣченія, называются *прямолинейными координатами* точки. Обыкновенно ихъ означаютъ буквами x и y. Координата, которая обозначается черезъ x, называется *абсциссою;* координата y — *ординатою.* Двѣ постоянныя прямыя X'X и Y'Y называются *осями координатъ;* первая называется осью x-овъ, вторая осью y-овъ. Точка O, отъ которой отсчитываются координаты по каждой оси въ ту или другую сторону, называется *началомъ координатъ.*

Если x и y будемъ давать всѣ возможныя величины, положительныя или отрицательныя, или другими словами, если мы будемъ x и y измѣнять отъ $-\infty$ до $+\infty$, то получимъ всѣ точки плоскости; но при этомъ каждая пара величинъ x и y опредѣляетъ одну только точку.

Замѣтимъ, что обѣ координаты точки M суть проэкціи прямой OM на оси OX и OY, проэкціи, которыя на каждую ось образуются параллельно другой оси. Проэкція на ось x-овъ, какъ самая координата x, есть длина OP, взятая со знакомъ + или —, смотря потому берется ли она по направленію OX или по противоположному направленію OX'; точно также проэкція на оси y-овъ, какъ самая координата y, есть длина OQ, взятая со знакомъ + или —, смотря потому берется ли по направленію OY или по противоположному направленію OY'.

Прямолинейныя прямоугольныя координаты.

Фиг. 2.

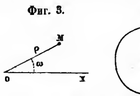


2. Постоянныя оси обыкновенно проводятъ перпендикулярно другъ къ другу; въ этомъ случаѣ обѣ координаты точки M (*фиг.* 2) будутъ разстоянія этой точки отъ двухъ осей; въ этомъ случаѣ онѣ будутъ орѳогональными проэкціями прямой OM на обѣ оси

Полярныя координаты.

3. Пусть O будетъ постоянная точка, называемая *полюсомъ;* OX — постоянная ось (*фиг.* 3). Положеніе точки M можно опредѣлить ея разстояніемъ $OM = \rho$ отъ полюса, которое называется *радіусомъ векторомъ*, и *угломъ* ω, который образуетъ этотъ радіусъ векторъ съ осью. Точка M будетъ также вполнѣ опредѣлена пересѣченіемъ круга радіуса ρ, центръ котораго находится въ полюсѣ, съ прямою OL, идущей отъ полюса и составляющей съ осью OX уголъ ω (*фиг.* 4); но надобно только выбрать направленіе, въ которомъ отсчитывался бы уголъ ω отъ оси OX. Измѣняя ρ отъ 0 до $+\infty$ и ω отъ 0 до 2π, получимъ всѣ точки плоскости. Дѣйствительно, если ω приммемъ за постоянное, а ρ будемъ измѣнять отъ ρ до $+\infty$, то получимъ всѣ точки прямой OL; если затѣмъ будемъ измѣнять ω отъ 0 до 2π, то прямая OL своимъ обращеніемъ, обойдетъ всю плоскость, начиная отъ положенія OX.

Фиг. 3. Фиг. 4.



Биполярныя координаты.

4. Положеніе точки M можно также опредѣлить разстояніями ея u и v отъ двухъ постоянныхъ точекъ F и F′ (*фиг.* 5), то есть пресѣченіемъ двухъ круговъ, описанныхъ изъ точекъ F и F′, какъ центровъ, радіусами u и v. Но система эта не такъ удобна, какъ двѣ предъидущія; такъ какъ не всякая пара величинъ u и v возможна; надобно, чтобы разстояніе полюсовъ было менѣе ихъ суммы и болѣе ихъ разности; а внѣ этихъ условій является неопредѣленность, потому что двѣ окружности пересѣкаются въ двухъ точкахъ.

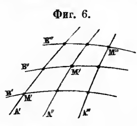
Фиг. 5.

Положеніе точки M можно опредѣлить также помощію угловъ MFF′ и MF′F; означимъ эти углы, отсчитываемые въ опредѣленномъ направленіи, черезъ α и β; каждый изъ нихъ можетъ измѣняться отъ 0 до 2π; и каждой парѣ величинъ α и β соотвѣтствуетъ только одна точка плоскости.

Общее понятіе о системахъ координатъ.

5. Число системъ координатъ безконечно. Положеніе точки на плоскости вообще опредѣляется пересѣченіемъ двухъ линій, проведенныхъ въ этой плоскости. Пусть (*фиг.* 6) A′, A″, A‴. . . . будетъ первый рядъ линій одного и того же рода, соотвѣтствующихъ различнымъ величинамъ u', u'', u'''.... перемѣннаго u; пусть B′, B″, B‴.... будетъ второй рядъ линій одного рода, соотвѣтствующихъ различнымъ величинамъ v', v'', v'''.... перемѣннаго v; какая-нибудь точка плоскости опредѣляется двумя линіями, проходящими черезъ эту точку, и частныя величины, даваемыя перемѣннымъ u и v, чтобы получить эти двѣ линіи, называются *координатами* точки. Совокупность этихъ двухъ рядовъ линій составляетъ систему координатъ.

Фиг. 6.



Въ первой разсмотрѣнной нами системѣ каждый такой рядъ состоитъ изъ прямыхъ параллельныхъ линій; вотъ почему эти координаты и называются прямолинейными координатами.

Въ полярной системѣ первый рядъ состоитъ изъ прямыхъ, которыя идутъ отъ полюса O и опредѣляются перемѣннымъ угломъ ω, образуемымъ ими съ осью OX (*фиг.* 4); второй рядъ составляютъ концентричные круги, описанные около полюса перемѣннымъ радіусомъ ρ.

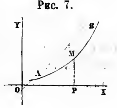
Въ первой биполярной системѣ, каждый изъ рядовъ состоитъ изъ концентричныхъ круговъ. Во второй каждый рядъ состоитъ изъ прямыхъ, идущихъ отъ одной изъ постоянныхъ точекъ F или F′.

Выраженіе плоскихъ линій посредствомъ уравненій.

6. Пусть AB (*фиг.* 7) будетъ какая-нибудь плоская линія; проведемъ въ плоскости двѣ оси OX и OY и означимъ черезъ x и y двѣ координаты OP и MP какой-нибудь точки M этой линіи. Когда точка M движется по линіи, обѣ координаты одновременно измѣняются, такъ-что если за абсциссу возьмемъ произвольную величину OP, то величина ординаты MP, соотвѣтствующей этой абсциссѣ, будетъ совершенно опредѣлена,

и при измѣненіи абсциссы измѣняется также ордината. Такимъ образомъ ордината MP есть функція абсциссы OP; свойство этой функціи зависитъ отъ свойства линіи. Когда линія опредѣляется геометрически, тогда, разумѣется, изъ геометрическаго опредѣленія линіи можно вывести уравненіе между x и y, которое аналитически опредѣлитъ функцію y. Уравненіе между x и y, найденное такимъ образомъ, называется уравненіемъ линіи.

Рис. 7.



7. Положимъ, наоборотъ, что дано уравненіе

$$F(x,y)=0$$

съ двумя перемѣнными x и y; каждая пара дѣйствительныхъ величинъ x и y, которая удовлетворяетъ этому уравненію, опредѣляетъ точку плоскости. Пусть x_0 и y_0 будутъ дѣйствительныя величины x и y, удовлетворяющія уравненію; если будемъ измѣнять x непрерывно, начиная съ x_0, то одна изъ величинъ y будетъ также измѣняться непрерывно, начиная отъ y_0 и вообще она будетъ дѣйствительная, пока x будетъ заключаться между извѣстными предѣлами; такимъ образомъ точка, координаты которой суть x и y, опишетъ въ плоскости непрерывную линію. Итакъ *совокупность дѣйствительныхъ рѣшеній уравненія съ двумя перемѣнными вообще представляется плоскою линіею.*

8. Все, что мы сказали о прямолинейныхъ координатахъ, очевидно, имѣетъ мѣсто во всякой другой системѣ координатъ. Въ полярной системѣ, когда точка M двигается по линіи, радіусъ векторъ ρ измѣняется вмѣстѣ съ угломъ ω; это есть функція отъ ω, а линія выразится уравненіемъ съ двумя перемѣнными ρ и ω.

9. Способъ выражать фигуры уравненіями составляетъ основаніе аналитической геометріи; съ помощію его при изученіи фигуръ можно употреблять алгебраическое вычисленіе. Аналитическая Геометрія разсматриваетъ три главные вопроса: найти уравненіе фигуры, когда она представлена геометрически; построить фигуру, выражаемую даннымъ уравненіемъ, и наконецъ, найти соотношенія, которыя существуютъ между геометрическими свойствами фигуръ и аналитическими свойствами уравненій.

Изъ примѣровъ, которые мы изложимъ въ слѣдующей главѣ, увидимъ, какимъ образомъ линіи выражаются уравненіями.

ГЛАВА II.

Примѣры.

10. Вообще геометрическое опредѣленіе кривой, которая опредѣляется по каждой ея точкѣ, соотвѣтствуетъ извѣстной системѣ координатъ; если возьмемъ извѣстную систему, то уравненіе кривой будетъ непосредственнымъ переводомъ ея геометрическаго опредѣленія.

Кругъ.

11. *Кругъ есть геометрическое мѣсто точекъ, находящихся на одинаковомъ разстояніи отъ опредѣленной точки, называемой центромъ.* Кругъ чертятъ циркулемъ, помѣщая одну его ножку въ центрѣ, а другою описываютъ окружность.

Фиг. 8.

Если центръ O возьмемъ за полюсъ и какую-нибудь прямую OX за полярную ось (*фиг.* 8) и если черезъ r означимъ длину радіуса, то уравненіе окружности въ полярныхъ координатахъ будетъ

$$(1)\ \rho = r,$$

потому что длина радіуса вектора постоянно равна r, какая бы ни была величина угла ω.

Найдемъ теперь ур. круга въ прямолинейныхъ координатахъ. Возьмемъ двѣ прямоугольныя оси координатъ OX и OY, проходящія черезъ центръ. Изъ прямоугольнаго треугольника OMP находимъ соотношеніе

$$(2) \qquad x^2 + y^2 = r^2 ,$$

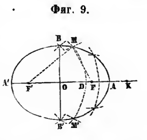
между координатами x и y точки M окружности: это есть ур. окружности относительно этой системы координатъ.

Эллипсъ.

12. *Эллипсъ есть такая кривая, въ которой сумма разстояній каждой ея точки отъ двухъ опредѣленныхъ точекъ есть величина постоянная.* Эти двѣ точки называются фокусами эллипса. Эллипсъ можно легко построить по точкамъ. Пусть F и F′ (*фиг.* 9) будутъ фокусы; отложимъ на линіи F′F линію F′K, равную постоянной суммѣ разстояній каж-

дой точки кривой отъ двухъ фокусовъ. Изъ точки F′, какъ центра, опишемъ различными радiусами круги; пусть D будетъ точка, въ которой одинъ изъ круговъ пересѣкаетъ прямую F′F; потомъ изъ фокуса F, какъ центра, радiусомъ, равнымъ KD, опишемъ другой кругъ; этотъ кругъ пересѣчетъ первый въ двухъ точкахъ M и M′, которыя будутъ точками эллипса, потому что сумма разстоянiя MF′ и MF точки M отъ двухъ фокусовъ равна суммѣ двухъ радiусовъ F′D и KD, т. е. данной линiи F′K. Подобное построенiе

Фиг. 9.

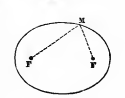


продолжаемъ для каждаго круга, описаннаго изъ фокуса F′, какъ центра; когда получимъ довольно большое число точекъ, то, соединивъ эти точки одною непрерывною линiею, мы получимъ искомый эллипсъ. Если чрезъ $2a$ означимъ постоянную сумму, и чрезъ $2c$ разстоянiе FF′ фокусовъ, то, чтобы получить эллипсъ, необходимо, чтобы $2a$ было болѣе $2c$. Означимъ чрезъ $a+\alpha$ бóльшiй радiусъ; тогда меньшiй радiусъ будетъ $a-\alpha$; два круга пересѣкутся тогда, когда разность радiусовъ, 2α, будетъ менѣе разстоянiя центровъ $2c$. Такимъ образомъ бóльшiй радiусъ долженъ быть менѣе $a+c$, меньшiй болѣе $a-c$.

13. Графическое построенiе, которое мы показали, употребляется при черченiи на бумагѣ; но въ искусственныхъ работахъ, когда надо начертить эллипсъ на доскѣ, употребляютъ скорѣйшiй способъ.

Въ двухъ фокусахъ F и F′ (*фиг.* 10) прикрѣпляется ~~произвольной~~ длины нитка. Потомъ *натягиваютъ нить карандашемъ и, двигая его, описываютъ такимъ образомъ кривую, которая будетъ эллипсъ, потому что въ каждомъ положенiи нитки сумма разстоянiй MF и MF′ равна постоянной длинѣ этой нитки. Изъ такого построенiя видно, что эллипсъ есть также сомкнутая кривая, какъ и кругъ.

Фиг. 10.



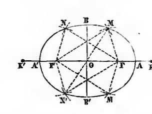
14. Теперь изложимъ нѣкоторыя наиболѣе простыя свойства эллипса.

Осью кривой называется прямая линiя, которая раздѣляетъ кривую на двѣ симметричныя части, т. е. на двѣ такiя части, которыя совершенно совпадутъ, когда, повернувъ одну около оси, наложимъ ее на другую.

Очевидно, что прямая AA′ (*фиг.* 11), проведенная черезъ два фокуса, есть ось эллипса. Въ самомъ дѣлѣ, разсматривая двѣ точки M и M′, опредѣляемыя пересѣченiемъ двухъ круговъ, описанныхъ изъ фокусовъ F и F′, какъ центровъ, получимъ два равные треугольника FMF′ FM′F′, кото

рые совпадутъ, когда верхнюю часть фигуры повернемъ около прямой AA′ и наложимъ на нижнюю часть; слѣдовательно, точка M совпадетъ съ точкою M′; и такъ какъ это будетъ для каждыхъ двухъ такихъ соотвѣтственныхъ точекъ, то половина эллипса AMA′ совершенно совпадетъ съ другою половиною AM′A′. Такимъ образомъ прямая AA′ есть ось эллипса. *Вершинами* называются точки A и A′, въ которыхъ ось пересѣкаетъ кривую. При построеніи эллипса по точкамъ, мы откладывали на оси отъ фокуса F′ линію F′K, равную постоянной суммѣ, и точка A, средина линіи FK будетъ точка эллипса; потому что если разстояніе AF замѣнимъ равнымъ ему разстояніемъ AK, то увидимъ, что сумма разстояній AF′ и AF этой точки отъ обоихъ фокусовъ равна постоянной суммѣ FK; такимъ образомъ точка A есть вершина эллипса. Точно также, если на оси отъ другаго фокуса F отложимъ линію FK′ равную F′K, и если возьмемъ средину линіи F′K′, то получимъ вторую вершину A′ эллипса. Разстояніе AF = A′F′, какъ половины равныхъ разстояній FK и F′K′; слѣдовательно, обѣ вершины A и A′ равно отстоятъ отъ двухъ фокусовъ F и F′.

Фиг. 11.



Замѣтимъ, *что линія AA′ равна постоянной суммѣ разстояній каждой точки эллипса отъ обоихъ фокусовъ;* потому что, замѣнивъ A′F′ равною ей AF или AK, увидимъ, что AA′ равно F′K.

15. Въ эллипсѣ существуетъ другая ось — перпендикуляръ BB′, возстановленный изъ средины прямой FF′. Чтобы доказать это, опишемъ кругъ изъ фокуса F′, какъ центра, радіусомъ равнымъ FM, а изъ фокуса F, радіусомъ равнымъ F′M опишемъ второй кругъ. Эти два круга, пересѣкаясь, дадутъ двѣ новыя точки N и N′ эллипса. Треугольники FMF′, F′NF равны, потому что имѣютъ три равныя стороны. Повернемъ часть BAB′ около BB′ и наложимъ на другую; тогда прямая OF совпадетъ съ OF′; и прямая FM пойдетъ по направленію F′N; потому что уголъ, OFM = OF′N; а такъ какъ FM равно F′N, то точка M совпадаетъ съ точкою N. Такимъ образомъ часть BAB′ совершенно совпадаетъ съ другою частію BA′B′; отсюда видно, что прямая B′B есть также ось эллипса.

Вершины B и B′ опредѣляются пересѣченіемъ двухъ равныхъ круговъ, описанныхъ изъ фокусовъ, какъ центровъ, радіусомъ OA, равнымъ половинѣ AA′; потому что оба разстоянія BF BF′ равны между собою; каждое же изъ нихъ равно половинѣ постоянной суммы, а слѣдовательно,

половинѣ AA'. Линія BB' менѣе AA', потому что прямая BB' менѣе ломаной линіи $BF+FB'$, которая равна AA'.

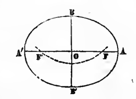
Обѣ оси раздѣляютъ эллипсъ на четыре равныя части.

16. *Центромъ* кривой называется такая точка, отъ которой всѣ точки кривой находятся попарно на одной прямой, проходящей черезъ центръ, на равномъ разстояніи по ту и по другую сторону ея..

Точка O, пересѣченіе двухъ осей или средина разстоянія FF' между фокусами, есть центръ эллипса. Дѣйствительно, пусть M будетъ какая–нибудь точка эллипса; соединимъ M и O прямою и продолжимъ ее на величину ON', равную OM. Такъ какъ въ четыреугольникѣ $FMF'N'$ діагонали FF', MN' пересѣкаются пополамъ, то этотъ четыреугольникъ есть параллелограммъ, и слѣдовательно, въ немъ противоположныя стороны равны. Такъ какъ сумма разстояній $N'F+N'F'$ точки N' отъ обоихъ фокусовъ равна суммѣ $MF'+MF$, то точка N' принадлежитъ также эллипсу. Такимъ образомъ обѣ точки M и N' эллипса находятся на одной прямой MN', проходящей черезъ точку O, и лежатъ на равномъ отъ нея разстояніи. То же самое будетъ для каждой пары точекъ; слѣдовательно, точка O есть центръ эллипса.

17. Видъ и размѣры эллипса зависятъ отъ разстоянія $F'F'$ фокусовъ и постоянной суммы AA'. Мы видѣли какимъ образомъ опредѣляется отсюда величина BB'. Можно также наоборотъ опредѣлить эллипсъ по двумъ величинамъ AA' и BB', которыя называются его осями. Сначала опредѣлимъ фокусы (*фиг.* 12); для этого изъ конца B малой оси, какъ центра, радіусомъ, равнымъ большой полуоси OA, описываемъ окружность, которая пересѣчетъ большую ось въ двухъ точкахъ F' и F'. Эллипсъ, фокусы котораго суть F и F', а большая ось есть AA', малою осью долженъ имѣть прямую BB'. Опредѣливъ фокусы, построимъ эллипсъ по точкамъ, или начертимъ его непрерывнымъ движеніемъ, какъ это было показано.

Фиг. 12.



18. *Эксцентрицитетомъ* называется отношеніе разстоянія FF' фокусовъ къ большой оси AA'.

Эллипсъ есть кривая сомкнутая, болѣе или менѣе растянутая; видъ его зависитъ отъ эксцентрицитета. Если эксцентрицитетъ равенъ нулю, то оба фокуса совпадутъ съ центромъ; тогда разстояніе какой–нибудь точки эллипса отъ центра будетъ величина постоянная, и эллипсъ обратится въ окружность круга. Если эксцентрицитетъ будетъ очень малъ, то

оба фокуса будутъ очень близки къ центру; тогда обѣ оси будутъ мало отличаться другъ отъ друга, и эллипсъ будетъ округлый и будетъ мало отличаться отъ круга. По мѣрѣ того какъ эксцентрицитетъ будетъ увеличиваться, предполагая большую ось постоянною, фокусы будутъ удаляться отъ центра, малая ось будетъ уменьшаться, и эллипсъ будетъ все болѣе и болѣе получать сплюснутый видъ.

19. Найдемъ теперь уравненіе эллипса. Система координатъ, опредѣляемая самимъ объясненіемъ эллипса, будетъ первая биполярная система. Если положеніе каждой точки плоскости опредѣлимъ по ихъ разстояніямъ отъ двухъ опредѣленныхъ точекъ F и F′, то уравненіе эллипса будетъ

$$(1)\quad u + v = 2a.$$

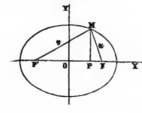
Взявъ вторую биполярную систему, эллипсъ выразится также очень простымъ уравненіемъ. Означивъ черезъ α и β два угла координатъ и черезъ $2p$ периметръ $2a + 2c$ треугольника MFF′, получимъ

$$\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-2c)(p-u)}{p(p-v)}}, \quad \operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \sqrt{\frac{(p-2c)(p-v)}{p(p-u)}};$$

откуда

$$(2)\quad \operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}\operatorname{tang}\frac{\beta}{2} = \frac{p-2c}{p} = \frac{a-c}{a+c}.$$

Фиг. 13.



Найдемъ, наконецъ, ур. эллипса въ прямолинейныхъ координатахъ. Возьмемъ оси кривой за оси координатъ (*фиг.* 13); такъ какъ PF′ и PF, равны $c - x$ и $c + x$, то изъ прямоугольныхъ треугольниковъ FMP и F′MP находимъ

$$u = \sqrt{y^2 + (c - x)^2}, \quad v = \sqrt{y^2 + (c + x)^2}.$$

Внеся эти величины въ ур. (1), получимъ

$$(3)\quad \sqrt{y^2 + (c - x)^2} + \sqrt{y^2 + (c + x)^2} = 2a.$$

Чтобы уничтожить здѣсь корень, перенесемъ первый корень во вторую часть и обѣ части уравненія возвысимъ въ квадратъ; тогда получимъ

$$y^2 + (c + x)^2 = 4a^2 + y^2 + (c - x)^2 - 4a\sqrt{y^2 + (c - x)^2}.$$

или, сдѣлавъ приведеніе,

$$a\sqrt{y^2 + (c - x)^2} = a^2 - cx.$$

Возвысивъ снова въ квадратъ, найдемъ

$$(4) \quad a^2y^2 + (a^2 - c^2)\,x^2 = a^2\,(a^2 - c^2).$$

Но ур. (4) тожественно съ ур. (3); оно тожественно съ четырьмя уравненіями

$$u + v = 2a,\ u - v = 2a,\ -u + v = 2a,\ -u - v = 2a,$$

которыя получимъ, когда въ ур. (3) перемѣнимъ знаки у радикаловъ. Уравненіе $-u - v = 2a$ не имѣетъ дѣйствительныхъ рѣшеній. Уравненія $u - v = 2a$, $-u + v = 2a$, полагая $2a > 2c$, также не имѣютъ дѣйствительныхъ рѣшеній; потому что величины u и v означаютъ разстоянія точекъ F и F отъ точки, имѣющей координатами x и y, а разность разстояній не можетъ равняться величинѣ $2a$, которая больше разстоянія $2c$ или FF'. Такимъ образомъ, ограничиваясь дѣйствительными рѣшеніями, можно сказать, что ур. (4) тожественно съ ур. (3). Такъ какъ постоянная сумма $2a$ болѣе разстоянія фокусовъ $2c$, то можно положить $a^2 - c^2 = b^2$, и тогда ур. эллипса представится въ видѣ $a^2y + b^2x^2 = a^2b^2$,

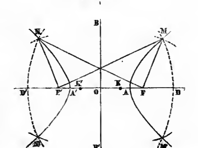
или $$(5) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Гипербола.

20. *Гипербола есть такая кривая, въ которой разность разстояній каждой ея точки отъ двухъ опредѣленныхъ точекъ есть величина постоянная.* Эти двѣ опредѣленныя точки называются *фокусами* гиперболы.

Гиперболу можно легко построить по точкамъ. На прямой F'F (*фиг.* 14) отложимъ линію F'K, равную постоянной разности. Изъ фокуса F' какъ центра, разными радіусами опишемъ круги. Пусть D будетъ точка, въ которой одинъ изъ такихъ круговъ пересѣкаетъ прямую F'F; изъ фокуса F, какъ центра, радіусомъ, равнымъ KD, опишемъ другой кругъ. Этотъ пересѣчетъ первый въ двухъ точкахъ M и M', которыя будутъ точками

Фиг. 14.



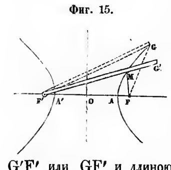
гиперболы, потому что разность разстояній MF′ и MF точки M отъ двухъ фокусовъ равна разности двухъ радіусовъ F′D и KD, т. е. данной длинѣ F′K. Повторимъ то же самое построеніе для каждаго круга, описаннаго изъ фокуса F′, какъ центра; когда получимъ большое число подобныхъ точекъ, то соединивъ всѣ эти точки непрерывною линіею, получимъ дугу гиперболы MAM′.

Гипербола состоитъ изъ двухъ неопредѣленныхъ вѣтвей MAM′, NA′N′; для первой разстояніе MF менѣе MF′, для второй, наоборотъ, разстояніе NF болѣе NF′. Вторую вѣтвь получимъ точно такъ же, какъ и первую, откладывая на прямой FF′ линію FK′, равную постоянной разности, и описывая изъ фокуса F, какъ центра, кругъ произвольнымъ радіусомъ FD′, а изъ фокуса F′, какъ центра, радіусомъ, равнымъ F′D′, другой кругъ.

Если чрезъ $2a$ назовемъ постоянную разность и черезъ $2c$ разстояніе FF′ фокусовъ, то, чтобы получить кривую, необходимо, чтобы $2a$ было менѣе $2c$. Означимъ черезъ $\alpha + a$ бóльшій радіусъ; тогда мéньшій будетъ $\alpha - a$; круги пересѣкутся тогда, когда сумма 2α радіусовъ будетъ больше $2c$. Такимъ образомъ бóльшій радіусъ долженъ быть болѣе $c + a$, мéньшій долженъ быть болѣе $c - a$.

21. Гиперболу можно начертить также непрерывнымъ движеніемъ. Положимъ, что линейка обращается около фокуса F′, и что одинъ конецъ нитки прикрѣпленъ въ фокусѣ F, а другой къ концу G линейки (*фиг.* 15). Если обращая линейку, мы будемъ въ то же время двигать карандашъ по линейкѣ, натягивая постоянно имъ нить, то онъ опишетъ дугу гиперболы. Дѣйствительно, пусть F′G′ будетъ какое-нибудь положеніе линейки; тогда карандашъ передвинется отъ G′ къ M, и нить приметъ положеніе G′MF. Такъ какъ разность разстояній MF′ и MF не измѣнится, если мы увеличимъ ихъ на одну и ту же величину G′M; то, слѣдовательно, она равна постоянной разности между длиною линейки G′F′ или GF′ и длиною нитки G′MF или GF. Вторую вѣтвь мы получимъ, поворачивая линейку около фокуса F.

Фиг. 15.



22. Прямая FF′ есть ось кривой; каждую вѣтвь она раздѣляетъ на двѣ симметричныя части, потому что двѣ точки M и M′ или N и N′ (фиг. 14), которыя опредѣляются пересѣченіемъ двухъ круговъ, описанныхъ изъ фокусовъ, какъ центровъ, расположены симметрично относительно этой прямой. Точки A и A′, въ которыхъ ось пересѣкаетъ кри-

вую, называются вершинами гиперболы. Чтобы найти вершины A и A′, надобно взять средины линій FK и FK′. Длина оси AA′ равна постоянной разности разстояній каждой точки гиперболы отъ обоихъ фокусовъ, потому что если A′F′ замѣнимъ равною ей AK, то увидимъ, что F′K равно AA′.

Гипербола имѣетъ также другую ось, которая есть перпендикуляръ BB′, возставленный изъ средины прямой AA′. Чтобы доказать это, стоитъ только къ двумъ вѣтвямъ гиперболы приложить всѣ тѣ сужденія, которыя мы сдѣлали относительно эллипса (§ 15). Но вторая ось не пересѣкаетъ кривую; поэтому, первую называютъ поперечною; очевидно также, что точка O, средина разстоянія FF′ фокусовъ, есть центръ кривой.

23. Если возьмемъ первую биполярную систему и означимъ черезъ u и v разстоянія какой-нибудь точки кривой отъ двухъ фокусовъ F и F′, то обѣ вѣтви кривой выразятся соотвѣтственно уравненіями.

$$(1) \quad v - u = \pm 2a.$$

Если принять вторую биполярную систему, то уравненія вѣтвей будутъ

$$\frac{\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}} = \frac{c+a}{c-a}, \qquad \frac{\operatorname{tang}\frac{\alpha}{2}}{\operatorname{tang}\frac{\beta}{2}} = \frac{c-a}{c+a}.$$

Въ прямоугольныхъ же координатахъ, если за оси координатъ возьмемъ обѣ оси кривой, уравненіе гиперболы будетъ

$$\sqrt{y^2 + (c+x)^2} - \sqrt{y^2 + (c-x)^2} = \pm 2a.$$

Сдѣлавъ тѣ же преобразованія, какъ въ § 19, получимъ ур. въ цѣломъ видѣ $a^2y^2 + (a^2 - c^2)x^2 = a^2(a^2 - c^2)$, которое мы получили для эллипса.

Это уравненіе, какъ мы замѣтили, тождественно съ четырьмя различными уравненіями $v - u = \pm 2a$, $u + v = \pm 2a$, но въ дѣйствительности, такъ какъ $2a$ менѣе $2c$, два послѣднія ур. не имѣютъ дѣйствительныхъ рѣшеній. Если положимъ $c^2 - a^2 = b^2$, то ур. гиперболы приметъ видъ

$$(2) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Замѣтимъ, что, принимая прямолинейную систему координатъ, обѣ вѣтви гиперболы выражаются однимъ ур. (2), между тѣмъ какъ, принимая первую биполярную систему, одна изъ вѣтвей выражается уравненіемъ

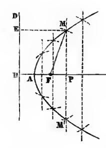
$v - u = 2a$, другая ур. $u - v = 2a$. Надобно также, чтобы и во второй биполярной системѣ были два различныя уравненія.

Парабола.

24. *Парабола есть такая кривая, каждая точка которой равно отстоитъ отъ точки, называемой фокусомъ, и отъ прямой, называемой директрисою.*

Параболу можно легко построить по точкамъ. Пусть F, будетъ фокусъ, DD′ директриса (*фиг.* 16); проведемъ черезъ фокусъ прямую BD перпендикулярную къ директрисѣ; точка A, средина FD, есть первая точка параболы. Проведемъ рядъ линій, параллельныхъ директрисѣ, на разстояніяхъ, которыя были бы больше AD. Пусть P будетъ точка, въ которой одна изъ такихъ линій пересѣкаетъ прямую DB; изъ фокуса F радіусомъ, равнымъ DP, опишемъ кругъ, который пересѣчетъ эту параллельную линію въ двухъ точкахъ M и M′; эти точки будутъ точками параболы, потому что перпендикуляръ ME′, опущенный изъ точки M на директрису, равенъ DP, и, слѣдовательно, радіусу MF; итакъ точка M, равно удаленная отъ фокуса и отъ директрисы, есть точка параболы. Сдѣлавъ подобное же построеніе для каждой параллельной линіи, получимъ рядъ точекъ, и потомъ соединимъ ихъ одною непрерывною линіею.

Фиг. 16.



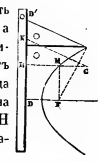
Прямая DB, проведенная черезъ фокусъ перпендикулярно къ директрисѣ, есть ось параболы. Дѣйствительно хорда MM′, по построенію, перпендикулярна къ DB и въ точкѣ P она дѣлится пополамъ. Слѣдовательно, если верхнюю часть параболы, повернувъ около прямой DB, наложимъ на другую, то прямая PM совпадетъ съ PM′, а точка M съ M′. Такъ какъ это будетъ справедливо для каждыхъ двухъ точекъ, то очевидно, что верхняя часть совершенно совпадетъ съ нижнею; слѣдовательно, прямая DB есть *ось* параболы. Точка A, средина FD, есть *вершина* параболы.

Парабола не представляется сомкнутою кривою, какъ эллипсъ; она, напротивъ, состоитъ изъ двухъ вѣтвей, которыя простираются неопредѣленно. Размѣры параболы зависятъ отъ разстоянія фокуса отъ директрисы, которое называется *параметромъ* параболы. Когда это разстояніе очень мало, тогда обѣ вѣтви параболы будутъ очень близки другъ къ другу;

когда же параметръ будетъ увеличиваться, обѣ вѣтви будутъ расходиться, и парабола будетъ дѣлаться болѣе и болѣе отверстою.

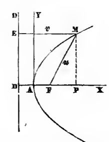
25. Параболу можно также начертить непрерывнымъ движеніемъ. Приложимъ линейку къ директрисѣ DD' (*фиг.* 17); къ линейкѣ приложимъ треугольникъ GHK; къ вершинѣ его G прикрѣпимъ однимъ концемъ нить, равную сторонѣ GH треугольника, другой же конецъ прикрѣпимъ въ фокусѣ; натянувъ нить карандашемъ и двигая треугольникъ вдоль линейки, а карандашъ въ то же время вдоль треугольника, мы опишемъ дугу параболы. Въ самомъ дѣлѣ пусть M будетъ точка, въ которой будетъ находиться карандашъ, когда треугольникъ занимаетъ положеніе GHK; такъ какъ длина нитки или ломаная линія $GM + MF$ равна сторонѣ GH треугольника, то разстояніе MF равно MH, а слѣдовательно, точка M принадлежитъ параболѣ.

Фиг. 17.



26. Опредѣленіе параболы указываетъ намъ на такую систему координатъ, о которой мы еще не говорили. Какую-нибудь точку M плоскости можно опредѣлить помощію ея разстояній MF и ME отъ фокуса F и отъ директрисы DD' (*фиг.* 18). Точка M опредѣляется пересѣченіемъ круга, описаннаго изъ фокуса, какъ центра, съ прямою, параллельною директрисѣ. Если черезъ u и v назовемъ координаты точки M, то ур. параболы относительно этой системы будетъ

Фиг. 18.



$$(1)\quad u = v.$$

Возьмемъ теперь вершину A параболы за начало прямолинейныхъ координатъ, ось AX параболы за ось x-овъ, а перпендикуляръ AY за ось y-овъ. Означивъ черезъ p разстоянія FD фокуса отъ директрисы, получимъ

$$v = AP + AD = x + \frac{p}{2},\quad u = \sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2},$$

и ур. параболы будетъ

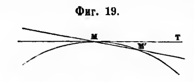
$$\sqrt{y^2 + \left(x - \frac{p}{2}\right)^2} = x + \frac{p}{2},$$

или

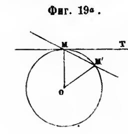
$$(2)\quad y^2 = 2px.$$

27. Прежде, нежели пойдемъ далѣе, опредѣлимъ понятіе о касательной, проведенной къ какой-нибудь кривой. Въ элементарной геометріи касательною къ кругу обыкновенно называется безконечная прямая, которая съ окружностью имѣетъ только одну общую точку; но такое опредѣленіе не составляетъ общаго понятія о касательной; поэтому касательную надо опредѣлить иначе. Пусть M будетъ данная точка кривой (*фиг.* 19); черезъ эту точку и точку M′, близкую къ ней, проведемъ неопредѣленную прямую. Представимъ себѣ теперь, что точка M′ неопредѣленно приближается къ точкѣ M; тогда прямая MM′ будетъ приближаться къ предѣльному положенію MT. Эта прямая MT и называется касательною къ кривой въ точкѣ M.

Фиг. 19.



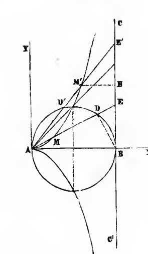
Фиг. 19a.



Изъ этого опредѣленія видно, что касательная къ кругу въ точкѣ M перпендикулярна къ радіусу OM; потому что въ равнобедренномъ треугольникѣ MOM′ (*фиг.* 19a) уголъ OMM′ равенъ прямому углу безъ половины центральнаго угла MOM′; слѣдовательно, когда точка M′ неопредѣленно приближается къ точкѣ M, уголъ при центрѣ приближается къ нулю, а уголъ OMM′ обращается въ прямой.

Циссоида Діоклеса.

Фиг. 20.



28. Даны кругъ, діаметръ AB и касательная BC къ концу этого діаметра (*фиг.* 20). Если изъ точки A проведемъ сѣкущую AE и на ней отложимъ отъ точки A линію AM, равную отрѣзку DE сѣкущей, заключающемуся между кругомъ и касательною, то геометрическое мѣсто точки M будетъ кривая, которая называется *циссоидою*.

Если сѣкущую AE мы будемъ поворачивать около точки A по направленію отъ AX къ перпендикуляру AY, то отрѣзокъ DE, а слѣдовательно, и AM будутъ неопредѣленно увеличиваться; точка же M опишетъ вѣтвь безконечной кривой AMM′. Если же мы будемъ обращать сѣкущую въ другую сто-

рону отъ AX, тогда, очевидно, получимъ вторую вѣтвь, равную первой.

Прямая AB есть ось кривой, потому что обѣ вѣтви расположены симметрично относительно этой прямой.

Касательная, проведенная къ двумъ вѣтвямъ въ точкѣ A, совпадаетъ съ осью. Дѣйствительно, если сѣкущая AM будетъ вращаться около точки A такимъ образомъ, чтобы хорда AM или DE обратилась въ нуль, то она будетъ приближаться къ предѣльному положенію AB; слѣдовательно, AB есть касательная въ точкѣ A. Точка A называется точкою *возврата*.

Очевидно также, что двѣ вѣтви кривой неопредѣленно приближаются къ прямой CC′. Дѣйствительно, разсмотримъ сѣкущую въ положеніи AE′. Вычитая изъ нея поперемѣнно двѣ равныя линіи AM′ и D′E′, получимъ M′E′ = AD′. Такъ какъ хорда AD′ при обращеніи сѣкущей все болѣе и болѣе уменьшается и приближается къ нулю, то и линія M′E′ будетъ также уменьшаться и приближаться къ нулю, а слѣдоват., и перпендикуляръ M′H. Эта прямая CC′, къ которой неопредѣленно приближается кривая, называется *асимптотою*.

Циссоида была найдена греческимъ геометромъ Діоклесомъ, для рѣшенія задачи о построеніи двухъ среднихъ пропорціональныхъ между двумя данными линіями.

29. Найдемъ теперь ур. циссоиды въ полярныхъ координатахъ. Возьмемъ точку A за полюсъ, а прямую AB за полярную ось. Означимъ черезъ a діаметръ даннаго круга, черезъ ρ и ω координаты какой-нибудь точки M кривой (*фиг.* 21). Изъ прямоугольныхъ треугольниковъ ABE, ABD получимъ

Фиг. 21.

$$AE = \frac{a}{\cos\omega},\ AD = a\cos\omega;$$

откуда $\rho = DE = AE - AD = \frac{a}{\cos\omega} - a\cos\omega = \frac{a\sin^2\omega}{\cos\omega}$.

Такимъ образомъ циссоида въ полярныхъ координатахъ выражается уравненіемъ

$$(1)\ \rho = \frac{a\sin^2\omega}{\cos\omega}.$$

Теперь найдемъ ея ур. въ прямолинейныхъ координатахъ. Точку A возьмемъ за начало координатъ, прямую AB за ось x-овъ, а перпендикуляръ за ось y-овъ. Изъ прямоугольнаго треугольника MAP мы имѣемъ

$$x = \rho \cos \omega, \ y = \rho \sin \omega, \ \rho^2 = x^2 + y^2;$$

если въ ур. (1) $\cos \omega$ замѣнимъ черезъ $\frac{x}{\rho}$, $\sin \omega$ черезъ $\frac{y}{\rho}$, то получимъ $\rho^2 x = ay^2$; потомъ ρ^2 замѣнимъ черезъ $x^2 + y^2$; тогда мы получимъ ур. циссоиды въ прямолинейныхъ координатахъ:

$$(2) \ y^2 \ (a - x) - x^3 = 0.$$

30. Построимъ теперь циссоиду, видъ который мы уже нашли геометрическимъ путемъ, по ея уравненію, выраженному въ прямолинейныхъ координатахъ.

Рѣшивъ это ур. относительно y, получимъ

$$y = \pm x \sqrt{\frac{x}{a-x}}.$$

Такъ какъ ордината имѣетъ дѣйствительныя величины только при тѣхъ величинахъ абсциссы, которыя заключаются между 0 и a, то, слѣд., вся кривая расположена между осью y-овъ и линіею CC′, параллельною этой оси и проведенною отъ нея на разстояніи a (*фиг.* 20). Когда x возрастаетъ отъ 0 до a, числовая величина y увеличивается отъ 0 до ∞; отсюда видимъ, что вѣтвь кривой, проходя черезъ начало A, простирается въ безконечность. При этомъ измѣненіи x, разстояніе $M'H = a - x$ точки кривой отъ прямой BC будетъ приближаться къ нулю; изъ чего мы заключаемъ, что прямая BC есть асимптота кривой. Такъ какъ каждой величинѣ x соотвѣтствуютъ двѣ величины y, равныя и съ обратными знаками, то кривая состоитъ изъ двухъ вѣтвей, расположенныхъ симметрично относительно оси AX.

Строфоида.

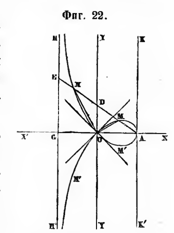
31. Данъ въ плоскости прямой уголъ YOX (*фиг.* 22) и опредѣленная точка A на одной изъ его сторонъ; черезъ эту точку проводимъ какую-нибудь прямую AD, которая пересѣчетъ сторону OY въ точку D, и на этой прямой въ обѣ стороны отъ точки D отложимъ линіи DM и DN, равныя OD; геометрическое мѣсто точекъ M и N и будетъ *строфоида*.

Когда прямая AD находится въ положеніи AO, тогда обѣ точки M и N сливаются съ O. Если отсюда эта прямая будетъ поворачиваться такъ, что точка D будетъ подниматься по OY, то OD будетъ увеличи-

ваться, и при этомъ, очевидно, точка N опишетъ вѣтвь безконечной кривой ON.

Что же касается точки M, то она при такомъ обращеніи линіи AD будетъ болѣе и болѣе приближаться къ точкѣ A. Дѣйствительно, точки M и N мы получимъ, описавъ кругъ изъ точки D, какъ центра, радіусомъ равнымъ DO; когда точка D будетъ безконечно подниматься, тогда дуга круга OM будетъ сливаться съ прямой OA, а точка M совпадетъ съ A. По другой сторонѣ оси OX, очевидно, будетъ симметричная часть.

Фиг. 22.



Точка O, черезъ которую проходятъ обѣ вѣтви кривой, называется *кратною точкою*. Касательныя, проведенныя въ этой точкѣ къ двумъ вѣтвямъ кривой, сливаются съ биссектрисами прямыхъ угловъ YOX, YOX′. Дѣйствительно, уголъ ODE, какъ внѣшній уголъ равнобедреннаго треугольника DOM, равенъ суммѣ двухъ внутреннихъ угловъ, ему несмежныхъ, то есть равенъ двойному углу DOM; точно также уголъ ODA равенъ двойному углу DON. Поэтому, когда прямую AD будемъ приближать къ AO, тупой уголъ ODE будетъ уменьшаться и приближаться къ прямому углу, половина угла YOM будетъ также уменьшаться и приближаться къ $\frac{\pi}{4}$; острый же уголъ ODA будетъ увеличиваться и приближаться къ прямому углу; половина угла YON будетъ увеличиваться и приближаться также къ $\frac{\pi}{4}$. Сверхъ того замѣтимъ, что прямыя OM и ON взаимно перпендикулярны. Кромѣ того видно, что дуга OMA расположена внизу своей касательной, между тѣмъ какъ дуга ON вверху.

Касательная въ вершинѣ A перпендикулярна къ оси OX, потому что, когда точка D неопредѣленно поднимается, хорда AM становится перпендикулярною къ OX.

На продолженіи AO возьмемъ $OG = OA$ и изъ точки G возставимъ перпендикуляръ H′H; эта прямая будетъ асимптотою двухъ безконечныхъ вѣтвей кривой; потому что разстояніе NE, равное AM, приближается къ нулю.

32. Найдемъ уравненіе этой кривой въ полярныхъ координатахъ. Возьмемъ точку O за полюсъ, а прямую OA за полярную ось; тогда координаты точки M будутъ: $\rho = OM$, $\omega = MOA$. Въ равнобедренномъ

треугольникѣ DOM каждый изъ угловъ DOM, DMO равенъ $\frac{\pi}{2} - \omega$, а уголъ ODM равенъ 2ω; уголъ OAM, какъ дополнительный предъидущаго, равенъ $\frac{\pi}{2} - 2\omega$. Если чрезъ a означимъ линію OA, то изъ треугольника OMA получимъ

$$\frac{\rho}{a} = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2} - 2\omega\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{2} - \omega\right)},$$

откуда

$$(1) \quad \rho = \frac{a \cos 2\omega}{\cos \omega}.$$

Координаты точки N удовлетворяютъ этому же ураяненію.

Найдемъ теперь ур. этой же кривой въ прямолинейныхъ координатахъ, взявъ за оси двѣ прямыя OX и OY. Если въ предъидущемъ уравненіи, представленномъ въ видѣ $\rho \cos \omega = a (\cos^2 \omega - \sin^2 \omega)$, $\cos \omega$ и $\sin \omega$ замѣнимъ ихъ величинами $\frac{x}{\rho}$ и $\frac{y}{\rho}$, то получимъ $x\rho^2 = a (x^2 - y^2)$; внеся $x^2 + y^2$ вмѣсто ρ^2, получимъ ур. третьей степени.

$$(2) \quad x (x^2 + y^2) - a (x^2 - y^2) = 0.$$

33. Построимъ теперь строфоиду по ея уравненію, выраженному въ прямолинейныхъ координатахъ. Рѣшивъ ур. (2) относительно y, получимъ

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a - x}{a + x}}.$$

Ордината y будетъ дѣйствительною величиною тогда, когда подкоренная величина будетъ положительна. Поэтому если x-у будемъ давать величины положительныя, то дробь будетъ положительная, когда числитель будетъ положительный; а для этого x долженъ быть менѣе a. Если x-у будемъ давать отрицательныя величины, то дробь будетъ положительною, когда знаменатель будетъ положительный; а для этого необходимо, чтобы абсолютная величина x была меньше a. Такимъ образомъ абсцисса можетъ измѣняться только отъ $-a$ до $+a$; слѣдоват., если въ обѣ стороны отъ начала координатъ по оси x-овъ отложимъ линіи OA и OG, равныя a, и если черезъ точки G и A проведемъ линіи H'H, KK', параллельныя оси y-овъ, то вся кривая будетъ заключаться между этими двумя параллельными; о видѣ же кривой можно судить по измѣненію функціи.

$$y = x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

Когда x измѣняется отъ 0 до a, y получаетъ конечныя величины; при $x=0$, а также при $x=a$, y обращается въ нуль; это показываетъ, что вѣтвь OMA кривой проходитъ черезъ точку O и примыкаетъ въ точкѣ A. Когда x измѣняется отъ 0 до $-a$, то ордината y будетъ отрицательная и измѣняется отъ 0 до $-\infty$; это показываетъ, что другая вѣтвь ON′ идетъ отъ начала въ безконечность, приближаясь болѣе и болѣе къ прямой HH′, которая есть ея асимптота; эта вѣтвь составляетъ продолженіе вѣтви AOM.

Перемѣнивъ знакъ радикала, получимъ вѣтвь AM′ON, симметричную первой относительно оси x-овъ.

Паскалева улитка.

34. Черезъ точку A, взятую на кругѣ, проводимъ какую-нибудь сѣкущую AD и на ней по обѣ стороны точки D, въ которой она пересѣкаетъ кругъ, откладываемъ линіи DM и DN постоянной величины; геометрическое мѣсто точекъ M и N будетъ кривая, которая называется *улиткой Паскаля*.

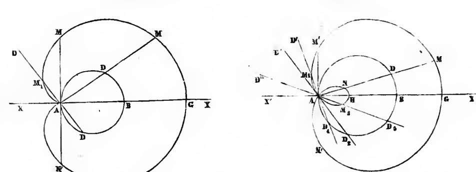
Чтобы получить всю кривую, положимъ, что радіусъ векторъ сперва совпадаетъ съ діаметромъ AB круга, а потомъ поворачивается въ ту или другую сторону на прямой уголъ. Мы получимъ также цѣлую кривую, когда радіусъ векторъ совершитъ полный оборотъ, и когда по его направленію отъ точки, въ которой онъ или его продолженіе пересѣкаетъ кругъ, будемъ откладывать постоянную длину. Кривая будетъ имѣть три различные вида, смотря потому, будетъ ли постоянная двина a больше, равна или меньше діаметра b круга,

1) Разсмотримъ прежде тотъ случай, когда a болѣе b. Когда радіусъ совпадаетъ съ AB, тогда отъ точки B на этомъ радіусѣ надо откладывать линію BG, равную a; и мы получимъ точку G кривой (*фиг.* 23). Когда радіусъ повернется около точки A и придетъ въ положеніе AD, мы получимъ точку M. Когда же онъ повернется на прямой уголъ, точка D придетъ въ A, точка M въ M′. Придя въ положеніе AD′, радіусъ своимъ продолженіемъ пересѣчетъ кругъ въ D_1; отъ этой точки

Фиг. 23.

D_1 надо въ прежнемъ же направленіе AD' отложить линію D_1M_1, равную a. Когда радіусъ повернется на два прямые угла, т. е. придетъ въ положеніе AX', точка D_1 придетъ въ B, а точка M_1 въ H; такимъ образомъ получимъ дугу $M'M_1H$, которая составляетъ продолженіе первой и которая также находится внѣ круга. Переходя изъ положенія AX' и повернувшись еще на два прямые угла, радіусъ снова приходитъ въ начальное положеніе AX, а движущаяся точка опишетъ дугу $HN'G$, симметричную дугѣ GHM относительно прямой $X'X$. Такимъ образомъ точка непрерывнымъ движеніемъ описываетъ цѣлую кривую.

2) Положимъ теперь, что постоянная длина a равна b. Когда радіусъ векторъ повернется на два прямые угла отъ своего первоначальнаго положенія AX, точка M опишетъ дугу $GMM'A$ (*фиг.* 24), которая оканчивается въ точкѣ A. Касательная, проведенная въ точкѣ A, есть прямая AX, которая есть предѣлъ сѣкущей AM_1. Точка A есть точка возврата.



Фиг. 24. Фиг. 25.

3) Разсмотримъ, наконецъ, случай, когда a менѣе b. При обращеніи радіуса вектора на прямой уголъ отъ его первоначальнаго положенія AX, точка M опишетъ дугу GMM' (*фиг.* 25). Когда потомъ радіусъ займетъ положеніе AD', точка D придетъ въ D_1, точка M въ M'. Занявъ такое положеніе AD'', въ которомъ хорда D_2A будетъ равна a, точка M_1 придетъ въ A, а кривая будетъ касаться прямой AD''. При дальнѣйшемъ вращеніи, хорда D_2A становится болѣе a, и если возьмемъ линію D_3M_3, равную a, то получимъ точку M_3 внутри круга. Наконецъ, когда радіусъ придетъ въ положеніе AX', точка M_3 приходитъ въ H. Такимъ образомъ внѣшняя дуга $GM'A$ составляетъ продолженіе внутренней дуги AM_3H. Вращая въ другую сторону, получимъ дугу $HNAN'G$, симметричную первой относительно прямой $X'X$, и которая дополняетъ кривую.

35. Найдемъ ур. этой кривой въ полярныхъ координатахъ. Возьмемъ точку A за полюсъ, а прямую AX за полярную ось. Назовемъ чрезъ ω уголъ, образуемый направленіемъ радіуса съ направленіемъ AX. Когда этотъ радіусъ пересѣкаетъ кругъ, какъ напримѣръ, въ положеніи AD, тогда изъ прямоугольнаго треугольника ADB находимъ $AD = b \cos \omega$, и слѣдовательно,

$$\rho = DM + AD = a + b \cos \omega.$$

Когда же кругъ пересѣкается продолженіемъ радіуса, какъ, напримѣръ, въ положеніи AD′, тогда уголъ ω будетъ уголъ XAD′; въ этомъ случаѣ изъ прямоугольнаго треугольника BAD_1 находимъ $D_1A = - b \cos \omega$, и слѣдовательно,

$$\rho = D_1M_1 - D_1A = a + b \cos \omega.$$

Когда радіусъ находится въ положеніи AD‴ (фиг. 25), тогда длина радіуса вектора откладывается не по направленію этого радіуса, но по противоположному направленію; въ этомъ случаѣ радіусъ векторъ слѣдуетъ разсматривать какъ отрицательный, и мы получимъ

$$\rho = - AM_3 = D_3M_3 - AD_3 = a + b \cos \omega.$$

Такимъ образомъ, во всѣхъ случаяхъ кривая выражается уравненіемъ

$$(1)\ \rho = a + b \cos \omega.$$

Въ прямолинейныхъ координатахъ, если точку A возьмемъ за начало, діаметръ AB за ось x-овъ, перпендикуляръ за ось y-овъ, ур. кривой будетъ

$$(2)\ (x^2 + y^2 - bx)^2 = a^2 (x^2 + y^2),$$

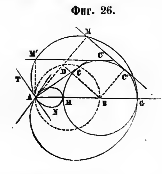
которое получимъ изъ ур. (1), замѣнивъ въ немъ $\cos \omega$ чрезъ $\frac{x}{\rho}$ и ρ^2 чрезъ $x^2 + y^2$ (§ 29) и возвысивъ обѣ части въ квадратъ для уничтоженія радикала.

36. Эту же кривую мы получимъ еще слѣдующимъ образомъ. Данъ кругъ GH и опредѣленная точка A; представимъ себѣ, что касательная CM двигается по кругу, и изъ точки A опущенъ перпендикуляръ AM на эту касательную (*фиг.* 26); найти геометрическое мѣсто точки M.

Здѣсь надобно разсматривать три случая, такъ какъ точка A можетъ находиться внутри круга, на немъ и внѣ его. Положимъ, напримѣръ, что

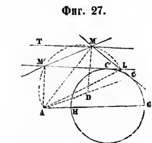
точка A находится внѣ круга. Когда касательная касается круга въ точкѣ G, тогда перпендикуляръ, опущенный изъ точки A, совпадаетъ съ діаметромъ AG, и точка G будетъ точка искомой кривой. Когда касательная будетъ перемѣщаться по четверти круга GCC′, точка M опишетъ дугу кривой GMM′. Потомъ касательная наклоняется до положенія C″A, и мы получимъ дугу M′A кривой. При движеніи касательной по C″H, основаніе перпендикуляра будетъ находиться подъ діаметромъ, и мы получимъ дугу ANH кривой. До сихъ поръ мы обращали касательную по полуокружности GC′N; обращая теперь по нижней полуокружности, получимъ часть симметричную первой.

Фиг. 26.



37. Легко построить геометрически касательную въ какой-нибудь точкѣ M кривой (*фиг.* 27). Пусть CM и C′M′ будутъ двѣ близкія, касательныя проведенныя къ кругу; L точка ихъ пересѣченія, AM и AM′ перпендикуляры, опущенные изъ точки A на эти касательныя. Такъ какъ окружность, описанная на AL, какъ на діаметрѣ, проходитъ черезъ двѣ точки M, то сѣкущая MM′ кривой будетъ также сѣкущею этого круга. Если теперь положимъ, что точка C′ безпредѣльно приближается къ точкѣ C, то точка M′ будетъ приближаться къ точкѣ M; тогда діаметръ AL совпадетъ съ AC, а сѣкущая MM′ сдѣлается касательною въ M кругу, описанному на діаметрѣ AC. Такимъ образомъ, соединивъ точку M съ срединою D прямой AC и проведя перпендикуляръ MT къ DM, получимъ касательную къ кругу въ точкѣ M. Касательныя, проведенныя въ двойной точкѣ A (*фиг.* 26) къ двумъ вѣтвямъ кривой, проходящимъ черезъ эту точку, соотвѣтственно перпендикулярны къ такимъ касательнымъ, какъ AC″, проведеннымъ изъ этой точки къ данному кругу.

Фиг. 27.



Замѣтимъ, что геометрическое построеніе касательной останется то же, если мы будемъ разсматривать геометрическое мѣсто основанія перпендикуляра, опущеннаго изъ данной точки на касательную, проведенную къ какой-нибудь кривой.

Найдемъ ур. этой кривой въ полярныхъ координатахъ. Возьмемъ точку A за полюсъ, діаметръ AG за полярную ось (*фиг.* 26); чрезъ a озна-

чимъ радіусъ BG даннаго круга и черезъ b разстояніе AB. Если черезъ центръ B круга проведемъ BD параллельно CM, то получимъ

$$\rho = AD + DM = b \cos \omega + a.$$

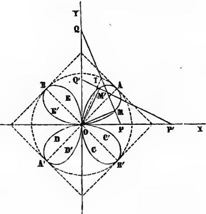
Это ур. есть то же, что ур. (1); откуда заключаемъ, что обѣ кривыя тождественны.

Впрочемъ, это тождество легко вывести геометрически. Такъ какъ уголъ D есть прямой, то геометрическое мѣсто точки D есть кругъ, описанный на AB, какъ на діаметрѣ; слѣдоват., точку M получимъ продолжая хорду AD на постоянную величину DM, равную BC.

Четырехлепестный вѣнчикъ.

38. Даны двѣ взаимно перпендикулярныя линіи OX, OY, по которымъ двигается конецъ прямой PQ, постоянной величины; изъ точки O опускаемъ перпендикуляръ OM на эту прямую: найти геометрическое мѣсто точки M (*фиг.* 28).

Фиг. 28.

Когда прямая PQ совпадаетъ съ OY, точка M находится въ O, и перпендикуляръ OM совпадаетъ съ OX; слѣдоват., касательная въ O къ дугѣ OM совпадаетъ съ OX. Точка I, средина PQ, описываетъ кругъ, центръ котораго есть O, а радіусъ равенъ a, означая чрезъ $2a$ постоянную длину PQ. Такъ какъ перпендикуляръ OM меньше косвенной OI, то разстояніе OM будетъ наибольшее, когда прямая PQ будетъ перпендикулярна къ биссектрисѣ OA.

При дальнѣйшемъ своемъ движеніи, прямая пройдетъ черезъ положеніе Q'P', симметричное PQ относительно биссектрисы OA, и мы получимъ дугу AM'O, симметричную дугѣ OMA. Такую кривую мы получимъ въ каждомъ изъ четырехъ прямыхъ угловъ. Такимъ образомъ кривая имѣетъ *четыре оси*, изъ которыхъ двѣ суть данныя прямыя OX, OY, а двѣ другія биссектрисы OA, OB. Точка O есть *центръ* кривой.

Если точку O возьмемъ за полюсъ, а OX за полярную ось, то изъ прямоугольныхъ треугольниковъ OMP, OPQ получимъ

$$\rho = \mathrm{OP} \cos \omega, \ \mathrm{OP} = 2\, a \sin \omega;$$

слѣдовательно,

$$(1) \ \rho = a \sin 2\,\omega.$$

Въ прямолинейныхъ координатахъ эта кривая выразится уравненіемъ шестой степени

$$(2) \ (x^2 + y^2)^3 - 4\, a^2\, x^2\, y^2 = 0.$$

ГЛАВА III.

Объ однородности.

39. *Опредѣленія*. Функція $f\ (a, b, c, \ldots)$ называется *однородною* относительно буквъ $a, b, c, \ldots$ тогда, когда, замѣнивъ въ ней a чрезъ ka, b чрезъ $kb \ldots$, получимъ

$$f(ka, kb, \ldots) = k^m f(a, b, c, \ldots);$$

гдѣ показатель m называется степенью однородной функціи.

Таковы, напримѣръ, функціи

$$a^2 + 2ab, \ \frac{a\sqrt{b} + b\sqrt{c}\,\sin\frac{c}{a}}{a+b}, \ \frac{a+\sqrt{ab}}{a+c}, \ \frac{a}{a^3 - b^3};$$

степень первой есть 2, степень второй есть $\frac{1}{2}$, степень третьей 0, четвертой — 2.

Очевидно:

1-е — Что сумма или разность двухъ однородныхъ функцій одной и той же степени есть однородная функція одинаковой степени съ данными функціями.

2-е — Что произведеніе нѣсколькихъ однородныхъ функцій какихъ-нибудь степеней есть функція однородная, степень которой равна суммѣ степеней данныхъ функцій.

3-е — Что частное двухъ однородныхъ функцій есть однородная функція, степень которой равна разности степеней дѣлимаго и дѣлителя.

4-е — Что степень однородной функціи есть однородная функція, степень которой есть произведеніе степени данной функціи не показателя степени.

5-е — Что корень изъ однородной функціи есть однородная функція, степень которой равна степени данной функціи, раздѣленной на показателя корня.

6-е — Что трансцендентная функція отъ однородной функціи нулевой степени есть сама функція однородная и нулевой степени. Напр., функціи

$$\sin\left(\frac{ab}{a^2+b^2}\right),\quad \log\left(\frac{b+\sqrt{a^2+b^2}}{a+b}\right)$$

суть однородныя и нулевой степени; потому что если a и b замѣнимъ черезъ ka и kb, то буква k подъ трансцендентнымъ знакомъ исчезаетъ, а множитель k^0 можно поставить впереди. Но если величина, стоящая подъ трансцендентнымъ знакомъ, хотя бы она была однородна, не будетъ нулевой степени, то букву k нельзя будетъ поставить множителемъ передъ трансцендентнымъ знакомъ, и функція не будетъ однородною. Напр., функція $\sin(a+\sqrt{bc})$ не однородна.

Если одночленъ будетъ раціональнымъ и цѣлымъ относительно буквъ $a, b, c, \ldots$, то степенью одночлена относительно одной буквы называется показатель этой буквы въ одночленѣ; степенью одночлена относительно нѣсколькихъ буквъ называется сумма показателей этихъ буквъ. Такъ какъ одночленъ всегда есть однородная функція, степень которой равна степени одночлена, то сумма нѣсколькихъ одночленовъ одной и той же степени есть многочленъ однородный той же степени. Напр., многочленъ

$$a^3 - 4a^2b + 5ab^2 - 2b^3$$

есть однородная функція третьей степени относительно буквъ a и b.

40. Когда ищутъ соотношеній, которыя существуютъ между различными линіями A, B, C, . . . фигуры, измѣряютъ эти линіи произвольною единицею, которая обыкновенно не обозначается и остается совершенно произвольною. Означимъ черезъ $a, b, c, \ldots$ числа, выражающія мѣры линій фигуры, и положимъ, что мы нашли между этими числами соотношеніе

$$(1)\ f(a, b, c, \ldots) = 0.$$

Такъ какъ разсужденія, посредствомъ которыхъ мы получили это со-

отношеніе, не зависятъ отъ единицы длины, то, очевидно, что это отношеніе должно существовать при всякой единицѣ. Назовемъ чрезъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ частныя величины $a, b, c, \ldots$ при первой единицѣ; черезъ $\alpha', \beta', \gamma', \ldots$ величина тѣхъ же количествъ при другой единицѣ; эти два ряда чиселъ удовлетворяютъ уравненіямъ

$$(2)\ f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0$$

$$(3)\ f(\alpha', \beta', \gamma', \ldots) = 0.$$

Но когда перемѣняемъ единицу, то числа измѣняются пропорціонально, такъ что если черезъ k означимъ отношеніе первой единицы къ второй, то получимъ

$$\frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{\beta'}{\beta} = \frac{\gamma'}{\gamma} = \ldots\ldots = k;$$

откуда

$$\alpha' = k\alpha,\ \beta' = k\beta,\ \gamma' = k\gamma \ldots.$$

Внеся это въ ур. (3), получимъ

$$(4)\ f(k\alpha, k\beta, k\gamma \ldots) = 0.$$

Положимъ, что первая единица остается неизмѣняемою, вторая измѣняется, тогда $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ будутъ числа постоянныя, k число произвольное, и ур. (4) должно быть справедливо для всякаго числа k.

Такимъ образомъ: *если ур.* (1) *будетъ справедливо, когда въ немъ буквы $a, b, c, \ldots$ замѣнимъ числами $\alpha, \beta, \gamma \ldots$, то оно будетъ также справедливо и тогда, когда въ немъ эти же буквы замѣнимъ черезъ $k\alpha, k\beta, k\gamma \ldots$, какое бы ни было число k.*

41. Предъидущее условіе, очевидно, удовлетворяется тогда, когда первая часть ур. (1) есть функція однородная относительно буквъ $a, b, c \ldots$; потому что тогда

$$f(k\alpha, k\beta, k\gamma, \ldots) = k^m f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots);$$

если выраженіе $f(\alpha, \beta, \gamma, \ldots)$ равно нулю, то $f(k\alpha, k\beta, k\gamma, \ldots)$, будетъ также равно нулю для всякаго k.

Теперь докажемъ наоборотъ, что однородность должна существовать, ограничиваясь алгебраическими уравненіями, представленными въ цѣломъ видѣ.

Положимъ, что $f(a, b, c, \ldots)$ есть цѣлый многочленъ; если всѣ члены

его не будутъ одинаковой степени, то члены одинаковыхъ степеней соединимъ въ одну группу. Назовемъ черезъ $\varphi(a, b, c,\ldots)$ совокупность членовъ, которые будутъ имѣть самую высшую степень m, чрезъ $\psi(a, b, c,\ldots)$ совокупность членовъ n–ой степени и т. д.; тогда ур. (4) обратится въ

$$k^m \psi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) + k^n \psi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) + \ldots = 0.$$

Чтобы это ур. было справедливо для всякаго k, необходимо, чтобы

$$\varphi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0, \psi(\alpha, \beta, \gamma, \ldots) = 0, \ldots.$$

Такъ какъ единица мѣры, къ которой относятся числа $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ произвольна, то между линіями фигуры получимъ однородныя отношенія

$$\varphi(a, b, c, \ldots) = 0, \psi(a, b, c, \ldots) = 0, \ldots.$$

Слѣдовательно, *если ур.* (1) *не однородно, то оно раздѣляется на нѣсколько отдѣльныхъ однородныхъ уравненій.*

42. Можетъ случиться, что неоднородное ур. будетъ удовлетворено когда выберемъ частную единицу, хотя части, изъ которыхъ состоитъ уравненіе, не будутъ отдѣльно равны нулю; но тогда, если перемѣнимъ единицу, уравненіе не удовлетворится.

Объяснимъ это на примѣрѣ.

Опредѣлимъ размѣры такого цилиндра, поверхность котораго была бы одинакова съ поверхностію шара даннаго радіуса A; а его объемъ былъ бы равенъ объему шара радіуса B.

Пусть X будетъ радіусъ, а Y высота цилиндра; назовемъ черезъ a, b, x, y мѣры линій A, B, X, Y, относительно какой-нибудь единицы. Неизвѣстныя должны удовлетворять двумъ уравненіями.

$$(5)\quad x^2 + xy - 2a^2 = 0$$

$$(6)\quad x^2y - \frac{4}{2} b^3 = 0.$$

Каждое изъ этихъ ур. однородно: первое второй степени, второе третьей. Если эти уравненія справедливы при извѣстной единицѣ мѣры, то онѣ будутъ также справедливы при другой единицѣ.

Неизвѣстныя x и y точно также должны удовлетворять неоднородному уравненію

$$(7)\quad (x^2 + xy - 2a^2) + \left(x^2y - \frac{4}{3} b^3\right) = 0,$$

которое получимъ, когда предъидущія уравненія сложимъ.

Разсмотримъ ур. (7), не обращая вниманія на его родъ. Можно найти такія четыре линіи A, B, X, Y, что если измѣримъ ихъ какою-нибудь единицею, то полученныя числа удовлетворятъ этому уравненію, не обращая отдѣльно каждую часть этого уравненія въ нуль. Положимъ, напримѣръ, что четыре линіи относительно первой единицы выразятся числами $a=1$, $b=3$, $x=1$, $y=18,5$, изъ которыхъ три взяты произвольно, а четвертая опредѣляется изъ ур. (7). Если же эти линіи измѣримъ единицею, которая вдвое меньше, то получимъ $a=2$, $b=6$, $x=2$, $y=37$, которыя болѣе не удовлетворяютъ уравненію. Цилиндръ, построенный на линіяхъ X и Y, опредѣленныхъ такимъ образомъ, имѣетъ то свойство, что сумма чиселъ, которыя при выбранной единицѣ выражаютъ измѣренія его поверхности и объема, равна суммѣ чиселъ, выражающихъ поверхность перваго шара и объемъ втораго шара, но такого соотношенія не будетъ, если перемѣнимъ линейную единицу.

Уравненіе (7) не можетъ удовлетвориться измѣреніями этихъ линій, если единицу длины будемъ измѣнять произвольно, хотя бы онѣ и удовлетворяли отдѣльно уравненіямъ (5) и (6).

При рѣшеніи геометрическихъ задачъ, никогда не дѣлаютъ комбинацій изъ уравненій подобныхъ предъидущему. Уравненія, которыя непосредственно даютъ теоремы элементарной геометріи, однородны; и когда два уравненія складываемъ почленно, для того чтобы получить ур. болѣе простое, нежели одно изъ данныхъ уравненій, необходимо чтобы слагаемыя уравненія были одной степени. Слѣдовательно по правилу однородности всегда можно повѣрить сдѣланныя алгебраическія преобразованія.

Если за единицу длины возьмемъ одну изъ линій фигуры, то уравненія не будутъ однородны; но ихъ легко снова сдѣлать однородными. Пусть

$$(8)\,F(b', c', \ldots)=0,$$

будетъ ур., которое мы получимъ, взявъ за единицу линію A; буквы b', c'... означаютъ величины линій B, C,... относительно A. Возьмемъ произвольную единицу и чрезъ a, b, c,... назовемъ величины линій A, B, C,..., относительно этой единицы; тогда получимъ

$$\frac{1}{a}=\frac{b'}{b}=\frac{c'}{c}=\ldots,$$

откуда

$$b'=\frac{b}{a},\ c'=\frac{c}{a},\ldots,$$

и уравненіе (8) обратится въ однородное уравненіе:

$$(9)\ \mathrm{F}\left(\frac{b}{a}, \frac{c}{a}, \ldots\right) = 0.$$

Такъ, напримѣръ, если стороны прямаго угла въ прямоугольномъ треугольникѣ измѣрить гипотенузою, взятою за единицу, то величины сторонъ будутъ удовлетворять неоднородному уравненію

$$b'^2 + c'^2 = 1,$$

изъ котораго получается однородное

$$\frac{b^2}{a^2} + \frac{c^2}{a^2} = 1, \text{ или } b^2 + c^2 = a^2,$$

замѣнивъ b' чрезъ $\frac{b}{a}$ и c' чрезъ $\frac{c}{a}$.

Всѣ кривыя, эллипсъ, гипербола, парабола, циссоида и т. д. выражаются однородными уравненіями. Какое-нибудь однородное уравненіе

$$f(x, y, a, b, c, \ldots) = 0,$$

между перемѣнными координатами x и y точки плоскости и величинами $a, b, c\ldots.$ различныхъ данныхъ прямыхъ, опредѣляетъ кривую, положеніе и размѣръ которой не зависятъ отъ единицы мѣры. Разсмотримъ, наоборотъ, численное уравненіе между x и y

$$f(x, y) = 0,$$

т. е. уравненіе, которое содержитъ только буквы x и y, и положимъ, что это уравненіе неоднородно. Чтобы дѣйствительные корни этого ур. выразить точками плоскости, надобно выбрать сначала произвольно масштабъ или прямую и взять ее за единицу. Когда масштабъ измѣняется, кривая не остается тою же; ниже мы увидимъ, что различныя кривыя, получаемыя такимъ образомъ, имѣютъ замѣчательную аналогію, эти кривыя называются кривыми *сходственными*.

44. *Замѣчаніе I.* Часто случается, что въ одномъ и томъ же вопросѣ разсматриваются числа, выражающія измѣренія линій, поверхностей и объемовъ; единицы поверхности и объема, точно такъ же, какъ линейная единица, остаются неопредѣленными; но обыкновенно полагаютъ, что между ними существуетъ такое отношеніе, что единица поверхности есть квадратъ, построенный на единицѣ длины, а единица объема есть кубъ, построенный на той же прямой. Въ этомъ случаѣ, чтобы удовлетворить однородности отношенія, въ которомъ извѣстныя буквы S и V означаютъ

поверхность и объемъ, замѣнимъ эти буквы чрезъ p^2 и q^3, означая чрезъ p и q стороны квадрата или куба, равновеликихъ разсматриваемой поверхности или объема; такимъ образомъ уравненіе будетъ содержать только линіи. Можно также такого внесенія не дѣлать; тогда въ вычисленіи степени каждаго члена надобно удвоить показатели буквъ, означающихъ поверхности, а показатели буквъ, означающихъ объемы, утроить.

Замѣчаніе II. Вообще, когда входятъ углы въ вычисленіе, эти углы измѣряются совершенно опредѣленною единицею, и величины ихъ выразятся извѣстными числами. Чтобы опредѣлить уголъ, надо описать изъ его вершины, какъ центра, произвольнымъ радіусомъ дугу круга и взять отношеніе этой дуги къ радіусу, а это приводится къ тому, чтобы за единицу угла взять тотъ уголъ, въ которомъ дуга равна радіусу. Тригонометрическія функціи угловъ точно также суть числа. Слѣдовательно, въ приложеніи правилъ однородности не надобно обращать вниманія на буквы, которыя означаютъ углы или ихъ тригонометрическія функціи.

Построенія формулъ.

45. Рѣшивъ, если будетъ возможно, уравненія опредѣленной задачи, получимъ формулы, показывающія ариѳметическія дѣйствія, которыя надо совершить надъ числами, которыми измѣряются извѣстныя величины, чтобы получить численныя величины неизвѣстныхъ. Но не будетъ ли возможно изъ каждой формулы или даже изъ каждаго уравненія вывести графическое построеніе, которое бы давало не численную величину неизвѣстнаго, но самое неизвѣстное? То есть, возможно ли ариѳметическія дѣйствія замѣнить дѣйствіями графическими? Въ элементарной геометріи разсматриваются только тѣ построенія, которыя могутъ быть произведены лишь съ помощію ограниченнаго числа прямыхъ линій и круговъ и которыя, слѣдовательно, можно сдѣлать помощію линейки и циркуля. Такъ какъ кругъ есть самая простая кривая, и ее легко получить, то у древнихъ геометровъ такого рода построенія имѣли большое значеніе; съ другой стороны, не зная алгебраическаго анализа, они не имѣли способовъ рѣшить вопросъ, и только послѣ нѣсколькихъ безполезныхъ попытокъ, должны были прибѣгать къ другимъ кривымъ. Ихъ изысканія сдѣлали извѣстными нѣкоторыя задачи, которыя, какъ въ настоящее время доказано, не могутъ быть рѣшены посредствомъ прямой линіи и круга. Такъ напр., задачи объ удвоеніи куба и раздѣленіи угла на три части и т. д.

Положимъ, что неизвѣстная есть прямая линія; когда неизвѣстное есть поверхность или объемъ, тогда его представляютъ черезъ ax или a^2x, гдѣ a есть произвольно взятая линія; построеніе линіи x даетъ прямоугольникъ или параллелепипедъ, равновеликій искомой поверхности или объему. Опредѣленіе даннаго угла по одной изъ его тригонометрической линіи приводится также къ опредѣленію прямой. Положимъ еще, что всѣ буквы, какъ напримѣръ x, означаютъ прямыя линіи.

46. *Раціональная формула.* Формула, которая опредѣляетъ неизвѣстное x, должна быть однородна и первой степени; сверхъ этого она можетъ быть цѣлою, раціональною или ирраціональною. Если она цѣлая, то имѣетъ видъ

$$x = a - b + c \ldots,$$

и линію x мы получимъ, откладывая въ томъ и другомъ направленіи линіи a, b, c,...

Простѣйшій видъ дробной формулы есть

$$x = \frac{ab}{c}.$$

Неизвѣстная есть четвертая пропорціональная, которую построимъ помощію двухъ параллельныхъ или помощію круга.

Точно также построимъ формулу

$$x = \frac{abcd}{a'b'c'} \text{ или } x = \frac{a}{a'} \times \frac{b}{b'} \times \frac{cd}{c'}$$

помощію ряда четвертыхъ пропорціональныхъ

$$\gamma = \frac{cd}{c}, \quad \beta = \frac{b\gamma}{b'}, \quad x = \frac{a\beta}{a'}.$$

Съ помощію предъидущаго построенія, одночленъ $\frac{abc \ldots ghi \ldots l}{a'b'c' \ldots g'}$ m-ой степени приведется къ виду $\alpha i \ldots l$, или къ виду $\lambda^{m-1}t$, гдѣ λ есть какая-нибудь линія, а t линія, опредѣляемая изъ формулы

$$t = \frac{\alpha i \ldots l}{\lambda^{m-1}}.$$

Разсмотримъ теперь формулу

$$x = \frac{A - B + C}{A' + B' - C'},$$

въ которой A, B, C означаютъ одночлены $m+1$-ой степени, а A', B', C' одночлены m-ой степени. Прежде всего каждый изъ этихъ многочленовъ приводится къ болѣе простѣйшему виду

$$\lambda^m a,\ \lambda^m b,\ \lambda^m c,\ldots,\ \lambda^{m-1}a',\ \lambda^{m-1}b'\ \lambda^{m-1}c',$$

и тогда мы получимъ

$$x=\frac{\lambda(a-b+c)}{a'+b'-c'}=\frac{\lambda\alpha}{\beta}.$$

Потомъ опредѣляемъ неизвѣстное x, какъ четвертое пропорціональное между линіями β, α, γ.

Если дробь будетъ m-ой степени, то предъидущія дѣйствія приведутся къ виду

$$\lambda^{m-1}\frac{\lambda\alpha}{\beta}=\lambda^{m-1}t$$

47. *Ирраціональная формула второй степени.* Возьмемъ прежде формулу

$$x=\sqrt{ab} \text{ или } \frac{a}{x}=\frac{x}{b}$$

Неизвѣстное x есть среднее пропорціальное между линіями a и b, которое мы получимъ посредствомъ прямоугольнаго треугольника или посредствомъ касательной къ кругу.

Когда изъ раціональной функціи извлекается корень m-ой степени, ее приводятъ къ виду

$$\sqrt{\lambda^{m-1}t}=\sqrt{\lambda^{m-2}\lambda t}=\overline{\lambda^2 u}^{\,m-2}.$$

Разсмотримъ теперь ирраціональную формулу второй степени, въ которой положимъ, что количества, соединенныя знакомъ $+$ или $-$, однородны и одной степени. Для большей ясности мы представимъ, что величина x приведена къ виду

$$x=\frac{N}{D},$$

гдѣ N и D означаютъ функціи, въ которыя не входитъ ни знакъ дѣленія, ни дробный, ни отрицательный показатель; можно допустить также, что въ нихъ не входятъ ни произведенія двухъ радикаловъ, ни произведенія радикала на цѣлое количество. Чтобы получить величину числителя N,

надобно выполнить извѣстныя дѣйствія въ опредѣленномъ порядкѣ: первый радикалъ стоитъ надъ цѣлымъ выраженіемъ, его можно привести къ виду $\lambda^{\frac{m}{2}}u$; если эту величину надо придать къ другимъ, то ихъ приводятъ къ одному виду, а слѣд. также ихъ сумму. Новый радикалъ можно теперь поставить или надъ цѣлымъ количествомъ, или надъ количествомъ, имѣющимъ показателя $\frac{m}{2}$, гдѣ m есть нечетное. Во всѣхъ случаяхъ радикалъ приводятъ къ виду $\lambda^{\frac{m}{4}}v$; этотъ членъ прибавляютъ къ другимъ того же вида и такъ далѣе. Такимъ образомъ видно, что числитель N принимаетъ видъ $\lambda^{\frac{p}{2^i}}t$. То же самое будетъ съ знаменателемъ D; такъ какъ неизвѣстное x есть первой степени, то его найдемъ какъ четвертую пропорціональную.

Гипотезы, которыя мы сдѣлали относительно составленія формулы, необходимы, чтобы она была однородна.

Такимъ образомъ, *всякое однородное выраженіе первой степени; составленное какимъ нибудь-образомъ посредствомъ знаковъ простыхъ дѣйствій, сложенія, вычитанія, умноженія, дѣленія, возвышенія въ цѣлую степень, извлеченія квадратнаго корня, однимъ словомъ, всякое ирраціональное выраженіе второй степени можетъ быть построено посредствомъ ограниченнаго числа прямыхъ линій и круговъ.*

Доказывается также, что только выраженія такого рода можно построить такимъ образомъ; но это доказательство здѣсь нельзя помѣстить. Такъ, напримѣръ, сторона x двойнаго куба другаго, сторона котораго есть a, и которая выражается формулою

$$x = \sqrt[3]{2a^3},$$

не можетъ быть найдена линейкою и циркулемъ.

То же самое бываетъ съ корнями уравненій третьей и четвертой степени, потому что въ выраженія этихъ корней входятъ кубическіе радикалы.

48. *Построеніе корней квадратнаго уравненія.* Квадратное уравненіе съ однимъ неизвѣстнымъ приводится къ виду $x^2 + px + q = 0$. Чтобы оно было однородно, надобно, чтобы количество p было первой степени, а q второй. Если эти количества будутъ раціональныя или ирраціональныя второй степени, то можно построить линію a, равную первой, и квадратъ b^2, равновеликій второму, и уравненіе второй степени представится въ одномъ изъ четырехъ видовъ

$$x^2 + ax + b^2 = 0,$$
$$x^2 + ax - b^2 = 0,$$
$$x^2 - ax + b^2 = 0,$$
$$x^2 - ax - b^2 = 0.$$

Корни перваго и втораго уравненія равны корнямъ третьяго и четвертаго, взятымъ съ противными знаками; слѣдоват., достаточно разсматривать эти; но если мы ихъ представимъ въ видѣ

$$x(a - x) = b^2, \quad x(x - a) = b^2,$$

то увидимъ, что надобно построить прямоугольникъ, равновеликій квадрату b^2, и сумма или разность сторонъ котораго была бы равна данной линіи a,—задача, которая рѣшается въ элементарной геометріи.

Уравненія биквадратныя подобнымъ образомъ приводятся къ одной изъ группъ

$$x^4 + abx^2 - c^2d^2 = 0,$$
$$x^4 - abx^2 + c^2d^2 = 0,$$
$$x^4 - abx^2 - c^2d^2 = 0,$$

потому что безполезно разсматривать уравненія $x^4 + abx^2 + c^2d^2 = 0$, которые имѣютъ только мнимые корни. Если положимъ $x^2 = cz$, то эти уравненія примутъ видъ

$$z^2 + \frac{ab}{c}z - d^2 = 0, \quad z^2 - \frac{ab}{c}z + d^2 = 0, \quad z^2 - \frac{ab}{c}z - d^2 = 0.$$

Сперва, какъ было показано, опредѣляютъ корни z этихъ уравненій, потомъ находятъ x, какъ среднее пропорціанальное между c и z.

ГЛАВА IV.

Преобразованіе координатъ.

Если извѣстно уравненіе линіи относительно однѣхъ координатъ, то изъ него можно вывести уравненіе этой же линіи относительно другихъ координатъ.

Чтобы рѣшить этотъ вопросъ въ общемъ видѣ, надобно найти формулы, которыя выражали бы координаты какой-нибудь точки, взятыя отно-

сительно извѣстной системы координатъ посредствомъ координатъ той же точки, взятыхъ по другой системѣ. Эти формулы даже употребляются и въ другихъ вопросахъ.

Прежде мы займемся преобразованіемъ однѣхъ прямолинейныхъ координатъ въ другія прямолинейныя.

Перемѣщеніе начала координатъ.

49. Замѣнимъ оси OX и OY двумя другими осями O′X′ и O′Y′, соотвѣтственно имъ параллельными (*фиг.* 29) и имѣющими то же направленіе; тогда положеніе новыхъ осей опредѣлится координатами a и b новаго начала O′ относительно первоначальныхъ осей. Назовемъ черезъ x и y координаты какой-нибудь точки M относительно первыхъ осей; черезъ x', y' координаты той же точки относительно новыхъ осей. Представимъ себѣ, что происходитъ движеніе отъ точки O къ точкѣ M по прямой OM или по ломаной OO′M; проектируемъ эти двѣ линіи на ось OX. Проекція прямой OM, взятая съ приличнымъ знакомъ, есть абсцисса x точки M; проекція прямой OO′ есть абсцисса a точки O′; проекція прямой O′M на OX или на параллельную ей O′X′ есть новая абсцисса x'. Такъ какъ проекціи двухъ линій равны между собою, то получимъ $x = a + x'$. Проектируя эти линіи на ось OY, получимъ $y = b + y'$. Такимъ образомъ получимъ два уравненія

Фиг. 29.

$$x = a + x', \quad y = b + y', \tag{1}$$

выражающія соотношенія между прежними и новыми координатами точки M. Эти соотношенія будутъ справедливы для всякаго положенія точки M въ плоскости. Изъ этихъ уравненій находимъ

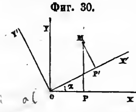
$$x' = x - a, \quad y' = y - b \tag{2}$$

Перемѣна направленія осей.

50. Положимъ теперь, что мы измѣняемъ направленіе осей, оставляя то же самое начало. Сначала мы разсмотримъ частный случай, который

часто встрѣчается въ практикѣ; именно, когда обѣ системы прямоугольныя.

Фиг. 30.



Представимъ себѣ, что прежнее направленіе осей мы измѣнили въ новое X'OY, повернувъ прямой уголъ XOY (*фиг.* 30) около начала координатъ на уголъ α, при этомъ уголъ α будемъ принимать за положительный, когда будемъ поворачивать отъ OX къ OY, и за отрицательный, когда будемъ поворачивать въ обратномъ направленіи.

Чрезъ какую-нибудь точку M проведемъ линіи MP и MP', параллельныя осямъ OY и OY'; означимъ черезъ x и y координаты точки M относительно прежнихъ осей, а черезъ x' и y' координаты этой же точки относительно новыхъ осей. Проекціи двухъ линій OPM, OP'M на какую нибудь ось равны. Проложимъ эти двѣ линіи на ось OX. Проекція линіи OP будетъ сама OP, взятая со знакомъ $+$ или $-$, смотря по тому, откладывается ли она по направленію OX или по противоположному направленію; во всякомъ случаѣ, это есть абсцисса x. Проекція же линіи PM равна нулю, потому что PM перпендикулярна къ OX. Такимъ образомъ проекція первой линіи на OX равна x. Проложимъ теперь ломаную линію OP'M; сначала проектируемъ линію OP'; если линію OP' отложимъ на OX', то ее надо умножить на $\cos\alpha$, и мы получимъ проекцію $OP' \times \cos\alpha$; если эту линію отложимъ въ обратномъ направленіи, то ее надо умножить на $\cos(\alpha+\pi)$; и мы получимъ $OP'_1 \cos(\alpha+\pi)$ или $-OP'_1 \times \cos\alpha$; но въ первомъ случаѣ $x' = OP'$, во второмъ $x' = -OP'$; такимъ образомъ проекція линіи OP' всегда выразится черезъ $x'\cos\alpha$. Разсмотримъ вторую линію P'M. Если она идетъ по направленію OY', то она съ OX составляетъ уголъ $\alpha+\frac{\pi}{2}$, и ея проекція будетъ $P'M \times \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$; если же она идетъ въ обратномъ направленіи, то она съ OX образуетъ уголъ $\alpha+\frac{\pi}{2}+\pi$, и ея проекція будетъ $-P'M_1 \cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$; но въ первомъ случаѣ $y' = P'M$, во второмъ $y' = -P'M$; такимъ образомъ проекція P'M всегда выразится черезъ $y'\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$. Слѣдовательно, проекція линіи OP'M будетъ $x'\cos\alpha + y'\cos\left(\alpha+\frac{\pi}{2}\right)$, или $x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$. Сравнивъ проекціи двухъ линій OPM, OP'M, получимъ $x = x'\cos\alpha - y'\sin\alpha$.

Проложимъ теперь обѣ линіи на ось OY. Проекція линіи OP равна нулю; проекція линіи PM, взятая съ приличнымъ знакомъ, равна y; такимъ образомъ проекція первой ломаной линіи равна y. Линіи OX′ и OY′ составляютъ съ OY углы $-\frac{\pi}{2}+\alpha$ и α; поэтому проекція второй линіи будетъ $x'\cos\left(-\frac{\pi}{2}+\alpha\right)+y'\cos\alpha$ или $x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$; сравнивъ эти двѣ проекціи получимъ $y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha$. Такимъ образомъ получимъ формулы

$$(3)\qquad x=x'\cos\alpha-y'\sin\alpha,\ y=x'\sin\alpha+y'\cos\alpha,$$

посредствомъ которыхъ прежнія координаты выражаются въ функціи новыхъ.

51. Займемся теперь общимъ вопросомъ. Пусть OX и OY будутъ двѣ какія нибудь оси, составляющія между собой уголъ θ; OX′ и OY′ двѣ новыя оси, направленіе которыхъ опредѣляется углами α и β, которые онѣ образуютъ съ OX (*фиг.* 31). Условимся углы α и β принимать за положительные, когда прямая описываетъ ихъ, обращаясь отъ OX къ OY; за отрицательные, когда прямая описываетъ ихъ, обращаясь въ обратномъ направленіи. Черезъ какую-нибудь точку M проведемъ прямыя MP и MP′, параллельныя осямъ OY и OY′. Чтобы получить x, проложимъ обѣ ломаныя линіи OPM, OP′M по направленію OH, перпендикулярному къ OY, и притомъ по такому, чтобы привести прямую, проходящую черезъ OY, въ положеніе OH, надо было повернуть отъ OY къ OX на уголъ $\frac{\pi}{2}$. Линія OX составляетъ съ OH уголъ $\frac{\pi}{2}-\theta$, а линія OY перпендикулярна къ OH; поэтому проекція первой линіи будетъ $x\sin\theta$. Линія OX′ образуетъ съ OH уголъ, равный углу HOX, сложенному съ угломъ XOX′, т. е. $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\alpha$; точно также линія OY′ составляетъ съ OH уголъ, равный $\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)+\beta$; слѣдовательно, проекція второй линіи будетъ

Фиг. 31.

$$x'\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\alpha\right)+y'\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta+\beta\right),$$

или

$$x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta);$$

откуда находитъ соотношеніе

$$x \sin\theta = x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta).$$

Чтобы получить y, проектируемъ двѣ линіи OPM, OP'M по направленію OK, перпендикулярному къ OX, и притомъ по такому, что если бы провести прямую, проходящую чрезъ OX въ положеніе OK, надо было повернуть отъ OX къ OY на уголъ $\frac{\pi}{2}$. Такъ какъ OX перпендикулярна къ OK, а OY съ этою прямою составляетъ уголъ $-\frac{\pi}{2} + \theta$, то проекція первой линіи будетъ $y \sin\theta$. Углы, образуемые линіями OX' и OY' съ линіею OK, равны угламъ, которые онѣ составляютъ съ OX, безъ угла $\frac{\pi}{2}$, т. е. $-\frac{\pi}{2} + \alpha$ и $-\frac{\pi}{2} + \beta$; поэтому проэкція второй линіи будетъ $x' \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \alpha\right) + y' \cos\left(-\frac{\pi}{2} + \beta\right)$, или $x \sin\alpha + y' \sin\beta$; откуда

$$y \sin\theta = x' \sin\alpha + y' \sin\beta.$$

Такимъ образомъ получаемъ двѣ формулы

$$(4) \quad \begin{cases} x = \dfrac{x' \sin(\theta - \alpha) + y' \sin(\theta - \beta)}{\sin\theta}, \\ y = \dfrac{x' \sin\alpha + y' \sin\beta}{\sin\theta}, \end{cases}$$

для преобразованія косоугольныхъ координатъ въ другія косоугольныя координаты.

Отсюда легко вывести формулы, служащія къ преобразованію новыхъ осей въ прежнія. Дѣйствительно, такъ какъ уголъ новыхъ осей есть $\beta - \alpha$; а оси OX и OY образуютъ съ OX' углы $-\alpha$ и $\theta - \alpha$, то въ предъидущихъ формулахъ надо θ замѣнить черезъ $\beta - \alpha$, α черезъ $-\alpha$, β черезъ $\theta - \alpha$; и мы получимъ

$$(5) \quad \begin{cases} x' = \dfrac{y \sin\beta + x \sin(\beta - \theta)}{\sin(\beta - \alpha)}, \\ y' = \dfrac{-x \sin\alpha + y \sin(\theta - \alpha)}{\sin(\beta - \alpha)}. \end{cases}$$

52. Изъ этихъ общихъ формулъ можно вывести формулы, которыя часто употребляются.

1-й. *Когда данныя оси прямоугольныя.* Въ этомъ случаѣ $\theta = \frac{\pi}{2}$, а поэтому формулы (4) обратятся въ

$$(6) \qquad \begin{cases} x = x' \cos \alpha + y' \cos \beta, \\ y = x' \sin \alpha + y' \sin \beta, \end{cases}$$

2-й. *Когда новыя оси прямоугольныя.* Положивъ въ формулахъ (4) $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, получимъ изъ формулъ (4)

$$(7) \qquad \begin{cases} x = \dfrac{x' \sin(\theta - \alpha) - y' \cos(\theta - \alpha)}{\sin \theta}, \\ y = \dfrac{x' \sin \alpha + y' \cos \alpha}{\sin \theta}. \end{cases}$$

Можно бы было положить также $\beta = \alpha - \frac{\pi}{2}$, но тогда надобно бы было перемѣнить направленіе оси OY', а слѣдовательно и знакъ при y' въ формулахъ (7).

3-й. *Когда обѣ системы осей прямоугольныя.* Если въ формулахъ (6) положимъ $\beta = \alpha + \frac{\pi}{2}$, то получимъ прежнія формулы (3),

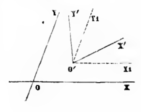
$$(3) \qquad \begin{cases} x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha \\ y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha. \end{cases}$$

Ихъ можно также получить, положивъ въ формулахъ (7) $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Общее преобразованіе.

53. Положимъ, что мы перемѣняемъ въ одно и то же время начало и направленіе осей. Система новыхъ осей опредѣляется координатами a и b новаго начала O' относительно прежнихъ осей, и углами α и β, которые новыя оси O'X' и O'Y' образуютъ съ осью OX (фиг. 32). Черезъ точку O' проведемъ двѣ оси $O'X_1$ и $O'Y_1$ параллельно OX и OY. Въ слѣдствіе перенесенія начала координатъ получимъ:

Фиг. 32.



$$x = a + x_1, \quad y = b + y_1;$$

въ слѣдствіе же перемѣны направленія осей найдемъ (формула 4)

$$x_1=\frac{x'\sin(\theta-\alpha)+y'\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta},\ y_1=\frac{x'\sin\alpha+y'\sin\beta}{\sin\theta};$$

отсюда находимъ общія формулы преобразованія

$$(8)\qquad \begin{cases} x=a+\dfrac{x'\sin(\theta-\alpha)+y'\sin(\theta-\beta)}{\sin\theta} \\ y=b+\dfrac{x'\sin\alpha+y'\sin\beta}{\sin\theta}. \end{cases}$$

Замѣтимъ, что прежнія координаты x и y выражаются функціями цѣлыми, первой степени, относительно новыхъ координатъ x' и y'.

Преобразованіе прямолинейныхъ координатъ въ полярныя.

54. Пусть OX и OY будутъ двѣ прямоугольныя оси; возьмемъ начало координатъ за полюсъ, а ось x-овъ за полярную ось (*фиг.* 33). Проектируя прямую OM на ось OX и на ось OY, получимъ

Фиг. 33.

$$(9)\qquad x=\rho\cos\omega,\ y=\rho\sin\omega.$$

Отсюда находимъ обратныя формулы

$$\rho=\sqrt{x^2+y^2},\ \operatorname{tang}\omega=\frac{y}{x},$$

служащія для преобразованія полярныхъ координатъ въ прямолинейныя.

Подобнаго рода преобразованія мы дѣлали нѣсколько разъ, находя уравненія циссоиды, Паскалевой улитки и четырехлепестнаго вѣнчика относительно прямолинейныхъ координатъ.

Разстояніе между двумя точками.

55. Возьмемъ сначала прямоугольныя оси и найдемъ разстояніе начала координатъ отъ точки M, координаты которой мы назовемъ черезъ x и y. Изъ прямоугольнаго треугольника OPM (*фиг.* 34), для всякаго положенія точки M въ плоскости, находимъ

Фиг. 34.

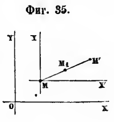
$$OM^2=OP^2+PM^2=x^2+y^2,$$

Отсюда, означивъ черезъ l разстояніе OM, получимъ

(10) $$l = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Найдемъ теперь разстояніе двухъ точекъ M и M′, находящихся гдѣ-нибудь въ плоскости. Означимъ черезъ x и y координаты точки M, и черезъ x' и y' координаты точки M′ относительно прямоугольныхъ осей OX, OY. Черезъ точку M (*фиг.* 35) проведемъ оси MX′, MY′ параллельно даннымъ осямъ; тогда координаты точки M′ относительно этихъ новыхъ осей будутъ $x' - x$, $y' - y$ (формула 2 § 49). Поэтому разстояніе l новаго начала M отъ точки M′ будетъ (формула 10),

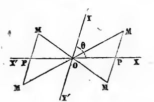
Фиг. 35.



(11) $$l = \sqrt{(x' - x)^2 + (y' - y)^2}.$$

56. До сихъ поръ мы разсматривали прямоугольныя оси. Если же оси будутъ косоугольныя и составляющія между собою уголъ θ, то формула, выражающая разстояніе между двумя точками, будетъ нѣсколько сложнѣе. Найдемъ сперва разстояніе начала координатъ O отъ какой-нибудь точки M плоскости. Изъ треугольника OPM (*фиг.* 36) для всякаго положенія точки M, мы имѣемъ

Фиг. 36.



$$OM^2 = OP^2 + PM^2 - 2.OP.\,PM.\cos OPM.$$

Если точка M лежитъ въ углѣ YOX, то координаты ея x и y суть $+$ OP и $+$ PM, а уголъ OPM есть дополненіе угла θ; и мы получимъ

(12) $$l = \sqrt{x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta}.$$

Если же точка M находится въ углѣ Y′OX′, то координаты ея x и y суть $-$ OP и $-$ PM, и уголъ OPM есть дополненіе угла θ; такимъ образомъ, и въ этомъ случаѣ мы получаемъ ту же формулу (12). Когда же точка M лежитъ въ одномъ изъ угловъ YOX′, Y′OX, тогда уголъ OPM есть также дополненіе угла θ, но одна изъ ея координатъ будетъ положительная, другая отрицательная, такимъ образомъ и здѣсь мы снова получимъ ту же формулу (12). Слѣдовательно, эта формула есть общая,

Чтобы найти разстояніе двухъ точекъ M и M', проведемъ черезъ точку M двѣ оси, параллельныя первымъ; тогда найдемъ.

$$l = \sqrt{(x'-x)^2 + (y'-y)^2 + 2(x'-x)(y'-y)\cos\theta}. \tag{13}$$

57. Часто бываетъ необходимо опредѣлить координаты точки, дѣлящей въ данномъ отношеніи линію, которая соединяетъ двѣ данныя точки. Означимъ черезъ x и y, x' и y' координаты двухъ данныхъ точекъ M и M' (*фиг.* 37), а черезъ x_1 и y_1 означимъ координаты точки M_1, которая дѣлитъ прямую MM_1, такъ что $\frac{M_1M}{M_1M'} = \frac{m'}{m}$. Если перенесемъ оси въ точку M параллельно имъ самимъ, то координаты точекъ M' и M_1 относительно этихъ осей будутъ $x'-x$, $y'-y$ и x_1-x, y_1-y. Разности x_1-x и $x'-x$ или y_1-y и $y'-y$ имѣютъ одинаковые знаки; стало быть отношеніе ихъ равно $\frac{M_1M}{MM'}$ или $\frac{m'}{m+m'}$, слѣдовательно,

Фиг. 37.

$$\frac{x_1-x}{x'-x} = \frac{y_1-y}{y'-y} = \frac{m'}{m+m'};$$

откуда

$$x_1 = \frac{mx+m'x'}{m+m'},\quad y_1 = \frac{my+m'y'}{m+m'}.$$

Этотъ вопросъ можно вообще выразить слѣдующимъ образомъ: на прямой MM' найти такую точку, чтобы отношеніе ея разстояній отъ двухъ точекъ M и M' было равно отношенію m' къ m. Этотъ вопросъ имѣетъ два рѣшенія. Предъидущія формулы относятся къ тому случаю, когда M_1 находится между точекъ M и M'; но есть еще второе рѣшеніе; дѣйствительно, положивъ напримѣръ, что $m' < m$; можно найти на продолженіи прямой MM' такую точку M_2, лежащую выше точки M', что $\frac{M_2M}{M_2M'} = \frac{m'}{m}$. Означивъ черезъ x_2 и y_2 координаты этой точки, получимъ.

$$\frac{x_2-x}{x'-x} = \frac{y_2-y}{y'-y} = \frac{M_2M}{MM'} = \frac{m'}{m'-m};$$

эти формулы найдемъ изъ предъидущихъ, перемѣнивъ знакъ у одной изъ величинъ m и m'. Отсюда:

$$x_2 = \frac{m'x'-mx}{m'-m},\quad y_2 = \frac{m'y'-my}{m'-m}.$$

Если величины m и m' равны, то точка M_1 находится въ срединѣ MM', и координаты ея будутъ

$$x_1 = \frac{x+x'}{2},\ y_1 = \frac{y+y'}{2}.$$

Въ такомъ случаѣ точка M_2 удаляется въ безконечность.

Классификація линій.

58. Для изученія общихъ свойствъ плоскихъ линій, обыкновенно употребляются прямолинейныя координаты. Относительно этой системы линіи раздѣляются на классы слѣдующимъ образомъ. Во-первыхъ, линіи раздѣляются на *алгебраическія* и *трансцендентныя*, смотря по тому, выражаются ли онѣ алгебраическими или трансцендентными уравненіями. Уравненіе называется алгебраическимъ въ томъ случаѣ, когда координаты x и y входятъ въ него только съ знаками алгебраическихъ дѣйствій; но если одна изъ координатъ входитъ въ уравненіе подъ трансцендентнымъ знакомъ, какъ напр. въ видѣ синуса, логариѳма и т.д., то уравненіе называется трансцендентнымъ. Алгебраическія уравненія всегда можно представить въ цѣломъ видѣ, уничтоживъ радикалы и знаменателей.

Алгебраическія линіи, смотря по степени ихъ уравненій, раздѣляются на порядки. Линіями перваго порядка называются тѣ, которыя выражаются уравненіями первой степени относительно x и y; втораго порядка тѣ, которыя выражаются уравненіями второй степени, и т. д. Очевидно, что степень уравненія будетъ одна и та же, при всякомъ положеніи осей въ плоскости. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $f(x, y) = 0$ будетъ уравненіе линіи, относительно извѣстныхъ осей OX и OY; m степень этого уравненія, предполагая m цѣлымъ. Чтобы отнести эту линію къ другимъ осямъ O'Y' и O'X', надо въ ея уравненіе внести вмѣсто x и y величины по формуламъ (8) преобразованія координатъ. Такъ какъ эти формулы первой степени относительно координатъ x' и y', то и уравненіе, выраженное по x' и y', не можетъ быть степени высшей, нежели m. Это уравненіе не можетъ быть также степени меньшей, потому что при обратномъ преобразованіи степень увеличилась бы, что невозможно. Такимъ образомъ, преобразованное уравненіе должно быть одинаковой степени съ первоначальнымъ.

Порядокъ линіи показываетъ, во сколькихъ точкахъ эта линія пересѣкается прямою. Дѣйствительно, пусть m будетъ порядокъ линіи; $f(x, y) = 0$ будетъ ея уравнеіе, принимая сѣкущую прямую за ось x-овъ. Если въ этомъ

уравненіи сдѣлаемъ $y = 0$, то изъ полученнаго такимъ образомъ уравненія относительно x опредѣлятся абсциссы точекъ геометрическаго мѣста, ординаты которыхъ равны нулю, т. е. точки пересѣченія оси x съ этимъ геометрическимъ мѣстомъ. Когда первая часть уравненія не равна нулю, такъ какъ оно степени высшей нежели m, то ур. не имѣетъ болѣе m корней, а слѣдовательно, прямая имѣетъ по большей мѣрѣ m точекъ пересѣченія съ линіею. Если бы уравненіе удовлетворялось величинами x въ количествѣ большемъ, нежели m, то первая часть была бы равна нулю, и слѣдовательно цѣлая прямая составляла бы часть геометрическаго мѣста; въ этомъ случаѣ многочленъ $f(x, y)$, обращающійся въ нуль, когда положимъ въ немъ $y = 0$, будетъ содержать y общимъ множителемъ, и уравненіе $f(x, y) = 0$ разложится на два, изъ которыхъ одно $y = 0$ будетъ первой степени, другое $m - 1$ степени.

Изъ этого видно, что линіи перваго порядка суть прямыя линіи, потому что онѣ могутъ пересѣкаться прямою только въ одной точкѣ. Линіи втораго порядка могутъ пересѣкаться прямою только въ двухъ точкахъ; линіи третьяго порядка въ трехъ точкахъ. Такъ какъ кругъ, эллипсъ гипербола и парабола суть линіи втораго порядка (§§ 19, 23, 26), то онѣ могутъ пересѣкаться прямыми въ двухъ точкахъ. Циссоида и строфоида (§§ 29 и 32) суть третьяго порядка; онѣ могутъ пересѣкаться прямыми въ трехъ точкахъ.

Сначала мы разсмотримъ линіи перваго порядка, потомъ втораго, и наконецъ линіи, какого-нибудь порядка.

Если говорятъ, что цѣлое алгебраическое уравненіе m-ой степени выражаетъ кривую m-го порядка, то предполагаютъ, что первая часть не разлагается на произведеніе цѣлыхъ производителей; въ противномъ случаѣ уравненіе выразило бы двѣ или большее число линій низшаго порядка. Такъ напр., уравненіе второй степени, первая часть котораго состоитъ изъ произведенія двухъ цѣлый производителей первой степени, выражаетъ двѣ линіи перваго порядка, т. е. двѣ прямыя. Точно также уравненіе третьей степени можетъ выражать или три прямыя линіи, или линію втораго порядка и одну прямую. Въ слѣдствіе этого извѣстныя свойства линій m-го порядка относятся также и къ системѣ m прямыхъ, т. е. къ многоугольнику, имѣющему m сторонъ.

КНИГА ВТОРАЯ.

Прямая линія и кругъ.

ГЛАВА I.

Прямая линія.

Построеніе уравненія первой степени.

59. Общее уравненіе первой степени съ двумя перемѣнными x и y есть

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0. \tag{1}$$

Мы уже замѣтили, что линія, выражаемая этимъ уравненіемъ, можетъ пересѣкаться прямою только въ одной точкѣ. Мы докажемъ прямо, что это уравненіе выражаетъ прямую линію.

Коеффиціенты A и B въ одно и то же время не могутъ равняться нулю, потому что въ этомъ случаѣ необходимо, чтобы $\mathrm{C} = 0$, и тогда уравненіе обратится въ тожество. Но можетъ случиться, что одинъ изъ коеффиціентовъ будетъ нуль; если напр. коеффиціентъ A равенъ нулю, то ур. обратится въ $\mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0$ или $y = b$. Это уравненіе выражаетъ геометрическое мѣсто точки M, ордината которой MP, при всякой абсциссѣ OP, есть величина постоянная и равная b; это есть прямая G′G, параллельная оси OX (*фиг.* 38). Мы ее получимъ, отложивъ по оси OY, по ту или другую сторону отъ начала координатъ (смотря по знаку b) линію OB, равную b, и проведя черезъ точку B линію G′G, параллельную оси OX. Въ частномъ случаѣ ур. $y = 0$ представляетъ самую ось OX.

Фиг. 38.

Если коеффиціентъ B равенъ нулю, то ур. будетъ $\mathrm{A}x + \mathrm{C} = 0$ или $x = a$. Это уравненіе выражаетъ геометрическое мѣсто точки M, абсцисса

которой MQ, при всякой ординатѣ OQ, есть величина постоянная и равная a; это есть прямая H′H, параллельная оси OY (*фиг.* 39). Мы ее получимъ, отложивъ по оси OX въ ту или другую сторону отъ начала координатъ, смотря по знаку a, линію OA, равную a, и проведя черезъ точку A линію H′H, параллельную OY. Въ частномъ случаѣ ур. $x = 0$ выражаетъ ось OY.

Фиг. 39.



Если коеффиціентъ B неравенъ нулю, то, раздѣливъ на него все ур., получимъ

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B},$$

или

(2) $$y = ax + b,$$

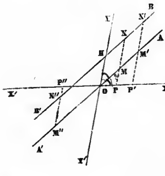
полагая для краткости $a = -\frac{A}{B}$, $b = -\frac{C}{B}$.

Разсмотримъ сперва частный случай, когда $b = 0$; тогда мы получимъ

$$y = ax, \text{ или } \frac{y}{x} = a.$$

Если a есть величина положительная, то отсюда заключаемъ, что всѣ точки геометрическаго мѣста имѣютъ координаты съ одинаковыми знаками, т. е. что онѣ расположены или въ углѣ YOX или въ противоположномъ углѣ Y′OX′ (*фиг.* 40). Возьмемъ какую-нибудь абсциссу OP и черезъ точку P проведемъ линію, параллельную оси y-овъ. Такъ какъ на этой линіи всегда можно найти такую точку M, что $\frac{MP}{OP} = a$, то точка M будетъ точкою геометрическаго мѣста. Пусть M, M′M″,... будутъ построенныя такимъ образомъ точки геометрическаго мѣста. Изъ равенства отношеній

Фиг. 40.



$$\frac{MP}{OP} = \frac{M'P'}{OP'} = \frac{-M''P''}{-OP''} = \ldots = a,$$

слѣдуетъ, что треугольники OPM, OP′M′, OP″M″,... подобны, и что, слѣдовательно, углы MOP, M′OP′, M″OP″... равны, и точки M, M′, M″,... находятся на одной прямой A′A, проходящей черезъ начало.

Если мы будемъ непрерывно измѣнять x отъ $-\infty$ до $+\infty$, то точка M будетъ двигаться непрерывно и опишетъ неопредѣленную прямую A′A.

Если a отрицательное, то это показываетъ, что всѣ точки геометрическаго мѣста имѣютъ координаты съ обратными знаками, т. е. что онѣ находятся въ углахъ Y′OX и YOX′ (*фиг.* 41). Пусть M, M′, M″,... будутъ такія точки геометрическаго мѣста; изъ отношеній

Фиг. 41.

$$\frac{MP}{-OP}=\frac{M'P'}{-OP'}=\frac{-M''P''}{OP''}=\ldots=a,$$

заключаемъ, какъ и прежде, что всѣ эти точки находятся на одной прямой A′A, проходящей черезъ начало. Такимъ образомъ во всѣхъ случаяхъ ур. $y=ax$ выражаетъ прямую A′A, проходящую черезъ начало координатъ.

Возвратимся теперь къ ур. $y=ax+b$. Сравнивая два уравненія $y=ax+b$ и $y=ax$, увидимъ, что ординаты, соотвѣтствующія одной и той же абсциссѣ, отличаются между собою постоянною величиною b; поэтому, увеличивая или уменьшая, смотря по знаку b, ординаты всѣхъ точекъ прямой A′A на величины MN, M′N′, M″N″,... равныя величинѣ b (*фиг.* 40), получимъ точки N, N′, N″,... которыя, очевидно, составятъ прямую B′B параллельную A′A.

Такимъ образомъ, изъ всего предъидущаго мы видимъ, *что всякое уравненіе первой степени, съ двумя перемѣнными x и y, выражаетъ прямую линію.*

60. Докажемъ теперь, наоборотъ: всякая прямая линія выражается уравненіемъ первой степени. Если прямая параллельна оси OX, то въ этомъ случаѣ всѣ ея точки имѣютъ одинаковую ординату, а, слѣдовательно, ея уравненіе будетъ $y=b$ (*фиг.* 38). Если она параллельна оси OY, то всѣ ея точки будутъ имѣть одинаковую абсциссу, и, слѣдовательно, ея ур. будетъ $x=a$ (*фиг.* 39). Если прямая проходитъ черезъ начало координатъ, то она будетъ находиться въ одномъ изъ двухъ положеній, показанныхъ на фиг. 40 и 41; тогда изъ подобныхъ треугольниковъ находимъ

$$\frac{MP}{OP}=\frac{M'P'}{OP'}=\frac{-M''P''}{-OP''}=\ldots$$

или

$$\frac{MP}{-OP}=\frac{MP'}{-OP'}=\frac{-M''P''}{OP''}=\ldots,$$

Если черезъ a назовемъ это постоянное отношеніе, то ур. прямой будетъ $\frac{y}{x}=a$ или $y=ax$. Положимъ, наконецъ, что прямая не параллельна ни одной изъ осей и не проходитъ черезъ начало координатъ (*фиг.* 40). Если черезъ начало проведемъ линію, параллельную этой прямой, то по предъидущему уравненіе ея будетъ $y=ax$; разность же между ординатой данной прямой и соотвѣтствующей ординатой параллельной линіи есть величина постоянная b; слѣдовательно, данная прямая выразится уравненіемъ $y=ax+b$.

Значеніе коеффиціентовъ.

61. Всякая прямая, непараллельная оси y-овъ, выражается уравненіемъ вида

$$y=ax+b.$$

Постоянное b означаетъ здѣсь ординату точки H (*фиг.* 40), въ которой прямая пересѣкаетъ ось y; эта ордината называется *ординатою въ началѣ координатъ*.

Постоянное a зависитъ только отъ направленія прямой; поэтому оно будетъ одно и то же для всѣхъ параллельныхъ прямыхъ; оно называется *угловымъ коеффиціентомъ* или *коеффиціентомъ направленія*. Проведемъ черезъ начало координатъ прямую OA параллельно данной прямой и притомъ съ той же стороны относительно оси XX', какъ прямая OY. Назовемъ уголъ осей черезъ θ, черезъ α уголъ, образуемый OA съ OX, который можетъ измѣниться отъ 0 до π. Изъ фигуры 40 находимъ

$$a=\frac{y}{x}=\frac{MP}{OP}=\frac{\sin MOP}{\sin OMP}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)},$$

и изъ фигуры 41,

$$a=\frac{y}{x}=\frac{MP}{-OP}=\frac{\sin MOP}{-\sin OMP}=\frac{\sin\alpha}{-\sin(\alpha-\theta)}=\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)};$$

слѣдовательно, во всѣхъ случаяхъ мы имѣемъ

(3) $$\frac{\sin\alpha}{\sin(\theta-\alpha)}=a.$$

Если оси перпендикулярны, то это отношеніе обратится въ

(4) $$\tan\alpha=a,$$

изъ котораго опредѣляется уголъ α, образуемый осью OX съ линіею OA.

Если же оси косоугольныя, то изъ ур. (3) получимъ

$$(5) \qquad \operatorname{tang} \alpha = \frac{a \sin \theta}{1 + a \cos \theta}.$$

Такъ какъ эта формула неудобна для вычисленія угла α помощію логариѳмовъ, то мы ее преобразуемъ слѣдующимъ образомъ. Мы знаемъ:

$$\frac{a-1}{a+1} = \frac{\sin \alpha - \sin(\theta - \alpha)}{\sin \alpha + \sin(\theta - \alpha)} = \frac{\operatorname{tang}\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right)}{\operatorname{tang} \frac{\theta}{2}};$$

откуда

$$(6) \qquad \operatorname{tang}\left(\alpha - \frac{\theta}{2}\right) = \frac{a-1}{a+1} \operatorname{tang} \frac{\theta}{2}.$$

62. Чтобы построить прямую, выражаемую уравненіемъ первой степени съ числовыми коеффиціентами, отыскиваемъ точки пересѣченія этой прямой съ осями и потомъ черезъ эти двѣ точки проводимъ прямую.

Возьмемъ, напримѣръ, ур. $2x - 3y = 5$. Чтобы найти координаты точки пересѣченія этой прямой съ каждой изъ осей, надобно въ ея уравненіи соотвѣтственно положить $y = 0$ и $x = 0$; въ слѣдствіе чего получимъ $x = \frac{5}{2}$, $y = -\frac{5}{3}$; потомъ, отложивъ отъ начала координатъ на оси абсциссъ по направленію OX линію, равную $\frac{5}{2}$; и на ординатъ по направленію OY′ линію, равную $\frac{5}{3}$, получимъ искомыя точки пересѣченія.

Если же уравненіе не содержитъ постояннаго члена, то это показываетъ, что прямая проходитъ черезъ начало; въ этомъ случаѣ другая точка ея опредѣлится, когда x дадимъ произвольную величину. Возьмемъ, напримѣръ, уравненіе $2y + 3x = 0$; при $x = 0$, $y = 0$; слѣдовательно, прямая проходитъ черезъ начало; если положимъ $x = 2$, то $y = -3$; построивъ точку, координаты которой суть $x = 2$, $y = -3$, получимъ вторую точку; а линія, соединяющая эту точку съ началомъ, будетъ искомою прямою.

63. Общее уравненіе прямой линіи

$$Ax + By + C = 0$$

содержитъ два коеффиціента или два произвольные *параметра*, потому что, раздѣливъ уравненіе на одинъ изъ коеффиціентовъ, получимъ отно-

шеніе двухъ другихъ коеффиціентовъ къ этому третьему. Когда уравненіе имѣетъ видъ $y = ax + b$, параметры будутъ a и b. Чтобы опредѣлить положеніе прямой линіи въ плоскости, надо дать величины двумъ параметрамъ или двумъ отношеніямъ этихъ параметровъ, которые опредѣляютъ ихъ величины.

Задача I.

64. *Найти общее уравненіе прямыхъ, проходящихъ черезъ данную точку.*

Назовемъ черезъ x' и y' координаты данной точки M. Уравненіе всякой прямой есть

$$y = ax + b.$$

Чтобы эта прямая проходила черезъ точку M, надобно, чтобы координаты этой точки удовлетворяли уравненію прямой; слѣдовательно, если перемѣнныя координаты x и y замѣнимъ координатами x' и y' точки M, то получимъ условное уравненіе

$$y' = ax' + b.$$

Изъ этого уравненія опредѣляется одинъ изъ параметровъ a и b въ функціи другаго; напримѣръ параметръ b въ функціи a; замѣнивъ въ уравненіи прямой b его величиною $y' - ax'$, найденною изъ условнаго уравненія, получимъ

$$y - y' = a\ (x - x'). \tag{7}$$

Это уравненіе, въ которомъ угловой коеффиціентъ a остается произвольнымъ, выражаетъ всѣ прямыя, проходящія черезъ точку M. Поэтому если a измѣняется, прямая будетъ обращаться около точки M.

Мы сказали, что всякая прямая выражается уравненіемъ вида $y = ax + b$, какое бы ни было ея положеніе въ плоскости; но есть исключеніе, именно, когда прямая параллельна оси y, потому что въ этомъ случаѣ угловой коеффиціентъ a равенъ безконечности, точно также и ордината въ началѣ b. Въ такомъ случаѣ, замѣнивъ въ уравненіи (7) a отношеніемъ $\frac{m}{n}$, найдемъ

$$n\ (y - y') = m\ (x - x');$$

положивъ здѣсь $n=0$, получимъ ур. $x=x'$, выражающее линію, параллельную оси y и проведенную черезъ точку M.

Задача II.

65. *Черезъ данную точку провести прямую, параллельную данной прямой.*

Пусть $y=ax+b$ будетъ уравненіе данной прямой AB, а x' и y' координаты данной точки M (*фиг.* 42). Такъ какъ искомая прямая должна проходить черезъ данную точку, то ея уравненіе, какъ мы видѣли, будетъ

Фиг. 42.

$$y-y'=a'(x-x').$$

Эта прямая, по условію, должна быть параллельна прямой AB, поэтому угловой коеффиціентъ ея a' долженъ быть равенъ угловому коеффиціенту a прямой AB; слѣдовательно, искомая параллельная CD выразится уравненіемъ

$$y-y'=a(x-x').$$

Задача III.

66. *Провести прямую черезъ двѣ данныя точки.*

Пусть M и M′ (*фиг.* 43) будутъ двѣ данныя точки; x' и y' координаты точки M; x'' и y'' координаты точки M′. Такъ какъ прямая MM′ должна проходить черезъ точку M, то ея уравненіе будетъ

Фиг. 43.

(7) $$y-y'=a(x-x').$$

Остается теперь опредѣлить коеффиціентъ a такъ, чтобы эта прямая проходила также черезъ точку M′. Для этого необходимо, чтобы координаты точки M′ удовлетворяли ур. (7), и мы получимъ

$$y''-y'=a(x''-x'),$$

откуда

$$a=\frac{y''-y'}{x''-x'},$$

то есть: угловой коеффиціентъ прямой MM′ равенъ разности ординатъ двухъ данныхъ точекъ, раздѣленной на разность абсциссъ этихъ же точекъ,

Замѣнивъ въ ур. (7) a его величиною, получимъ уравненіе прямой MM′,

(8) $$y - y' = \frac{y'' - y'}{x'' - x'}\,(x - x'),$$

которое можно представить въ видѣ

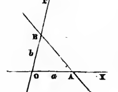
$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'}.$$

Если точка M находится въ началѣ координатъ, то $x' = 0$, $y' = 0$, и ур. (8) въ этомъ случаѣ получитъ видъ:

$$y = \frac{y''}{x''}\,x.$$

67. Часто случается, что прямая опредѣляется точками A и B, въ которыхъ она пересѣкаетъ оси (*фиг.* 44). Назовемъ черезъ a абсциссу первой точки, b ординату второй, и пусть

Фиг. 44.



$$Ax + By + C = 0$$

будетъ уравненіе искомой прямой. Если въ этомъ уравненіи послѣдовательно положимъ $y = 0$ и $x = 0$, то получимъ точки, въ которыхъ прямая пересѣкаетъ оси; въ слѣдствіе чего найдемъ $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$; откуда $A = -\frac{C}{a}$ $B = -\frac{C}{b}$. Замѣнивъ A и B ихъ величинами, получимъ

(9) $$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1.$$

Задача IV.

68. *Найти точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ.*

Пусть

$$Ax + By + C = 0$$
$$A'x + B'y + C' = 0$$

будутъ уравненія двухъ данныхъ прямыхъ AB и CD (*фиг.* 45), и M точка пересѣченія этихъ двухъ прямыхъ. Такъ какъ точка M принадлежитъ каждой прямой, то ея координаты должны въ одно и то же время удовлетворять двумъ уравненіямъ; слѣдовательно, рѣшивъ эти два уравненія съ двумя неизвѣстными, получимъ координаты точки M.

Фиг. 45.

$$x = \frac{BC' - CB'}{AB' - BA'},\ y = \frac{CA' - AC'}{AB' - BA'}.$$

Если знаменатель $AB' - BA'$ не равенъ нулю, то x и y будутъ имѣть величины конечныя и опредѣленныя, и обѣ прямыя дѣйствительно пересѣкутся въ точкѣ M. Но если знаменатель равенъ нулю, а числители не равны нулю, то x и y будутъ величины безконечныя; это показываетъ, что двѣ данныя прямыя параллельны и дѣйствительно въ этомъ случаѣ угловые ихъ коэффиціенты равны: $-\frac{A}{B} = -\frac{A'}{B'}$. Въ томъ же случаѣ, когда $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} \gtrless \frac{C'}{C}$, числители и знаменатели будутъ равны нулю, и величины x и y представятся въ видѣ $\frac{0}{0}$. Эта неопредѣленность показываетъ, что обѣ данныя прямыя сливаются; дѣйствительно, если положимъ $\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C} = k$, откуда $A' = Ak$, $B' = Bk$, $C' = Ck$, внесемъ эти величины во второе уравненіе и потомъ раздѣлимъ его на k, то оно будетъ тожественно съ первымъ.

Задача V.

69. *Найти общее уравненіе прямыхъ, проходящихъ черезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ.*

Пусть

(10) $$Ax + By + C = 0$$
(11) $$A'x + B'y + C' = 0$$

будутъ уравненія двухъ данныхъ прямыхъ. Этотъ вопросъ можно рѣшить слѣдующимъ образомъ. Изъ ур. (10) и (11) опредѣлимъ координаты точки пересѣченія двухъ прямыхъ и потомъ черезъ эту точку проведемъ (§ 64) какую-нибудь прямую. Но этотъ вопросъ можно рѣшить гораздо скорѣе.

Умноживъ одно изъ ур. (10) и (11) на произвольную величину λ и сложивъ ихъ, получимъ уравненіе первой степени

(12) $$(Ax + By + C) + \lambda\ (A'x + B'y + C') = 0,$$

которое выражаетъ третью прямую, проходящую черезъ точку пересѣченія двухъ первыхъ. Дѣйствительно, такъ какъ координаты этой точки въ одно и то же время удовлетворяютъ двумъ уравненіямъ (10) и (11), то

они обращаютъ въ нуль и величины, находящіяся въ скобкахъ, а, слѣдовательно, удовлетворяютъ уравненіе (12). Уравненіе (12) выражаетъ всѣ прямыя, проходящія черезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ, такъ какъ коеффиціентъ λ остается произвольнымъ; этотъ коеффиціентъ можно опредѣлить напримѣръ изъ условія, чтобы прямая проходила черезъ какую-нибудь точку M плоскости, координаты которой суть x' и y'; для этого необходимо, чтобы удовлетворялось уравненіе

$$(Ax' + By' + C) + \lambda\,(A'x' + B'y' + C') = 0;$$

отсюда

$$\lambda = -\frac{Ax' + By' + C}{A'x' + B'y' + C'}. \tag{13}$$

Положивъ въ ур. (12) $\lambda = 0$, получимъ $Ax + By + C = 0$; это есть первая линія. Если λ замѣнимъ черезъ $\frac{m}{n}$ и потомъ, умноживъ на n, положимъ $n = 0$, получимъ вторую прямую $A'x + B'y + C' = 0$.

Замѣнивъ въ ур. (12) λ его величиною (13), получимъ ур.

$$\frac{Ax + By + C}{Ax' + By' + C} = \frac{A'x + B'y + C'}{A'x' + B'y' + C'}, \tag{14}$$

которое выражаетъ прямую, проходящую черезъ точку M и точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ. Въ этомъ уравненіи числители суть первыя части уравненій двухъ данныхъ прямыхъ; знаменатели же суть тѣ же многочлены, только въ нихъ x и y замѣнены координатами данной точки. При взглядѣ на это уравненіе прямо видно, что прямая, выражаемая имъ, проходитъ черезъ данную точку и точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ.

Уравненіе первой степени относительно x и y, содержащее произвольный параметръ λ, выражаетъ безконечное число прямыхъ; если этотъ параметръ входитъ въ уравненіе только въ первой степени, то ур. можно представить въ видѣ (12); тогда увидимъ, что всѣ прямыя проходятъ черезъ одну и ту же точку, точку пересѣченія прямыхъ (10) и (11).

Задача VI.

70. *Узнать, находятся ли три точки на прямой линіи.*

Пусть M, M′, M″ будутъ три данныя точки; x' и y' координаты первой точки, x'', y'' координаты второй; x''', y''' координаты третьей (*фиг.* 46).

Фиг. 46.

Угловые коеффиціенты прямыхъ MM′, MM″ суть $\frac{y''-y'}{x''-x'}$, $\frac{y'''-y'}{x'''-x'}$ (§. 66). Если три точки M, M′ M″ находятся на прямой линіи, то прямыя MM′, MM″ сливаются, а слѣдовательно угловые коеффиціенты ихъ равны:

$$\frac{y''-y'}{x''-x'}=\frac{y'''-y'}{x'''-x'}. \tag{15}$$

Задача VII.

71. *Узнать, проходятъ ли три прямыя черезъ одну и ту же точку.*

Пусть

$$Ax+By+C=0,$$
$$A'x+B'y+C'=0,$$
$$A''x+B''y+C''=0,$$

будутъ уравненія трехъ данныхъ прямыхъ. Сперва найдемъ точку пересѣченія двухъ первыхъ прямыхъ и потомъ координаты этой точки внесемъ въ третье уравненіе.

Этотъ вопросъ можно рѣшить также другимъ способомъ.

Уравненіе

$$(A+\lambda A')x+(B+\lambda B')y+(C+\lambda C')=0$$

выражаетъ всѣ прямыя, проходящія черезъ точку пересѣченія двухъ первыхъ прямыхъ (§ 69); если третья прямая проходитъ черезъ эту точку, то надо опредѣлить параметръ R такъ, чтобы предъидущія уравненія выражали эту третью прямую. Для того, чтобы два уравненія выражали одну и ту же прямую, необходимо, чтобы коеффиціенты были пропорціональны: такимъ образомъ получили два соотношенія

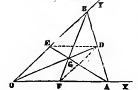
$$\frac{A+\lambda A'}{A''}=\frac{B+\lambda B'}{B''}=\frac{C+\lambda C'}{C''}$$

съ однимъ неизвѣстнымъ λ. Исключивъ его, получимъ условное уравненіе.

72. Разсмотримъ, напримѣръ, въ треугольникѣ OAB три линіи, соединяющія средины сторонъ съ вершинами противоположныхъ угловъ

(*фиг.* 47). Возьмемъ вершину O за начало координатъ, стороны OA и OB за оси и черезъ a и b означимъ стороны OA и OB. Линія AE, пересѣкающая оси на разстояніяхъ a и $\frac{b}{2}$ отъ начала, выразится уравненіемъ

Фиг. 47.



$$\frac{x}{a}+\frac{2y}{b}=1;$$

точно также уравненіе линіи BF будетъ

$$\frac{2x}{a}+\frac{y}{b}=1.$$

Координаты точки D, средины AB, суть $OF=\frac{a}{2}$, $OE=\frac{b}{2}$; поэтому уравненіе прямой OD, идущей отъ начала координатъ къ этой точкѣ, будетъ

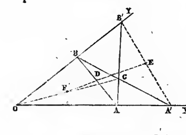
$$y=\frac{b}{a}\,x.$$

Рѣшивъ первыя два уравненія, получимъ координаты $x=\frac{a}{3}$, $y=\frac{b}{3}$ точки пересѣченія G двухъ первыхъ линій AE и BF. Эти координаты удовлетворяютъ третьему; отсюда заключаемъ, что третья линія также проходитъ черезъ точку G.

Что эти три линіи проходятъ черезъ одну точку, видно прямо изъ того, что если первыя два уравненія вычтемъ одноизъ другаго, то получимъ третье.

73. Примѣромъ трехъ точекъ, лежащихъ на прямой линіи, служитъ четыреугольникъ OACB (*фиг.* 48). Если четыре стороны продолжимъ неопредѣленно, то составится такъ называемый дополнительный четыреугольникъ; стороны, пересѣкаясь по двѣ, образуютъ шесть точекъ, или вершинъ; соединивъ противоположныя вершины, получимъ три діагонали AB, A′B′ OC. Мы докажемъ, что три точки D, E, F, которыя дѣлятъ эти діагонали пополамъ, лежатъ на одной прямой.

Фиг. 48.



емъ стороны OA и OB за оси координатъ; черезъ a и a' озна- A и OA′; черезъ b и b' линію OB и OB′. Координаты

точки D, средины AB, будутъ $x' = \frac{a}{2}$, $y' = \frac{b}{2}$; координаты точки E, средины $A'B'$, будутъ $x'' = \frac{a'}{2}$, $y'' = \frac{b'}{2}$. Чтобы найти координаты точки F, средины OC, отыщемъ сначала координаты точки C, пересѣченія двухъ прямыхъ AB', $A'B$, уравненія которыхъ суть

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b'} = 1, \quad \frac{x}{a'} + \frac{y}{b} = 1.$$

Рѣшивъ эти два уравненія, получимъ координаты точки C

$$x = \frac{aa'(b-b')}{ab-a'b'}, \quad y = \frac{bb'(a-a')}{ab-a'b'}.$$

Такъ какъ точка F есть средина прямой OC, то координаты ея x''', y''' будутъ половины координатъ точки C; слѣдовательно,

$$x''' = \frac{aa'(b-b')}{2(ab-a'b')}, \quad y''' = \frac{bb'(a-a')}{2(ab-a'b')}.$$

Найдя координаты точекъ D, E, F, увидимъ легко, что три точки находятся на одной прямой. Дѣйствительно, такъ какъ угловые коэффиціенты прямыхъ DE и DF:

$$\frac{y''-y'}{x''-x'} = \frac{b'-b}{a'-a}, \quad \frac{y'''-y'}{x'''-x'} = \frac{\frac{bb'(a-a')}{ab-a'b'} - b}{\frac{aa'(b-b')}{ab-a'b'} - a} = \frac{b'-b}{a'-a};$$

равны между собой, то заключаемъ, что три точки D, E, F находятся на одной прямой.

Задача VIII.

74. *Опредѣлить уголъ, образуемый двумя прямыми.*

Пусть $y = ax + b$, $y = a'x + b'$ будутъ уравненія двухъ данныхъ прямыхъ. Черезъ начало координатъ проведемъ прямыя OA и OA′, параллельныя даннымъ прямымъ (*фиг.* 49); назовемъ черезъ α и α' углы, образуемые этими линіями съ OX, черезъ V уголъ, который онѣ составляютъ между собой. Чтобы опредѣлить этотъ уголъ, положимъ $\alpha' > \alpha$. Въ такомъ случаѣ очевидно, что $V = \alpha' - \alpha$, откуда

Фиг. 49.

$$\text{tang } V = \frac{\text{tang } \alpha' - \text{tang } \alpha}{1 + \text{tang } \alpha \text{ tang } \alpha'}.$$

Если оси прямоугольныя, то, какъ извѣстно,

$$\operatorname{tang} \alpha = a,\ \operatorname{tang} \alpha' = a';$$

внеся эти величины въ предъидущую формулу, получимъ

$$(16)\qquad \operatorname{tang} V = \frac{a' - a}{1 + aa'}.$$

Если оси косоугольныя, то (§ 61)

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{a \sin \theta}{1 + a \cos \theta},\quad \operatorname{tang} \alpha' = \frac{a' \sin \theta}{1 + a' \cos \theta},$$

и слѣдовательно,

$$(17)\qquad \operatorname{tang} V = \frac{(a' - a) \sin \theta}{1 + aa' + (a + a') \cos \theta}.$$

Изъ этихъ формулъ находимъ зависимость, существующую между угловыми коеффиціентами двухъ прямыхъ, перпендикулярныхъ между собой. Дѣйствительно, когда уголъ V прямой, тангенсъ его равенъ безконечности, и если оси прямоугольныя, то получимъ

$$(18)\qquad 1 + aa' = 0;$$

если же оси косоугольныя, то

$$(19)\qquad 1 + aa' + (a + a') \cos \theta = 0.$$

Задача IX.

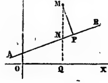
75. *Изъ данной точки опустить на данную прямую перпендикуляръ и найти длину этого перпендикуляра.*

Пусть

$$(2)\qquad y = ax + b$$

будетъ ур. данной прямой AB; x' и y' координаты данной точки M (*фиг.* 50). Возьмемъ прямоугольныя оси. Всякая прямая, проходящая черезъ точку M, выражается уравненіемъ (§ 64)

Фиг. 50.



$$y - y' = a'(x - x').$$

Чтобы эта прямая была перпендикулярна къ прямой AB, необходимо удовлетворить условію (§ 74) $1 + aa' = 0$, откуда $a' = -\frac{1}{a}$. Замѣнивъ a' его величиною, получимъ уравненіе перпендикуляра MP

(20) $$y - y' = -\frac{1}{a}(x - x').$$

Координаты x и y основанія P перпендикуляра или точки пересѣченія двухъ прямыхъ AB и MP мы найдемъ, рѣшивъ два ур. (2) и (20); но лучше опредѣлимъ самыя разности $x - x'$ и $y - y'$. Уравненіе (2) можно представить въ видѣ

$$y - y' = a(x - x') - (y' - ax' - b);$$

если въ этомъ уравненіи $y - y'$ замѣнимъ величиною изъ ур. (20), то получимъ

$$x - x' = \frac{a(y' - ax' - b)}{1 + a^2},$$

и, въ слѣдствіе уравненія (20),

$$y - y' = -\frac{y' - ax' - b}{1 + a^2}.$$

Прилагая сюда формулу, выражающую разстоянія двухъ точекъ (§ 55), получимъ длину l перпендикуляра MP,

$$l = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = \sqrt{\frac{(y' - ax' - b)^2(1 + a^2)}{(1 + a^2)^2}},$$

откуда

(21) $$l = \pm\frac{y' - ax' - b}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

Знакъ надо выбирать такъ, чтобы l была величина положительная. Очевидно, что числитель будетъ положительный или отрицательный, смотря по тому будетъ ли точка M находиться относительно прямой AB со стороны положительной оси y-овъ или со стороны отрицательной. Дѣйствительно, пусть N будетъ точка, въ которой прямая AB пересѣкаетъ линію, проведенную параллельно оси y-овъ черезъ точку M; такъ какъ точка N находится на прямой AB, то ордината y_1 этой точки равна $ax' + b$, и формула (21) обратится въ

$$l = \pm\frac{y' - y_1}{\sqrt{1 + a_2}}.$$

Разность $y' - y_1$ въ первомъ случаѣ положительна, во второмъ отрицательна.

Длину перпендикуляра можно опредѣлить прямо изъ прямоугольнаго треугольника MNP.

$$MP = MN \sin MNP = \pm (y' - y_1) \cos \alpha = \pm \frac{y' - y_1}{\sqrt{1 + a^2}}.$$

76. Возьмемъ теперь косоугольныя оси. Прямыя AB и MP будутъ перпендикулярны тогда, когда угловые ихъ коеффиціенты a и a' удовлетворяютъ условію $1 + aa' + (a + a') \cos \theta = 0$, откуда $a' = -\frac{1 + a \cos \theta}{a + \cos \theta}$. Слѣдовательно, уравненіе перпендикуляра MP будетъ

(22) $$y - y' = -\frac{1 + a \cos \theta}{a + \cos a}(x - x').$$

Рѣшивъ два уравненія (2) и (22), получимъ координаты x и y точки P; но если, какъ и прежде, опредѣлимъ разности $x - x'$, $y - y'$, то найдемъ

$$x - x' = \frac{(y' - ax' - b)(a + \cos \theta)}{1 + a^2 + 2a \cos \theta}$$

$$y - y' = -\frac{(y' - ax' - b)(1 + \cos \theta)}{1 + a^2 + 2a \cos \theta};$$

внеся эти разности въ формулу, выражающую разстояніе двухъ точекъ (§ 56)

$$l = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + 2(x - x')(y - y') \cos \theta},$$

получимъ

$$l = \frac{\pm (y' - ax' - b)\sqrt{(a + \cos \theta)^2 + (1 + a \cos \theta)^2 - 2(a + \cos \theta)(1 + a \cos \theta) \cos \theta}}{1 + 2a \cos \theta + a^2},$$

Раскрывъ скобки, увидимъ, что величина, находящаяся подъ корнемъ, имѣетъ множителемъ $1 - \cos^2 \theta$; и ее можно написать такъ

$$(1 + 2a \cos \theta + a^2) \sin^2 \theta;$$

слѣдовательно,

(23) $$l = \pm \frac{(y' - ax' - b) \sin \theta}{\sqrt{1 + 2a \cos \theta + a^2}}.$$

Числитель будетъ положительнымъ или отрицательнымъ, смотря по тому, находится ли точка M относительно прямой AB со стороны положительной оси y-овъ или, со стороны отрицательной. Знакъ выбираютъ всегда такъ, чтобы l было положительное.

77. Во всѣхъ предъидущихъ случаяхъ мы предполагали, что уравненіе

данной прямой имѣетъ видъ $y = ax + b$. Если это ур. будетъ имѣть общій видъ

(1) $$Ax + By + C = 0,$$

то угловой коеффиціентъ a данной прямой будетъ равенъ $-\frac{A}{B}$, и принимая прямоугольныя оси координатъ, получимъ $a' = -\frac{1}{a} = \frac{B}{A}$, и перпендикуляръ, опущенный изъ точки M, выразится уравненіемъ

$$y - y' = \frac{B}{A}(x - x'),$$

или

(24) $$\frac{x - x'}{A} = \frac{y - y'}{B}.$$

Если въ формулѣ (21) замѣнимъ a и b ихъ величинами $-\frac{A}{B}$, $-\frac{C}{B}$, то получимъ

(25) $$l = \pm \frac{Ax' + By' + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Эта формула выражаетъ разстояніе точки отъ прямой въ прямоугольныхъ координатахъ: числитель въ этой формулѣ есть первая часть уравненія прямой, въ которомъ x и y замѣнены координатами точки; знаменатель есть квадратный корень изъ суммы квадратовъ коеффиціентовъ при x и y.

Если оси косоугольныя, то

$$a' = \frac{B - A\cos\theta}{A - B\cos\theta},$$

и уравненіе перпендикуляра будетъ

(26) $$\frac{x - x'}{A - B\cos\theta} = \frac{y - y'}{B - A\cos\theta},$$

а формула (23) обратится въ

(27) $$l = \pm \frac{(Ax' + By' + C)\sin\theta}{\sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\theta}}.$$

Знакъ числителя надо брать, смотря по положенію точки M относительно прямой AB. Пусть N (*фиг.* 50) будетъ точка, въ которой линія NQ, параллельная оси y-овъ, пересѣкаетъ прямую AB; для точки N выраженіе $Ax + By + C$ равно нулю; когда коеффиціентъ B положительный и если мы двигаемся по направленію y положительнаго, то членъ By

увеличивается, и функція принимаетъ положительныя, все большія и большія величины; если идемъ въ противоположномъ направленіи, то она принимаетъ отрицательныя величины. Если B будетъ отрицательно, то заключеніе будетъ обратное.

Задача X.

78. *Черезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ провести прямую, перпендикулярную къ данной прямой.*

Пусть

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ A'x + B'y + C' &= 0, \\ A''x + B''y + C'' &= 0, \end{aligned}$$

будутъ уравненія трехъ прямыхъ въ прямоугольныхъ координатахъ. Всякая прямая, проходящая черезъ точку пересѣченія двухъ первыхъ прямыхъ, выражается уравненіемъ вида

$$(Ax + By + C) + \lambda\,(A'x + B'y + C') = 0.$$

Чтобы эта линія была перпендикулярна къ третьей, необходимо, чтобы

$$1 + \frac{A''\,(A + \lambda A')}{B''\,(B + \lambda B')} = 0;$$

откуда

$$\lambda = -\frac{AA'' + BB''}{A'A'' + B'B''};$$

замѣнивъ λ его величиною, получимъ уравненіе искомой прямой

$$(28)\; (A'A'' + B'B'')\,(Ax + By + C) = (A''A + B''B)\,(A'x + B'y + C').$$

79. Три данныя прямыя образуютъ треугольникъ, вершины котораго суть точки пересѣченія этихъ прямыхъ; уравненіе же (28) выражаетъ перпендикуляръ, опущенный изъ одной вершины на противоположную сторону. Перемѣняя различнымъ образомъ значки, получимъ уравненія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ каждой вершины на противоположную сторону,

$$\begin{aligned} (A''A + B''B)\,(A'x + B'y + C') &= (AA' + BB')\,(A''x + B''y + C''), \\ (AA' + BB')\,(A''x + B''y + C'') &= (A'A'' + B'B'')\,(Ax + By + C). \end{aligned}$$

Очевидно, что если мы сложимъ первыя два уравненія, то получимъ третье. Отсюда заключимъ, что три высоты треугольника проходятъ черезъ одну точку.

Задача XI.

80. *Найти геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ двухъ данныхъ точекъ.*

Возьмемъ прямоугольныя оси, и пусть x' и y', x'' и y'' будутъ координаты двухъ данныхъ точекъ. Если черезъ x и y означимъ координаты какой-нибудь точки геометрическаго мѣста, то уравненіе геометрическаго мѣста будетъ

$$(x - x')^2 + (y - y')^2 = (x - x'')^2 + (y - y'')^2,$$

или

$$(29) \qquad (x'' - x')\left(x - \frac{x' + x''}{2}\right) + (y'' - y')\left(y - \frac{y' + y''}{2}\right) = 0.$$

Это геометрическое мѣсто есть прямая, перпендикулярная въ срединѣ прямой, соединяющей двѣ данныя точки.

Задача XII.

81. *Найти геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ двухъ данныхъ прямыхъ.*

Возьмемъ прямоугольныя оси; пусть

$$\begin{aligned} Ax + By + C &= 0, \\ A'x + B'y + C' &= 0, \end{aligned}$$

будутъ уравненіе двухъ данныхъ прямыхъ. Если черезъ x и y означимъ координаты какой-нибудь точки геометрическаго мѣста, то уравненіе геометрическаго мѣста будетъ

$$(30) \qquad \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \pm \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2 + B'^2}}.$$

Такъ какъ здѣсь двойной знакъ, то уравненіе это выражаетъ двѣ прямыя, раздѣляющія углы, образуемые двумя данными прямыми, пополамъ.

Уравненіе прямой линіи относительно полярныхъ координатъ.

82. Пусть O будетъ полюсъ и OX полярная ось. Положеніе прямой AB можно опредѣлить длиною a перпендикуляра OD, опущеннаго изъ полюса на эту прямую (*фиг.* 51), и угломъ α, который образуетъ этотъ перпендикуляръ съ полярною осью; этотъ уголъ можетъ измѣняться отъ 0 до 2π. Означимъ черезъ ρ и ω координаты какой-нибудь точки M прямой. Проектируя радіусъ векторъ OM на перпендикуляръ OD, получимъ

Фиг. 51.

(31) $$\rho \cos(\omega - \alpha) = a; \text{ или } \rho = \frac{a}{\cos(\omega - \alpha)},$$

Это уравненіе имѣетъ видъ

(32) $$\rho = \frac{C}{A\cos\omega + B\sin\omega}.$$

Обратно, всякое уравненіе такого вида выражаетъ прямую. Въ самомъ дѣлѣ, переходя къ прямолинейнымъ координатамъ, взявъ полярную ось за ось x-овъ и перпендикуляръ, проведенный изъ полюса, за ось y-овъ, уравненіе приметъ видъ $Ax + By = C$.

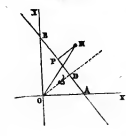
Другой видъ уравненія прямой.

83. Разложивъ уравненіе (31), получимъ

$$\rho\cos\omega\cos\alpha + \rho\sin\omega\sin\alpha = a,$$

или, взявъ прямоугольныя координаты,

)33) $$x\cos\alpha + y\sin\alpha - a = 0.$$



Фиг. 52.

Первая часть уравненія прямой, представленная въ такомъ видѣ, имѣетъ очень простое геометрическое значеніе. Разсмотримъ какую-нибудь точку M плоскости, полярныя координаты которой суть ρ и ω, а прямоугольныя суть x и y. Изъ этой точки опустимъ перпендикуляръ MP на прямую AB (*фиг.* 52). Проекція радіуса вектора OM на прямую OD есть $\rho\cos(\omega - \alpha)$; и эта проекція равна линіи OD, увеличен-

ной или уменьшенной на перпендикуляръ PM, смотря по тому, находятся ли точка M и начало O по разнымъ сторонамъ прямой или по одной. Такимъ образомъ, если черезъ p означимъ этотъ перпендикуляръ и возьмемъ его со знакомъ $+$ въ первомъ случаѣ и со знакомъ $-$ во второмъ, то получимъ

$$a + p = \rho \cos(\omega - \alpha) = x \cos \alpha + y \sin \alpha,$$

откуда
$$p = x \cos \alpha + y \sin \alpha - a.$$

Такимъ образомъ, первая часть уравненія (33) выражаетъ разстояніе, взятое съ приличнымъ знакомъ, какой-нибудь точки плоскости, координаты которой суть x и y, отъ прямой, выражаемой этимъ уравненіемъ. Отсюда легко опредѣлить координаты x_1 и y_1 основанія P перпендикуляра. Дѣйствительно, такъ какъ разности $x - x_1$, $y - y_1$ суть проекціи прямой PM на обѣ оси, то получимъ

$$x - x_1 = p \cos \alpha = (x \cos \alpha + y \sin \alpha - a) \cos \alpha,$$
$$y - y_1 = p \sin \alpha = (x \cos \alpha + y \sin \alpha - a) \sin \alpha.$$

Уравненіе прямой, представленное въ видѣ (33), очень часто употребляется во многихъ случаяхъ.

ГЛАВА II.

Кругъ.

84. Найдемъ прежде уравненіе круга въ прямоугольныхъ координатахъ. Означимъ черезъ a и b координаты центра C (*фиг.* 53) и черезъ r радіусъ. Такъ какъ окружность есть такое геометрическое мѣсто точекъ, разстояніе которыхъ отъ центра равно радіусу, то уравненіе ея будетъ

Фиг. 53.

(1) $$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2;$$

Раскрывъ скобки, это уравненіе можно представить подъ видомъ

(2) $$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0.$$

Такимъ образомъ, *уравненіе круга въ прямоугольныхъ координатахъ есть уравненіе второй степени, которое не содержитъ произведенія*

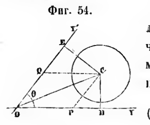
xy *перемѣнныхъ и въ которомъ члены* x^2 *и* y^2 *имѣютъ одинаковые коеффиціенты.*

85. Обратно, всякое уравненіе такого вида, относительно прямоугольныхъ координатъ, выражаетъ окружность круга. Дѣйствительно, уравненіе (2) можно написать такъ

$$\left(x+\frac{A}{2}\right)^2+\left(y+\frac{B}{2}\right)^2=\frac{A^2+B^2}{4}-C.$$

Если построимъ точку C, координаты которой суть $-\frac{A}{2}$ и $-\frac{B}{2}$; то первая часть представляетъ квадратъ разстоянія какой-нибудь точки M плоскости, координаты которой суть x и y, отъ точки C. Если вторая часть будетъ положительна, то уравненіе будетъ удовлетворяться координатами всѣхъ точекъ плоскости, разстояніе которыхъ отъ точки C равно $\sqrt{\frac{A^2+B^2}{4}-C}$; слѣдовательно, это уравненіе выражаетъ окружность круга. Если же вторая часть равна нулю, то разстояніе MC равно нулю, и точка M совпадетъ съ точкою C, а уравненіе удовлетворится только координатами этой точки; слѣдовательно, геометрическое мѣсто приводится къ одной точкѣ. Наконецъ, если вторая часть отрицательна, то уравненіе не можетъ быть удовлетворено координатами никакой точки плоскости, потому что квадратъ разстоянія точки M отъ точки C есть величина положительная; слѣдовательно, въ этомъ случаѣ уравненіе не выражаетъ никакого геометрическаго мѣста.

Фиг. 54.



86. Возьмемъ теперь косоугольныя оси, составляющія между собою уголъ θ (*фиг.* 54); выразивъ, что разстояніе какой-нибудь точки геометрическаго мѣста отъ центра равно радіусу, получимъ уравненіе окружности:

$$(3)\quad (x-a)^2+(y-b)^2+2(x-a)(y-b)\cos\theta=r^2.$$

Это ур. имѣетъ видъ

$$(4)\qquad x^2+y^2+2xy\cos\theta+Ax+By+C=0.$$

Итакъ, *уравненіе круга относительно косоугольныхъ координатъ есть уравненіе второй степени, въ которомъ члены* x^2 *и* y^2 *коеффиціентами имѣютъ 1, а членъ* xy *множится два раза на косинусъ угла осей.*

87. Обратно, всякое уравненіе такого вида выражаетъ окружность круга. Дѣйствительно, три постоянныя a, b, r^2 можно опредѣлить такъ, чтобы уравненія (3) и (4) были тожественны. Раскрывъ скобки уравненія (3), получимъ

$$x^2 + y^2 + 2xy\cos\theta - 2(a + b\cos\theta)x - 2(b + a\cos\theta)y + a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta - r^2 = 0.$$

Это уравненіе будетъ тожественно съ уравненіемъ (4), если положимъ

$$a + b\cos\theta = -\frac{A}{2},\ b + a\cos\theta = -\frac{B}{2},$$

$$a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta - r^2 = C.$$

Первыя два уравненія даютъ для a и b конечныя величины, потому что знаменатель $1 - \cos^2\theta$ или $\sin^2\theta$ не равенъ нулю. Третье уравненіе даетъ

$$r^2 = a^2 + b^2 + 2ab\cos\theta - C.$$

Построимъ точку C, координаты которой суть a и b. Первая часть уравненія (3) выразитъ квадратъ разстоянія точки C отъ какой-нибудь точки M плоскости, координаты которой суть x и y. Если для r^2 найдемъ величину положительную, то уравненіе будетъ удовлетворено координатами всѣхъ точекъ плоскости, находящихся отъ точки C на разстояніи r; слѣдовательно, оно выражаетъ окружность круга. Если величина r^2 будетъ равна нулю, то разстояніе MC будетъ равно нулю, и уравненіе удовлетворится только координатами точки C; слѣдовательно, оно выражаетъ одну точку. Наконецъ, если r^2 будетъ величина отрицательная, то уравненіе не будетъ удовлетворяться координатами никакой точки.

Вмѣсто того, чтобы опредѣлять центръ C помощію его координатъ a и b, гораздо проще опредѣлить его посредствомъ ортогональныхъ проекцій прямой OC на обѣ оси. Назовемъ черезъ a' и b' эти двѣ проекціи OD и OE (*фиг.* 54), взятыя съ приличными знаками, и выразимъ, что проекція прямой OC на ту или другую ось равна проекціи ломаной линіи OPC или OQC. Такимъ образомъ получимъ

$$a' = a + b\cos\theta,\ b' = b + a\cos\theta;$$

слѣдовательно, $a' = -\frac{A}{2}$, $b' = -\frac{B}{2}$.

Отложимъ на осяхъ отъ начала координатъ величины a' и b' и изъ

точекъ D и E возставимъ перпендикуляры къ осямъ; тогда пересѣченіе двухъ перпендикуляровъ и будетъ центръ C.

88. Уравненіе окружности круга, какъ мы видѣли, есть

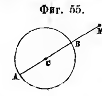
$$(5) \qquad (x - a)^2 + (y - b)^2 + 2\,(x - a)\,(y - b) \cos\theta - r^{\,2} = 0.$$

Первая часть этого уравненія имѣетъ слѣдующее геометрическое значеніе. Разсмотримъ точку M, координаты которой суть x и y. Выраженіе

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + 2\,(x - a)\,(y - b) \cos\theta$$

выражаетъ квадратъ прямой MC, которая соединяетъ точку M съ центромъ (*фиг.* 55); слѣдовательно, первая часть уравненія равна $MC^2 - r^2$, т. е. произведенію двухъ множителей $MC + r$ и $MC - r$, которые выражаютъ два отрѣзка MA и MB діаметра, проведеннаго черезъ точку M; эти отрѣзки будутъ имѣть одинаковые или разные знаки, смотря по тому, отложены ли они по одному или по противоположнымъ направленіямъ. Такимъ образомъ, первая часть уравненія (3) выражаетъ произведеніе двухъ отрѣзковъ какой-нибудь сѣкущей, проведенной черезъ точку M. Когда точка M находится внѣ круга, это произведеніе равно квадрату касательной.

Фиг. 55.



Задача I.

89. *Найти уравненіе касательной, проведенной къ какой нибудь кривой.*

Мы уже опредѣлили, что такое касательная, проведенная къ кривой въ точкѣ M (§ 27). Черезъ точку M и ближайшую къ ней точку M′, взятую на кривой, проведемъ сѣкущую MM′; положимъ, что точка M′ неопредѣленно приближается къ точкѣ M: тогда сѣкущая MM′, обращаясь около точки M, будетъ приближаться къ предѣльному положенію MT; эта прямая MT называется *касательною* къ кривой въ точкѣ M (*фиг.* 56).

Фиг. 56.

Пусть x и y будутъ координаты точки прикосновенія M; а $x + h$ и $y + k$ координаты ближайшей точки M′; угловой коэффиціентъ сѣкущей MM′ есть отношеніе разности ординатъ двухъ точекъ M и M′ къ разности ихъ абсциссъ, т. е. $\frac{k}{h}$. Когда точка M′ неопредѣленно приближается къ

точкѣ M, оба приращенія h и k приближаются къ нулю, а ихъ отношеніе $\frac{k}{h}$ къ предѣлу, который есть производная отъ ординаты, разсматриваемой какъ функція абсциссы. Если рѣшимъ уравненіе кривой относительно y и представимъ его въ видѣ $y = f(x)$, то угловой коеффиціентъ касательной будетъ $y' = f'(x)$. Когда же уравненіе кривой $f(x, y) = 0$ не рѣшено, тогда производную y' отъ неявной функціи y найдемъ изъ уравненія $f'_x + y' f'_y = 0$, въ которомъ f'_x и f'_y означаютъ частныя производныя отъ функціи $f(x, y)$, взятыя относительно x и относительно y. Отсюда

$$y' = -\frac{f'_x}{f'_y}. \tag{6}$$

Такимъ образомъ, если черезъ X и Y означимъ координаты какой-нибудь точки касательной, то ея уравненіе будетъ

$$Y - y = -\frac{f'_x}{f'_y}(X - x), \text{ или } (X - x) f'_x + (Y - y) f'_y = 0. \tag{7}$$

Задача II.

90. *Найти уравненіе касательной, проведенной къ кругу.*

Приложимъ предъидущую формулу къ кругу, и для простоты, положимъ, что оси прямоугольныя, и начало координатъ находится въ центрѣ круга. Уравненіе круга въ такомъ случаѣ будетъ

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0.$$

Опредѣливъ y, получимъ $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$; взявъ производную отъ этой функціи, найдемъ

$$y' = \frac{-x}{\pm\sqrt{r^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

Если же уравненія мы не рѣшимъ, то, прилагая формулу (6), получимъ ту же величину $y' = -\frac{x}{y}$. Такимъ образомъ уравненіе касательной будетъ

$$Y - y = -\frac{x}{y}(X - x), \text{ или } xX + yY = x^2 + y^2.$$

Такъ какъ точка M находится на кругѣ, то ея координаты удовле-

творяютъ уравненіе круга; и мы получимъ $x^2 + y^2 = r^2$; въ такомъ случаѣ, уравненіе касательной получаетъ болѣе простой видъ

$$xX + yY = r^2. \tag{8}$$

Такъ какъ угловой коэффиціентъ радіуса, идущаго отъ центра къ точкѣ прикосновенія, есть $\frac{y}{x}$, то отсюда видно, что касательная перпендикулярна къ этому радіусу.

Задача III.

91. *Провести касательную къ кругу черезъ точку P, лежащую внѣ круга.*

Уравненіе круга, относительно прямоугольныхъ осей, начало которыхъ находится въ центрѣ, есть

$$x^2 + y^2 = r^2. \tag{9}$$

Означимъ черезъ x_1 и y_1 координаты данной точки P (*фиг.* 57).

Фиг. 57.

Пусть MP будетъ касательная, проведенная черезъ эту точку; такимъ образомъ вопросъ приводится къ опредѣленію точки прикосновенія M. Означимъ черезъ x и y неизвѣстныя координаты этой точки. Такъ какъ точка M находится на кругѣ, то ея координаты удовлетворяютъ уравненію (9); слѣдовательно, касательная, проведенная къ точкѣ M, выразится уравненіемъ $xX + yY = r^2$. Такъ какъ касательная проходитъ черезъ точку P, то координаты этой точки должны удовлетворять ея уравненію; поэтому мы получимъ

$$xx_1 + yy_1 = r^2. \tag{10}$$

Рѣшивъ уравненіе (9) и (10), найдемъ величины неизвѣстныхъ x и y.

Очевидно, что рѣшить два уравненія (9) и (10), изъ которыхъ первое выражаетъ кругъ, а второе — прямую, значитъ найти точки пересѣченія этихъ двухъ линій, т. е. опредѣлить величины x и y, которыя удовлетворяли бы въ одно и то же время этимъ двумъ уравненіямъ, значитъ найти точки пересѣченія прямой съ кругомъ. Эта прямая, которая пересѣкаетъ кругъ въ двухъ точкахъ M и M′, называется прямою прикосно-

венія. Замѣтимъ, что уравненіе (10) прямой прикосновенія имѣетъ одинаковый видъ съ уравненіемъ (8) касательной; съ тою только разницею, что координаты точки прикосновенія замѣнены координатами точки P.

92. Извѣстно, что если имѣемъ два совмѣстныя уравненія

$$A = 0, \ B = 0$$

съ двумя неизвѣстными x и y, и если одно изъ нихъ замѣнимъ уравненіемъ $mA + nB = 0$, которое получимъ, когда оба уравненія умножимъ на произвольныя числа m и n и сложимъ ихъ, то получимъ новую систему уравненій

$$A = 0, \ mA + nB = 0,$$

которая одинакова съ данной системой. Геометрически это выражаетъ то, что точки пересѣченія двухъ линій, выражаемыхъ двумя данными уравненіями, суть точки пересѣченія одной изъ нихъ третьей линіей.

Мы сказали, что точки прикосновенія M и M′ опредѣляются пересѣченіемъ даннаго круга съ прямою прикосновеній. Вычтя почленно два уравненія (9) и (10), получимъ новое уравненіе

$$x^2 + y^2 - x_1 x - y_1 y = 0$$

или

$$\left(x - \frac{x_1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{y_1}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2 + y_1^2}{4},$$

которое можетъ замѣнить уравненіе (10). Это новое уравненіе выражаетъ кругъ; его центръ, координаты котораго суть $\frac{x_1}{2}$ и $\frac{y_1}{2}$, находится въ срединѣ прямой OP. Такъ какъ это уравненіе не содержитъ постояннаго члена, то это показываетъ, что кругъ проходитъ черезъ начало координатъ. Такимъ образомъ мы получаемъ кругъ, описанный на прямой OP, какъ на діаметрѣ; точки, въ которыхъ этотъ кругъ пересѣкаетъ данный кругъ, суть точки прикосновенія.

Задача IV.

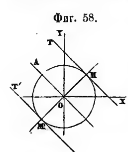
93. *Провести касательную параллельно данной прямой.*

Требуется провести касательную къ кругу

$$x^2 + y^2 = r^2. \qquad (9)$$

параллельно прямой $y = mx$, которая, положимъ, проходитъ черезъ начало координатъ (*фиг.* 58). Если черезъ x и y означимъ координаты точки прикосновенія M, то какъ извѣстно, угловой коеффиціентъ касательной будетъ $-\frac{x}{y}$. Чтобы касательная MT была параллельна данной прямой, необходимо, чтобы угловой ея коеффиціентъ былъ равенъ m; такимъ образомъ получимъ уравненіе $-\frac{x}{y} = m$, или

Фиг. 58.



(11) $$y = -\frac{1}{m}x.$$

Такъ какъ координаты точки M должны удовлетворять уравненію круга, то онѣ опредѣлятся двумя совмѣстными уравненіями (9) и (11), и слѣдовательно, точки прикосновенія M и M' опредѣлятся пересѣченіемъ круга съ прямой, выражаемой уравненіемъ (11); эта прямая MM' есть діаметръ, перпендикулярный къ данной прямой OA.

94. Этотъ вопросъ можно рѣшить иначе, и это дастъ намъ поводъ представить уравненіе касательной къ кругу въ новомъ видѣ. Найдемъ сперва точки пересѣченія круга $x^2 + y^2 = r^2$ съ какою-нибудь прямою $y = mx + k$. Исключивъ y, получимъ уравненіе второй степени $x^2 + (mx + k)^2 = r^2$, или

$$(m^2 + 1)x^2 + 2mkx + k^2 - r^2 = 0.$$

Если это уравненіе будетъ имѣть дѣйствительные корни, то кривая пересѣчетъ кругъ въ двухъ точкахъ, абсциссы которыхъ будутъ корни уравненія. Если корни будутъ равны между собой, то обѣ точки пересѣченія сольются, и сѣкущая обратится въ касательную къ кругу. Наконецъ, если корни будутъ мнимые, то прямая не пересѣчется съ кругомъ.

Такимъ образомъ, чтобы прямая была касательною къ кругу, мы имѣемъ условіе

$$m^2k^2 - (m^2 + 1)(k^2 - r^2) = 0, \text{ или } k^2 = r^2(m^2 + 1).$$

Замѣнивъ въ уравненіе прямой k его величиною, получимъ

(12) $$y = mx \pm r\sqrt{m^2 + 1}.$$

Это уравненіе, содержащее произвольный параметръ m, выражаетъ всѣ касательныя къ кругу.

Если направленіе касательной будетъ дано, т. е. угловой коеффиціентъ m будетъ извѣстенъ, то мы получимъ уравненія двухъ касательныхъ, параллельныхъ данному направленію.

Задача V.

95. *Найти геометрическое мѣсто точекъ, разстоянія которыхъ отъ двухъ опредѣленныхъ точекъ находятся между собою въ данномъ отношеніи.*

Пусть A и B будутъ двѣ данныя точки (*фиг.* 59). Прямую AB возьмемъ за ось x-овъ, а перпендикуляръ, возставленный изъ средины AB, за ось y-овъ. Если черезъ $2a$ назовемъ разстояніе AB, черезъ $\frac{m}{n}$ данное отношеніе, и если черезъ x и y назовемъ координаты какой-нибудь точки геометрическаго мѣста, то уравненіе его будетъ

Фиг. 59.

$$\frac{y^2 + (x + a)^2}{y^2 + (x - a)^2} = \frac{m^2}{n^2}$$

или

$$x^2 + y^2 - 2ax\,\frac{m^2 + n^2}{m^2 - n^2} + a^2 = 0. \tag{13}$$

Это есть кругъ, центръ котораго находится на оси x; а концы діаметра DE суть точки, которыя прямую AB дѣлятъ въ отношеніи m къ n.

Задача VI.

96. *Найти точки пересѣченія двухъ круговъ.*

Пусть

$$x^2 + y^2 + \mathrm{A}\,x + \mathrm{B}\,y + \mathrm{C} = 0, \tag{14}$$
$$x^2 + y^2 + \mathrm{A}'x + \mathrm{B}'y + \mathrm{C}' = 0, \tag{15}$$

будутъ уравненія двухъ круговъ относительно прямоугольныхъ координатъ. Точки пересѣченія опредѣлятся изъ этихъ двухъ уравненій. Второй кругъ можно замѣнить прямою

$$(\mathrm{A} - \mathrm{A}')\,x + (\mathrm{B} - \mathrm{B}')\,y + (\mathrm{C} - \mathrm{C}') = 0, \tag{16}$$

которое получимъ, вычтя эти уравненія одно изъ другаго; такимъ образомъ вопросъ приводится къ отыскиванію точекъ пересѣченія перваго круга съ этой прямой. Если прямая пересѣчетъ кругъ, то оба круга будутъ имѣть двѣ точки пересѣченія, и уравненіе (16) выразитъ общую сѣкущую. Если прямая будетъ касательная къ кругу, то обѣ точки пересѣченія сольются и оба круга будутъ касаться. Наконецъ, если прямая не пересѣкаетъ кругъ, то оба круга не будутъ имѣть общей точки.

Во всѣхъ этихъ случаяхъ уравненіе (16) имѣетъ замѣчательное геометрическое значеніе. Первыя части уравненій (14) и (15) выражаютъ (§ 88) произведенія отрѣзковъ сѣкущихъ, проведенныхъ изъ какой-нибудь точки M, координаты которой суть x и y, черезъ оба круга. Сравнивъ эти два выраженія, въ слѣдствіе чего уничтожатся члены второй степени, получимъ уравненіе (16); слѣдовательно, уравненіе (16) выражаетъ геометрическое мѣсто такихъ точекъ, что произведенія отрѣзковъ сѣкущихъ, проведенныхъ изъ каждой изъ нихъ къ тому и другому кругу, будутъ равны. Это геометрическое мѣсто есть прямая, которая называется *радикальноюосью* двухъ круговъ. Часть этой прямой, находящейся внѣ круговъ, есть геометрическое мѣсто такихъ точекъ, что касательныя, проведенныя изъ нихъ къ двумъ кругамъ, равны между собой. Очевидно, что *радикальныя* оси трехъ круговъ, взятыхъ по два, проходятъ черезъ одну и ту же точку; эта точка называется *радикальнымъ центромъ* трехъ круговъ.

Уравненіе круга относительно полярныхъ координатъ.

97. Пусть O будетъ полюсъ, а OX полярная ось (*фиг.* 60). Назовемъ черезъ a и α координаты центра C, черезъ r радіусъ, черезъ ρ и ω координаты какой-нибудь точки M окружности. Въ треугольникѣ OCM находимъ

Фиг. 60.

$$(17) \quad \rho^2 - 2a\rho\cos(\omega - \alpha) + a^2 - r^2 = 0.$$

Если полюсъ O находится на окружности, то $a = r$, то уравненіе приметъ видъ

$$(18) \qquad \rho = 2r\cos(\omega - \alpha).$$

Чтобы показать приложеніе этой формулы, разсмотримъ два пересѣкающіеся круга. Черезъ точку пересѣченія O проведемъ какую-нибудь

сѣкущую; эта сѣкущая пересѣкаетъ круги въ двухъ другихъ точкахъ M и M′; найдемъ геометрическое мѣсто средней точки прямой MM′. Если точку O возьмемъ за полюсъ, то оба круга выразятся уравненіями

$$\rho = 2r\cos(\omega - \alpha),\quad \rho = 2r'\cos(\omega - \alpha'),$$

откуда непосредственно получимъ уравненіе геометрическаго мѣста.

$$\rho = r\cos(\omega - \alpha) + r'\cos(\omega - \alpha');$$

это уравеніе можно представить въ видѣ

$$\rho - r_1\cos(\omega - \alpha_1);$$

такимъ образомъ, геометрическое мѣсто есть кругъ, проходящій черезъ точку пересѣченія O двухъ данныхъ круговъ.

ГЛАВА III.

Геометрическія мѣста.

98. Геометрическія мѣста опредѣляютъ различнымъ образомъ; или даютъ общее свойство каждой изъ точекъ геометрическаго мѣста, и выражая это свойство помощію алгебраическихъ знаковъ, получаемъ уравненіе геометрическаго мѣста. Такъ, напримѣръ, мы опредѣляемъ окружность круга, какъ геометрическое мѣсто точекъ, отстоящихъ отъ данной точки на опредѣленную величину; и представивъ это свойство общимъ для всѣхъ точекъ геометрическаго мѣста, мы получили уравненіе окружности (§ 84). Подобнымъ же образомъ мы нашли геометрическое мѣсто точекъ, разстояніе которыхъ отъ двухъ данныхъ точекъ находятся между собой въ данномъ отношеніи (§ 95); выразивъ это свойство, мы получили уравненіе геометрическаго мѣста. Точно также мы получили уравненіе перпендикуляра, возставленнаго изъ средины прямой, соединяющей двѣ данныя точки (§ 80), и уравненія линій, раздѣляющихъ углы, образуемые двумя данными прямыми, пополамъ (§ 81).

Но обыкновенно линію PQ (*фиг.* 61) опредѣляютъ движеніемъ точки въ плоскости; каждое изъ положеній движущейся точки M опредѣляется построеніемъ фигуры, различныя части которой зависятъ только отъ про-

извольнаго параметра a. Изъ этого видно, что обѣ координаты x и y точки M суть функціи этого перемѣннаго параметра a.

Пусть

$$x = f(a), \quad y = f_1(a),$$

будутъ такія двѣ функціи. Уравненіе геометрическаго мѣста, описаннаго точкою M, получимъ, исключивъ изъ этихъ двухъ уравненій параметръ a.

Каждую изъ точекъ геометрическаго мѣста геометрическое построеніе опредѣляетъ вообще пересѣченіемъ двухъ движущихся линій, которыя, слѣдовательно, зависятъ отъ параметра a; пусть

(1) $$F(x, y, a) = 0$$
(2) $$F_1(x\ y\ a) = 0$$

удутъ уравненія этихъ двухъ линій. Если этому параметру дадимъ частную величину, то получимъ двѣ линіи A и B, пересѣкающіяся въ одной точкѣ M, координаты которой x и y удовлетворяютъ двумъ совмѣстнымъ уравненіямъ (1) и (2). Если параметру дадимъ другую величину a', то обѣ линіи будутъ имѣть положенія A′ и B′, и точка пересѣченія будетъ въ M′. Третья величина a'' параметра дастъ двѣ линіи A″ и B″ и точку пересѣченія B″, и такъ далѣе. Положимъ, что параметръ a измѣняется непрерывно; тогда обѣ линіи A и B будутъ непрерывно перемѣщаться въ плоскости, и тогда пересѣченіе M опишетъ линію PQ. Уравненіе линіи PQ, т. е. уравненія геометрическаго мѣста точки M, мы получимъ, исключивъ изъ двухъ уравненій (1) и (2) параметръ a. Дѣйствительно, исключить a изъ двухъ уравненій (1) и (2) значитъ найти систему двухъ уравненій

Фиг. 61.

(3) $$F_2(x, y, a) = 0,$$
(4) $$f(x, y) = 0,$$

тожественную системѣ двухъ уравненій (1) и (2) и притомъ, чтобы въ одно изъ нихъ не входила буква a. Двѣ системы уравненій называются тожественными тогда, когда онѣ удовлетворяются однѣми и тѣми же произвольными величинами перемѣнныхъ. Если a дадимъ частную величину, то координаты x и y точки M, въ соединеніи съ этой величиною a, образуютъ систему величинъ трехъ количествъ x, y, a, которыя въ одно время удовлетворяютъ двумъ уравненіямъ (1) и (2). Такъ какъ система уравненій

(3) и (4) тожественна предъидущей, то эти величины удовлетворяютъ также уравненія (3) и (4); слѣдовательно уравненіе (4), которое не содержитъ a, удовлетворяется координатами одной какой-нибудь изъ точекъ геометрическаго мѣста,

Обратно, всякая точка M, координаты которой x и y удовлетворяютъ уравненію (4), принадлежитъ геометрическому мѣсту. Въ самомъ дѣлѣ, если опредѣлимъ величину a, удовлетворяющую уравненію (3), въ которомъ x и y имѣютъ предъидущія величины, то получимъ систему величинъ трехъ количествъ x, y, a, которыя удовлетворяютъ системѣ уравненій (3) и (4). Уравненія (1) и (2), будучи тожественны съ прежними, удовлетворятся однѣми и тѣми же величинами. Такимъ образомъ, получимъ двѣ линіи A и B, проходящія черезъ точку M.

Однако можетъ случиться, что системѣ дѣйствительныхъ величинъ x и y, которыя удовлетворяютъ уравненію (4), соотвѣтствуетъ величина a, при которой уравненія (1) и (2) не представляютъ дѣйствительныхъ линій. Это будетъ, напримѣръ, тогда, когда величина a будетъ мнимая. Но во всѣхъ случаяхъ величины x, y, a будутъ удовлетворять двумъ уравненіямъ (1) и (2).

99. Хотя построеніе каждаго положенія фигуры, которое опредѣляетъ различныя точки геометрическаго мѣста, зависитъ только отъ величины произвольнаго параметра, но часто бываетъ удобнѣе, ввести въ вычисленіе нѣсколько перемѣнныхъ параметровъ a, b, c, ...; но тогда эти параметры связаны между собою такимъ образомъ, что величина одного будетъ произвольна, и измѣненіе этого параметра опредѣляетъ, слѣдовательно, измѣненіе всѣхъ другихъ. Если число этихъ параметровъ будетъ n, то они будутъ связаны между собою $n-1$ условіями.

Положимъ сперва, что мы имѣемъ только два перемѣнные параметра a и b, связанные между собою условіемъ

$$\varphi(a,\ b) = 0, \tag{5}$$

и пусть

$$F(x,\ y,\ a,\ b) = 0, \tag{6}$$

$$F_1(x,\ y,\ a,\ b) = 0, \tag{7}$$

будутъ уравненія двухъ движущихся линій A и B, пересѣченіе которыхъ даетъ каждую точку геометрическаго мѣста. Если параметръ a мы будемъ измѣнять непрерывно, то параметръ b, который по условію (5) зависитъ отъ a, будетъ также измѣняться непрерывно; слѣдовательно, обѣ

линіи A и B, уравненія которыхъ содержатъ эти два параметра, будутъ также измѣняться непрерывно, и точка ихъ пересѣченія M опишетъ линію PQ.

Уравненіе этой линіи мы получимъ, исключивъ два параметра a и b изъ трехъ уравненій (5), (6), (7). Дѣйствительно, исключить a и b изъ этихъ трехъ уравненій значитъ найти систему трехъ уравненій

(8) $$F_2(x, y, a, b) = 0,$$
(9) $$F_3(x, y, a, b) = 0,$$
(10) $$f(x, y) = 0.$$

тожественную съ данной системой, и чтобы одно изъ нихъ не содержало болѣе a и b. Если a и b дадимъ величины, которыя удовлетворяли бы уравненію (5), то координаты x и y точки M, въ соединеніи съ этими величинами a и b, составятъ систему величинъ четырехъ количествъ x, y, a, b, удовлетворяющихъ въ одно время уравненіямъ (5), (6), (7). Три уравненія (8), (9), (10), будучи тождественны съ предъидущими уравненіями, будутъ также удовлетворяться тѣми же величинами; слѣдовательно, уравненіе (10), будучи независимо отъ a и b, удовлетворится координатами x и y каждой изъ точекъ геометрическаго мѣста. Обратно, всякая точка M, координаты которой x и y удовлетворяютъ уравненію (10), принадлежатъ геометрическому мѣсту. Въ самомъ дѣлѣ, если опредѣлимъ величины a и b, удовлетворяющія двумъ уравненіямъ (8) и (9), въ которыхъ x и y имѣютъ предъидущія величины, то получимъ систему величинъ четырехъ количествъ x, y, a, b, которыя удовлетворяютъ системѣ трехъ уравненій (8), (9), (10). Три уравненія (5), (6), (7), составляя систему тожественную съ этой, также удовлетворятся, и мы получимъ двѣ линіи A и B, проходящія черезъ точку M.

100. Положимъ, вообще, что мы имѣемъ n перемѣнныхъ параметровъ $a, b, c, \ldots . h$, связанныхъ между собой $n-1$ уравненіями

(11) $$\begin{cases} \varphi_1(a, b, c, \ldots . h) = 0, \\ \varphi_2(a, b, c, \ldots . h) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi_{n-1}(a, b, c, \ldots h) = 0, \end{cases}$$

и пусть

(12) $$F(x, y, a, b, c, \ldots ., h) = 0,$$
(13) $$F_1(x, y, a, b, c, \ldots ., h) = 0,$$

будутъ уравненія двухъ движущихся линій A и B, пересѣченіе которыхъ дастъ каждую точку геометрическаго мѣста. Когда параметръ a будемъ измѣнять, другіе параметры будутъ также измѣняться и точка M опишетъ геометрическое мѣсто. Уравненіе этого геометрическаго мѣста получимъ, исключивъ n параметровъ изъ $n+1$ уравненій (11), (12), (13).

101. Мы сказали, что построеніе фигуры зависитъ только отъ одного произвольнаго параметра a. Если фигура будетъ зависѣть отъ двухъ произвольныхъ параметровъ a и b, то обѣ координаты x и y точки M будутъ функціями этихъ двухъ параметровъ

$$x = f(a, b),\ y = f_1(a, b).$$

Этимъ параметрамъ можно дать такія величины, чтобы точка M совпала съ какою нибудь точкою плоскости, имѣющею координатами x_1 и y_1; для этого надобно опредѣлить a и b изъ двухъ уравненій

$$x_1 = f(a, b),\ y_1 = f_1(a, b).$$

Такимъ образомъ точка M опишетъ не опредѣленную линію въ плоскости, но цѣлую плоскость.

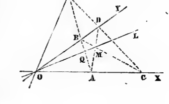
Отсюда видно, что въ томъ случаѣ, когда имѣемъ n перемѣнныхъ параметровъ, необходимо, чтобы эти n параметры были связаны между собою $n-1$ различными условіями; потому что, если будетъ можно привести эти уравненія къ меньшему числу, то два параметра, по крайней мѣрѣ, будутъ произвольны.

Можетъ случиться, что двѣ перемѣнныя линіи A и B пересѣкаются въ нѣсколькихъ точкахъ; въ такомъ случаѣ предъидущее вычисленіе опредѣляетъ геометрическое мѣсто, описанное совокупностію этихъ точекъ.

Задача I.

102. *Данъ уголъ XOY и точка P въ плоскости (фиг. 62); черезъ точку P проводимъ неподвижную сѣкущую PBA и сѣкущую движущуюся PDC, проводимъ прямыя AD, BC; найти геометрическое мѣсто точки ихъ пересѣченія M.*

Фиг. 62.



Возьмемъ прямыя OX и OY за оси координатъ, и черезъ x_1 и y_1 означимъ координаты точки P. Уравненіе неподвижной сѣкущей PBA будетъ

$$y - y_1 = a(x - x_1),$$

въ которомъ параметръ a имѣетъ постоянную

величину. Точно также движущаяся сѣкущаяся PDC выразится уравненіемъ

$$y - y_1 = m(x - x_1),$$

въ которомъ m означаетъ перемѣнный параметръ. Если въ каждомъ изъ этихъ уравненій послѣдовательно сдѣлаемъ $y = 0$, $x = 0$, то получимъ координаты точекъ, въ которыхъ эти прямыя пересѣкаются съ осями координатъ.

$$\text{A},\ y = 0,\ x = x_1 - \frac{y_1}{a},$$
$$\text{B},\ x = 0,\ y = y_1 - ax_1,$$
$$\text{C},\ y = 0,\ x = x_1 - \frac{y_1}{m},$$
$$\text{D},\ x = 0,\ y = y_1 - mx_1.$$

Прилагая сюда формулу § 67, получимъ уравненіе прямыхъ AD, BC,

(1) $$\frac{x}{x_1 - \frac{y_1}{a}} + \frac{y}{y_1 - mx_1} = 1,$$

(2) $$\frac{x}{x_1 - \frac{y_1}{m}} + \frac{y}{y_1 - ax_1} = 1.$$

Величины x и y, которыя удовлетворяютъ двумъ совмѣстнымъ уравненіямъ (1) и (2), суть координаты точки пересѣченія M двухъ прямыхъ AD и BC; эти координаты измѣняются вмѣстѣ съ произвольнымъ параметромъ m. Вычтя почленно эти оба уравненія, получимъ

$$x\left(\frac{m}{y_1 - mx_1} - \frac{a}{y_1 - ax_1}\right) + y\left(\frac{1}{y_1 - mx_1} - \frac{1}{y_1 - ax_1}\right) = 0,$$

или

(3) $$\frac{m - a}{(y_1 - mx_1)(y_1 - ax_1)}(y_1 x + x_1 y) = 0,$$

которое въ соединеніи съ уравненіемъ (1) составляетъ систему тождественную системѣ двухъ уравненій (1) и (2). Пока параметръ m имѣетъ величину различную отъ a, первый множитель не будетъ нуль; въ такомъ случаѣ координаты x и y точки M должны второй множитель обращать въ нуль. Такимъ образомъ, координаты каждой точки геометрическаго мѣста удовлетворяютъ уравненію

$$y_1 x + x_1 y = 0,$$

(3) $$\frac{y}{x} = -\frac{y_1}{x_1}.$$

Это геометрическое мѣсто есть прямая OL, проходящая черезъ начало.

Если $m = a$, то система двухъ уравненій (1) и (2) приводится къ уравненію (1); т. е. обѣ прямыя AD и BC совпадутъ, и точка ихъ пересѣченія будетъ какая-нибудь точка неподвижной сѣкущей PA.

Если мы исключимъ другимъ образомъ, напримѣръ, если бы величину m, найденную изъ уравненія (1), внесли въ уравненіе (2), то получили бы уравненіе второй степени, первый членъ котораго разложился бы на два производителя первой степени, и которые, слѣдовательно, выразили бы двѣ прямыя: геометрическое мѣсто OL и прямую PA. Это уравненіе будетъ

$$(y_1 x + x_1 y)\,[y - y_1 - a\,(x - x_1)] = 0.$$

Очевидно, что уравненіе (4) не содержитъ постояннаго параметра a; отсюда слѣдуетъ, что геометрическое мѣсто не зависитъ отъ частнаго положенія неподвижной сѣкущей PA. Отсюда выводимъ слѣдующую теорему. Данъ уголъ XOY и точка P въ его плоскости; если черезъ точку P проведемъ двѣ какія-нибудь сѣкущія PA, PC, то точка пересѣченія M двухъ прямыхъ AD и BC будетъ всегда находиться на одной и той же прямой OL. Замѣтимъ еще, что уравненіе (4) зависитъ только отъ отношенія $\frac{y_1}{x_1}$, т. е. отъ угловаго коеффиціента прямой OP. Такимъ образомъ геометрическое мѣсто OL остается то же, если точку P перемѣстимъ на прямую OP, проходящую черезъ начало.

103. Этотъ вопросъ можно рѣшить гораздо скорѣе. Возьмемъ какія-нибудь двѣ оси на плоскости. Означимъ для краткости черезъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$ уравненія данныхъ прямыхъ OA и OB, а черезъ $\gamma = 0$ уравненіе неподвижной сѣкущей PA. Данная точка P опредѣлится не по ея координатамъ, но пересѣченіемъ двухъ данныхъ прямыхъ PA и OP; уравненіе этой послѣдней, какъ проходящей черезъ точку пересѣченія O прямыхъ OA и OB, будетъ $\beta + a\alpha = 0$. Движущаяся сѣкущая PC, проведенная черезъ точку пересѣченія P двухъ прямыхъ $\beta + a\alpha = 0$, $\gamma = 0$, выразится уравненіемъ вида

(1) $$\beta + a\alpha + m\gamma = 0,$$

въ которомъ m означаетъ произвольный параметръ. Точка C, въ которой эта сѣкущая пересѣкаетъ прямую OA, опредѣляется двумя уравненіями $\alpha = 0$, $\beta + a\alpha + m\gamma = 0$, или $\alpha = 0$, $\beta + m\gamma = 0$. Это послѣднее уравненіе выражаетъ прямую, проходящую черезъ точку C и также черезъ точку пересѣченія B прямыхъ $\beta = 0$, $\gamma = 0$; слѣдовательно, это

есть уравненіе прямой BC. Точно также точка D, въ которой движущаяся сѣкущая пересѣкаетъ прямую OB, опредѣляется двумя уравненіями $\beta = 0$, $\beta + a\alpha + m\gamma = 0$, или $\beta = 0$, $a\alpha + m\gamma = 0$. Прямая, выражаемая этимъ послѣднимъ уравненіемъ и проходящая также черезъ точку пересѣченія A прямыхъ $\alpha = 0$, $\gamma = 0$, есть ни что иное, какъ прямая AD. Слѣдовательно, уравненія движущихся прямыхъ BC и AD, пересѣченіе которыхъ опредѣляетъ точку M геометрическаго мѣста, будутъ

(2) $$\beta + m\gamma = 0$$
(3) $$a\alpha + m\gamma = 0.$$

Уравненія геометрическаго мѣста мы получимъ, исключивъ изъ этихъ двухъ уравненій параметръ m; если вычтемъ почленно эти уравненія, то получимъ уравненіе

(4) $$\beta - a\alpha = 0.$$

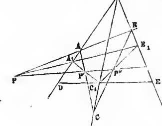
Отсюда заключаемъ, что геометрическое мѣсто есть прямая, проходящая черезъ точку O. Эта прямая не зависитъ отъ γ, т. е. отъ неподвижной сѣкущей PA, и она будетъ та же самая, какое бы ни было положеніе точки P на прямой OP.

Мы предполагали, что параметръ m имѣетъ конечную величину; если m замѣнимъ черезъ $\frac{p}{q}$ и, умноживъ на q, сдѣлаемъ $q = 0$, то уравненія (1), (2), (3) приведутся къ $\gamma = 0$, т. е. движущаяся сѣкущая совпадаетъ съ неподвижною сѣкущею PA, точно такъ, какъ двѣ прямыя BC и AD.

Задача II.

104. *Стороны перемѣннаго треугольника* ABC *вращаются около трехъ неподвижныхъ точекъ* P, P′ P″, *расположенныхъ по прямой линіи, между тѣмъ какъ двѣ изъ вершинъ* A *и* B *перемѣщаются по двумъ неподвижнымъ прямымъ* ID *и* IE; *найти геометрическое мѣсто, описанное третьей вершиной* C (*фиг.* 63).

Фиг. 63.



Возьмемъ на плоскости двѣ какія-нибудь оси и означимъ для краткости, какъ прежде, черезъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, уравненія данныхъ прямыхъ ID, IE и черезъ $\gamma = 0$ уравненіе прямой PP′P″; каждая изъ неподвижныхъ точекъ P, P′, P″ можетъ быть опредѣлена пересѣченіемъ этой прямой, съ прямою проходящей черезъ точку I. Такъ какъ точка I есть точка пересѣченія прямыхъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, то прямыя IP, IP′, IP″ выразятся уравненіями вида

$$\beta + a\alpha = 0,\ \beta + a'\alpha = 0,\ \beta + a''\alpha = 0,$$

въ которыхъ a, a', a'' означаютъ постоянные коэффиціенты. Чтобы построить частное положеніе перемѣнной фигуры, черезъ P проведемъ произвольную прямую PA′ и потомъ проводимъ AP′ и BP″, пересѣченіе которыхъ опредѣлитъ точку C геометрическаго мѣста. Такъ какъ точка P есть пересѣченіе двухъ прямыхъ $\gamma = 0$, $\beta + a\alpha = 0$, то уравненіе прямой PA, проведенной черезъ эту точку, будетъ

(1) $$\beta + a\alpha + m\gamma = 0,$$

гдѣ m означаетъ произвольный параметръ. Точка A, въ которой прямая PA пересѣкаетъ прямую IA, опредѣляется двумя уравненіями $\alpha = 0$, $\beta + a\alpha + m\gamma = 0$, или $\alpha = 0$, $\beta + m\gamma = 0$. Уравненіе прямой AP′, какъ проходящей черезъ эту точку, будетъ $\beta + m\gamma + m'\alpha = 0$; коэффиціентъ m' надобно опредѣлить такъ, чтобы прямая проходила также черезъ точку P′, опредѣляемую двумя уравненіями $\gamma = 0$ и $\beta + a'\alpha = 0$. Если въ уравненіи этой прямой сдѣлаемъ $\gamma = 0$ и $\beta = -a'\alpha$, то получимъ $(m' - a')\,\alpha = 0$; а такъ какъ α не равно нулю, потому что точка P′ не находится на прямой $\alpha = 0$, то необходимо $m' - a' = 0$; слѣдовательно, $m' = a'$. Такимъ образомъ, прямая AP′ выразится уравненіемъ

(2) $$\beta + a'\alpha + m\gamma = 0.$$

Точно также точка B, въ которой прямая BP пересѣкаетъ прямую IB, опредѣляется двумя уравненіями $\beta = 0$, $\beta + a\alpha + m\gamma = 0$, или $\beta = 0$, $a\alpha + m\gamma = 0$; прямая BP″, проходящая черезъ эту точку, выразится уравненіемъ $a\alpha + m\gamma + m''\beta = 0$. Коэффиціентъ m'' надо опредѣлить такъ, чтобы эта прямая проходила черезъ точку P″, пересѣченіе прямыхъ $\gamma = 0$, $\beta + a''\alpha = 0$. Положивъ въ этомъ уравненіи $\gamma = 0$ и $\beta = -a''\alpha$, получимъ $(a - m''a'')\,\alpha = 0$; слѣдовательно $m'' = \frac{a}{a''}$. Такимъ образомъ, прямая BP″ выразится уравненіемъ

(3) $$\frac{a}{a''}(\beta + a''\alpha) + m\gamma = 0.$$

Уравненія (2) и (3) суть уравненія двухъ движущихся прямыхъ AP′ и BP″, пересѣченіе которыхъ опредѣляетъ какую-нибудь точку C геометрическаго мѣста. Исключивъ изъ этихъ двухъ уравненій параметръ m, получимъ уравненіе геометрическаго мѣста. Если эти уравненія вычтемъ, то получимъ уравненіе

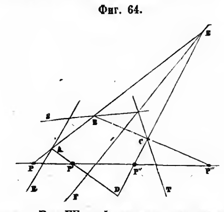
(4) $$(a' - a)\,a''\alpha + (a'' - a)\,\beta = 0.$$

Отсюда заключаемъ, что искомое геометрическое мѣсто есть прямая, проходящая черезъ точку I.

105. *Примѣчаніе 1.* Изъ всего предъидущаго мы выводимъ рѣшеніе слѣдующей задачи: *Въ треугольникѣ* I′DE *вписать другой треугольникъ, стороны котораго проходили бы соотвѣтственно черезъ три данныя точки* P, P′, P″, *находящіяся на прямой линіи.* Если будемъ разсматривать перемѣнный треугольникъ, стороны котораго должны проходить черезъ три точки P, P′, P″, между тѣмъ какъ двѣ вершины A и B перемѣщаются по прямымъ ID, IE, то геометрическое мѣсто третьей вершины C будетъ прямая IC. Слѣдовательно точка пересѣченія C прямыхъ IC и DE будетъ одна изъ вершинъ искомаго треугольника, а прямыя C_1P', C_1P'' опредѣлятъ двѣ другія вершины A_1 и B_1. Замѣтимъ, что это рѣшеніе не требуетъ никакого другаго инструмента, кромѣ линейки.

Примѣчаніе 2. Предъидущую задачу можно легко представить въ общемъ видѣ. Разсмотримъ четыреугольникъ, четыре стороны котораго обращаются около четырехъ неподвижныхъ точекъ P, P'', P', P''', расположенныхъ на прямой линіи, а три вершины A, B, C перемѣщаются по тремъ неподвижнымъ прямымъ R, S, T и постараемся найти геометрическое мѣсто, описываемое четвертою вершиною D (*фиг.* 64).

Фиг. 64.



Три стороны треугольника BCE вращаются около трехъ неподвижныхъ точекъ P, P'', P''', а двѣ вершины B и C перемѣщаются по неподвижнымъ прямымъ S и T; слѣдовательно, вершина E описываетъ прямую EF. Точно также три стороны треугольника AED вращаются около трехъ неподвижныхъ точекъ P, P', P'', а двѣ вершины A и E перемѣщаются по двумъ прямымъ R и EF; слѣдовательно, вершина D описываетъ прямую линію.

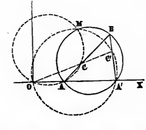
Отъ четыреугольника точно также перейдемъ къ пятиугольнику. Такимъ образомъ, когда n сторонъ многоугольника вращаются около n неподвижныхъ точекъ, расположенныхъ на прямой линіи, а $n-1$ вершинъ перемѣщаются по $n-1$ неподвижнымъ прямымъ, n-ая вершина опишетъ прямую линію.

Отсюда выводимъ способъ вписать въ многоугольникъ, имѣющій n сторонъ, другой многоугольникъ съ n сторонами, проходящими черезъ n неподвижныхъ точекъ, находящихся на прямой линіи.

Задача III.

106. *Данъ треугольникъ* ABA'; *черезъ неподвижную точку* O, *взятую на его сторонѣ* AA', *проводимъ движущуюся сѣкущую* OCC'; *проводимъ первый кругъ черезъ три точки* O, A, C *и второй кругъ черезъ три точки* O, A', C'. *Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія* M *этихъ двухъ круговъ* (*фиг.* 65).

Фиг. 65.



Возьмемъ прямую OA' за ось x-овъ, а перпендикуляръ OY, проведенный изъ точки O, за ось y-овъ. Если черезъ a и a' назовемъ абсциссы точекъ A и A', то уравненія двухъ неподвижныхъ прямыхъ AB, A'B будутъ

(1) $$y = c\,(x - a)$$

(2) $$y = c'\,(x - a'),$$

а уравненіе движущейся сѣкущей будетъ

(3) $$y = mx,$$

въ которомъ m означаетъ перемѣнный параметръ. Координаты точки C мы получимъ, рѣшивъ уравненія (1) и (3); такимъ образомъ получимъ

$$x=\frac{ca}{c-m},\quad y=\frac{mca}{c-m}.$$

Уравненіе всякаго круга, проходящаго черезъ точки O и A, будетъ

$$x^2+y^2-ax-by=0,$$

въ которомъ параметръ b произвольный. Этотъ параметръ мы опредѣлимъ, выразивъ, что кругъ проходитъ черезъ точку C; тогда мы получимъ

$$b=\frac{a(cm+1)}{c-m};$$

слѣдовательно уравненіе круга, проходящаго черезъ три точки O, A, C, будетъ

$$(4)\qquad x^2+y^2-ax-\frac{a(cm+1)}{c-m}\,y=0.$$

Если въ этомъ уравненіи a и c замѣнимъ черезъ a' и c', то, очевидно, получимъ уравненіе круга, проходящаго черезъ три точки O, A′, C′,

$$(5)\qquad x^2+y^2-a'x-\frac{a'(c'm+1)}{c'-m}\,y=0.$$

Чтобы получить уравненіе геометрическаго мѣста точки пересѣченія M двухъ круговъ, надобно изъ двухъ уравненій (4) и (5) исключить перемѣнный параметръ m. Сравнивъ величины m, найденныя изъ уравненій (4) и (5), получимъ уравненіе

$$\frac{c(x^2+y^2-ax)-ay}{(x^2+y^2-ax)+cay}=\frac{c'(x^2+y^2-a'x)-a'y}{(x^2+y^2-a'x)+c'a'y},$$

приведя къ одному знаменателю, получимъ

$$(c-c')\,[(x^2+y^2-ax)\,(x^2+y^2-a'x)+aa'y^2],$$

$$+(1+ca')\,y\,[a'(x^2+y^2-ax)-a(x^2+y^2-a'x)]=0,$$

или

$$(c-c')\,[(x^2+y^2)^2-(a+a')\,x\,(x^2+y^2)+aa'(x^2+y^2)]$$
$$+(1+cc')\,(a'-a)\,y\,(x^2+y^2)=0;$$

взявъ x^2+y^2 общимъ множителемъ и раздѣливъ на $c-c'$, найдемъ

$$(6)\qquad (x^2+y^2)\left[x^2+y^2-(a+a')\,x-\frac{(1+cc')(a-a')}{c-c'}\,y+aa'\right]=0.$$

Это уравненіе разлагается на два уравненія: одно

$$x^2+y^2=0$$

опредѣляетъ точку O, въ которой всегда пересѣкаются два движущіеся круга; другое

$$(7)\qquad x^2+y^2-(a+a')\,x-\frac{(1+cc')(a-a')}{c-c'}\,y+aa'=0,$$

есть уравненіе геометрическаго мѣста точки M. Это геометрическое мѣсто есть кругъ.

Можно сказать à priori, что три точки B, A, A′ принадлежатъ геометрическому мѣсту. Въ самомъ дѣлѣ, если движущаяся сѣкущая проходитъ черезъ точку D, то оба круга пересѣкутся въ B; эта точка составляетъ часть геометрическаго мѣста. Положимъ, что сѣкущая дѣлается параллельною прямой A′B; тогда точка C′ удаляется въ безконечности, второй кругъ сливается съ прямою OA′, которая пересѣкаетъ первый кругъ въ A. Точно также получимъ точку A′, когда сѣкущая сдѣлается параллельною AB. Сверхъ того, легко повѣрить по уравненію (7), что геометрическое мѣсто проходитъ черезъ три точки B, A, A′. Такимъ образомъ искомое геометрическое мѣсто есть кругъ, описанный около треугольника ABA′.

107. *Замѣчаніе*. Иногда случается, что одна изъ двухъ движущихся кривыхъ A, B, пересѣченіе которыхъ опредѣляетъ точку M геометрическаго мѣста, проходитъ черезъ неподвижную точку P. Въ этомъ случаѣ координаты этой точки P удовлетворяютъ уравненію, которое получимъ черезъ исключеніе. Дѣйствительно, положимъ, что уравненія двухъ линій содержатъ n перемѣнныхъ параметровъ, связанныхъ между собою $n-1$ отношеніями: если координаты x_1 и y_1 неподвижной точки P удовлетворяютъ уравненію линіи A, при всѣхъ величинахъ параметровъ, то, замѣняя x и y черезъ x_1 y_1 въ уравненіи линіи B, получимъ уравненіе, которое, въ соединеніи съ $n-1$ условными уравненіями, составятъ систему n уравненій, опредѣляющихъ величины этихъ параметровъ. Собственно говоря, эта точка P не будетъ точкою геометрическаго мѣста, если найденнымъ величинамъ не будутъ соотвѣтствовать дѣйствительныя линіи.

Въ этомъ случаѣ иногда случается, что точка P входитъ въ уравненіе частнымъ множителемъ, котораго можно уничтожить; уничтоживъ этого множителя, уравненіе выразитъ самое геометрическое мѣсто. Но часто бываетъ невозможно разложить первую часть уравненія на два производителя; въ такомъ случаѣ точку P должно разсматривать, какъ особую точку, связанную съ кривой. Слѣдующій примѣръ представляетъ первое обстоятельство.

Задача IV.

108. *Данъ кругъ и внутри его неподвижная точка* P; *около точки* P *обращаемъ прямой уголъ* APB; *прямою линіею соединяемъ двѣ точки* A *и* B, *въ которыхъ стороны прямаго угла пересѣкаютъ кругъ, и изъ точки* P *опускаемъ перпендикуляръ* PM *на прямую* AB; *найти геометрическое мѣсто основанія* M *перпендикуляра* (*фиг.* 66).

Возьмемъ за ось x-овъ діаметръ OP, за ось y-овъ перпендикулярный діаметръ; въ такомъ случаѣ данный кругъ выражается уравненіемъ

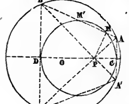
$$x^2 + y^2 = r^2 \tag{1}$$

Пусть

(2) $$y = ax + b$$

будетъ уравненіе сѣкущей AB. Если изъ двухъ уравненій (1) и (2) исключимъ y, то получимъ ур. второй степени

Фиг. 66.



(3) $$(1 + a^2)\,x^2 + 2\,abx + b^2 - r^2 = 0,$$

корни котораго выражаютъ абсциссы x' и x'' точекъ A и B; ординаты же будутъ $ax' + b$, $ax'' + b$. Если черезъ c означимъ постоянную длину OP, то угловые коэффиціенты двухъ прямыхъ PA и PB будутъ

$$\frac{y'}{x' - c}, \; \frac{y''}{x'' - c}, \text{ или } \frac{ax' + b}{x' - c}, \; \frac{ax'' + b}{x'' - c};$$

такъ какъ уголъ APB прямой, то получимъ условіе

$$\frac{(ax' + b)\,(ax'' + b)}{(x' - c)\,(x'' - c)} = -1$$

или

$$(1 + a^2)\,x'x'' + (ab - c)\,(x' + x'') + b^2 + c^2 = 0;$$

замѣнивъ $x' + x''$ и $x'x''$ ихъ величинами изъ уравненія (3), получимъ соотношеніе

(4) $$(1 + a^2)\,(c^2 - r^2) + 2b\,(ac + b) = 0$$

между двумя перемѣнными параметрами a и b.

Уравненіе перпендикуляра PM, опущеннаго изъ точки P на прямую AB, будетъ

(5) $$y = -\frac{1}{a}\,(x - c).$$

Точка M опредѣляется уравненіями (2) и (5), перемѣнные параметры которыхъ a и b удовлетворяютъ уравненію (4). Исключивъ изъ трехъ уравненій (2), (4), (5) эти два параметра, получимъ уравненіе геометрическаго мѣста точки M. Изъ уравненія (5) находимъ $a = -\frac{x - c}{y}$; потомъ изъ уравненія (2) находимъ $b = \frac{y^2 + (x - c)\,x}{y}$. Внеся эти величины въ уравненіе (4) получимъ уравненіе

(6) $$[y^2 + (x - a)^2]\left(x^2 + y^2 - cx + \frac{c^2 - r^2}{2}\right) = 0,$$

которое разлагается на два уравненія; изъ нихъ одно: $y^2 + (x - c)^2 = 0$ опредѣляетъ точку P; другое

(7) $$x^2 + y^2 - cx + \frac{c^2 - r^2}{2} = 0$$

выражаетъ искомое геометрическое мѣсто.

Очевидно, что точка P не принадлежитъ къ такому геометрическому мѣсту, которое опредѣляемъ; но легко понять, какъ анализъ ее вводитъ въ результатъ. Координаты $x = c$, $y = 0$ точки P удовлетворяютъ уравненію (5) при всѣхъ величинахъ параметровъ; слѣдовательно, изъ двухъ уравненій (2) и (4) можно опредѣлить вели-

чины, соотвѣтствующія двумъ параметрамъ a и b; такимъ образомъ находимъ $a = \pm i$, $b = -ac$. Это есть приложеніе замѣчанія, сдѣланнаго въ § 98.

Изъ уравненія (7) видно, что геометрическое мѣсто есть кругъ, центръ котораго находится на прямой OP. Чтобы его построить, надобно опредѣлить оба конца діаметра CD. Если проведемъ прямыя AB′, BA′, образующія съ діаметромъ OP углы въ 45°, то хорды AA′ BB′, будучи перпендикулярны къ этому діаметру, опредѣлятъ двѣ точки C и D. Точно также, отыскивая геометрическое мѣсто средины M′ хорды AB, получимъ тотъ же кругъ. Дѣйствительно, эта средина опредѣляется пересѣченіемъ хорды AB съ перпендикуляромъ, опущеннымъ изъ центра на эту хорду. Такъ какъ уравненіе этихъ прямыхъ есть

$$y = ax + b, \quad y = -\frac{1}{a}x,$$

то уравненіе геометрическаго мѣста мы получимъ, исключивъ изъ этихъ двухъ уравненій и уравненія (4) два перемѣнные параметра a и b,

$$(x^2 + y^2)\left(x^2 + y^2 - cx + \frac{c^2 - r^2}{2}\right) = 0;$$

это уравненіе разлагается на два, изъ которыхъ одно опредѣляетъ точку O, постороннюю геометрическому мѣсту; второе кругъ.

Задача V.

109. ***Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, чтобы основанія перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ каждой точки на три стороны треугольника ABC, находились на прямой линіи.***

Пусть

$$(1) \qquad \begin{cases} x\cos a + y\sin a - p_1 = 0, \\ x\cos b + y\sin b - p_2 = 0, \\ x\cos c + y\sin c - p_3 = 0, \end{cases}$$

будутъ уравненія трехъ сторонъ треугольника, относительно какихъ-нибудь прямоугольныхъ осей, и для краткости черезъ α, β, γ означимъ первыя части этихъ уравненій. Назовемъ черезъ x и y координаты точки M геометрическаго мѣста, черезъ x_1 и y_1, x_2 и y_2, x_3 и y_3 координаты основаній перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точки M на стороны треугольника. Тогда получимъ (§ 83)

$$\begin{aligned} x - x_1 &= \alpha\cos a, \quad x - x_2 = \beta\cos b, \quad x - x_3 = \gamma\cos c, \\ y - y_1 &= \alpha\sin a, \quad y - y_2 = \beta\sin b, \quad y - y_3 = \gamma\sin c. \end{aligned}$$

Уравненіе геометрическаго мѣста мы получимъ, выразивъ, что эти три точки находятся на прямой линіи. Для этого надобно сравнить два отношенія $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$, $\frac{y_3 - y_1}{x_3 - x_1}$, которыя можно представить въ видѣ

$$\frac{(y_2 - y) - (y_1 - y)}{(x_2 - x) - (x_1 - x)} = \frac{(y_3 - y)(y_1 - y)}{(x_3 - x)(x_1 - x)}.$$

Такимъ образомъ получимъ уравненіе

$$\frac{\beta \sin b - \alpha \sin a}{\beta \cos b - \alpha \cos a} = \frac{\gamma \sin c - \alpha \sin a}{\gamma \cos c - \alpha \cos a},$$

или

(2) $$\alpha\beta \sin (b - a) + \beta\gamma \sin (c - b) + \gamma\alpha \sin (a - c) = 0.$$

Такъ какъ α, β, γ означаютъ многочлены первой степени относительно x и y, то очевидно, что уравненіе (2) есть второй степени. Коэффиціентъ при xy есть

$$\sin (a + b) \sin (b - a) + \sin (b + c) \sin (c - b) + \sin (c + a) \sin (a - c);$$

замѣнивъ здѣсь произведеніе синусовъ разностью косинусовъ, получимъ

$$\frac{(\cos 2a - \cos 2b) + (\cos 2b - \cos 2c) + (\cos 2c - \cos 2a)}{2};$$

этотъ коэффиціентъ равенъ нулю. Коэффиціенты при x^2 и y^2 суть

$$\mathrm{A} = \cos a \cos b \sin (b - a) + \cos b \cos c \sin (c - b) + \cos c \cos a \sin (a - c),$$
$$\mathrm{B} = \sin a \sin b \sin (b - a) + \sin b \sin c \sin (c - b) + \sin c \sin a \sin (a - c).$$

Если вычислимъ ихъ сумму и разность, то получимъ

$$\mathrm{A} - \mathrm{B} = \cos (a + b) \sin (b - a) + \cos (b + c) \sin (c - b) + \cos (c + a) \sin (a - c)$$

$$= \frac{\sin 2b - \sin 2a + \sin 2c - \sin 2b + \sin 2a - \sin 2c}{2} = 0,$$

$$\mathrm{A} + \mathrm{B} = \cos (a - b) \sin (b - a) + \cos (b - c) \sin (c - b) + \cos (c - a) \sin (a - c)$$

$$= \frac{\sin 2(b - a) + \sin 2(c - b) + \sin 2(a - c)}{2}$$

$$= -2 \sin (b - a) \sin (c - b) \sin (a - c);$$

отсюда

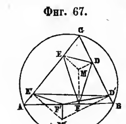
$$\mathrm{A} = \mathrm{B} = -\sin (b - a) \sin (c - b) \sin (a - c).$$

Такимъ образомъ геометрическое мѣсто есть окружность круга. Такъ какъ уравненіе (2) будетъ удовлетворено тогда, когда въ немъ сдѣлаемъ $\beta = 0$, $\gamma = 0$, то точка A будетъ принадлежать геометрическому мѣсту; то же самое скажемъ о точкахъ B и C; слѣдовательно, геометрическое мѣсто есть кругъ, описанный около треугольника ABC.

110. Надобно обратить вниманіе на видъ уравненія круга, описаннаго около треугольника. Первая часть этого уравненія имѣетъ очень простое геометрическое значеніе. Чтобы показать его, положимъ, что начало координатъ находится внутри треугольника ABC (*фиг.* 67), и что углы a, b, c, заключающіеся между 0 и 2π, расположены по возрастающимъ величинамъ. Разсмотримъ точку M, координаты которой суть x и y, и которая находится внутри треугольника. Изъ этой точки опустимъ перпендикуляры на стороны треугольника и основанія этихъ перпендикуляровъ соединимъ; тогда получимъ треугольникъ DEF. Буквы α, β, γ означаютъ длины этихъ перпенди-

куляровъ, взятыя здѣсь со знакомъ —; сверхъ того, эти перпендикуляры имѣютъ направленіе одинаковое съ направленіемъ перпендикуляровъ, проведенныхъ изъ начала, и которые служатъ къ опредѣленію угловъ a, b, c. Членъ $\alpha\beta \sin(b-a)$ равенъ $MD \times ME \times \sin DME$, т. е. выражаетъ двойную площадь треугольника DME; два другіе члена точно также выражаютъ двойныя площади треугольниковъ EMF, FMD; такимъ образомъ первая часть уравненія (2) выражаетъ двойную площадь треугольника DEF.

Фиг. 67.



Разсмотримъ теперь точку M′, находящуюся внѣ треугольника ABC. Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ $\alpha = -M'D'$, $\beta = -M'E'$, $\gamma = +M'F'$; тогда первая часть уравненія выражаетъ двойную разность между треугольникомъ D′M′E′ и суммою треугольниковъ E′M′F′, F′M′D′; это есть также двойная площадь треугольника D′E′F′, взятая со знакомъ + или —. Такимъ образомъ, какое бы ни было положеніе точки M въ плоскости, первая часть уравненія выражаетъ двойную площадь треугольника DEF, взятую со знакомъ + или —. Слѣдовательно, уравненіе (2) показываетъ, что площадь треугольника DEF равна нулю, т. е. что три точки DEF находятся на прямой линіи.

Если черезъ r назовемъ радіусъ круга, описаннаго около треугольника ABC, а черезъ d разстояніе точки, координаты которой суть x и y, отъ центра круга, то первая часть уравненія (2), которую можно представить въ видѣ

$$A(x^2 + y^2 + \ldots),$$

будетъ равна $A(d^2 - r^2)$. Это выраженіе сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ, пока разстояніе d меньше r, т. е. пока точка M остается внутри круга; когда же точка M находится внѣ круга, оно получаетъ обратный знакъ.

Изъ предъидущаго видно, что геометрическое мѣсто такихъ точекъ—какъ площадь треугольника, вершины котораго суть основанія трехъ перпендикуляровъ, равная данному количеству k^2, составляется изъ двухъ круговъ, выражаемыхъ уравненіями

$$\alpha\beta \sin(b-a) + \beta\gamma \sin(c-b) + \gamma\alpha \sin(a-c) = \pm 2k^2.$$

Эти два круга концентричны кругу, описанному около треугольника ABC; одинъ изъ нихъ, при всякой величинѣ данной площади, будетъ внѣшнимъ и всегда дѣйствительнымъ; другой будетъ внутренній, а дѣйствительнымъ онъ будетъ только тогда, когда данная площадь меньше абсолютной величины $\frac{Ar^2}{2}$.

ПРИМѢРЫ.

1-й. Выразить площадь треугольника и какого-нибудь многоугольника въ функціи координатъ вершинъ.

2-й. Найти площадь треугольника, составленнаго тремя прямыми, уравненія которыхъ даны.

3-й. Въ плоскости даны n точекъ A, B, C.... и n величинъ m', m'', m'''...., которыя соотвѣтствуютъ этимъ n точкамъ; на прямой AB возьмемъ такую точку N_1, чтобы разстоянія этой точки отъ двухъ первыхъ точекъ были въ отношеніи m' къ m. Потомъ на прямой N_1C, соединяющей точку N_1 съ третьей точкой, возьмемъ такую

точку N_2, чтобы ея разстоянія отъ точекъ N_1 и C были въ отношеніи m'' къ $m' + m''$; потомъ на прямой N_2D, соединяющей точку N_2 съ четвертою точкою D, возьмемъ такую точку N_3, чтобы ея разстоянія отъ точекъ N_2 и D были въ отношеніи m^{IV} къ $m' + m'' + m'''$, и такъ далѣе, до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ до послѣдней данной точки. Найти координаты послѣдней точки дѣленія, которая называется *центромъ пропорціональныхъ разстояній*.

Въ томъ случаѣ, когда множители m', m'', m'''.... равны между собою, послѣдняя точка дѣленія называется *центромъ среднихъ разстояній*. Найти, напримѣръ, центръ пропорціональныхъ разстояній трехъ вершинъ треугольника; опредѣлить отсюда центръ тяжести треугольника, центръ вписаннаго въ него круга, точку пересѣченія трехъ его высотъ и центръ описаннаго около него круга.

4-й. Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, чтобы сумма произведеній изъ квадратовъ разстояній каждой изъ нихъ отъ n данныхъ точекъ на постоянныя величины m', m'' m'''...., была бы равна данной величинѣ.

5-й. Геометрическое мѣсто центровъ круговъ, которые видны изъ двухъ данныхъ точекъ подъ данными углами.

6-й. Геометрическое мѣсто центровъ круговъ, которые въ діаметрально противоположныхъ точкахъ пересѣкаютъ два данные круга.

7-й. Геометрическое мѣсто такихъ точекъ, чтобы сумма разстояній каждыхъ двухъ отъ двухъ прямыхъ и вообще отъ нѣсколько данныхъ прямыхъ была постоянна.

8-й. На двухъ взаимно перпендикулярныхъ прямыхъ OX, OY построенъ перемѣнный четыреугольникъ OABC, периметръ котораго равенъ $2a$; перпендикуляръ, проведенный изъ вершины C на діагональ AB, проходитъ черезъ опредѣленную точку.

9-й. Построивъ фигуру, изъ которой доказывается теорема о квадратѣ гипотенузы прямоугольнаго треугольника, доказать, что двѣ прямыя, соединяющія концы гипотенузы съ вершинами квадратовъ, построенныхъ на противоположныхъ сторонахъ, пересѣкаются на перпендикулярѣ, опущенномъ изъ вершины прямаго угла на гипотенузу.

10-й. Изъ опредѣленной точки P проводимъ касательныя къ кругамъ, которые проходятъ черезъ двѣ данныя точки. Найти геометрическое мѣсто точки, въ которой хорда прикосновенія пересѣкаетъ діаметръ, проходящій черезъ точку P.

11-й. Данъ правильный шестиугольникъ ABCDEF; соединяемъ A съ C и E; черезъ центръ проводимъ какую-нибудь сѣкущую, которая пересѣкаетъ двѣ прямыя AC и AE въ точкахъ G и H; потомъ соединяемъ B съ G и F съ H; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія этихъ двухъ прямыхъ.

12-й. Доказать, что окружности, описанныя на трехъ діагоналяхъ полнаго четыреугольника, какъ на діаметрахъ, попарно имѣютъ одну и ту же радикальную ось.

13-й. Даны пять прямыхъ; беремъ изъ нихъ четыре, образующія полный четыреугольникъ, въ которомъ средины трехъ діагоналей находятся на прямой линіи; доказать, что пять прямыхъ, полученныхъ такимъ образомъ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

14-й. Даны три точки A, B, C и двѣ прямыя X, Y; на AB, какъ діагонали, построимъ параллелограмъ, стороны котораго были бы параллельны X и Y; точно также поступаемъ съ B, C и C, A. Доказать, что другія діагонали трехъ параллелограмовъ проходятъ черезъ одну точку.

15-й. Даны четыре прямыя A, B, C, D; по тремъ изъ нихъ строимъ треугольникъ, посредствомъ котораго опредѣляется точка встрѣчи высотъ. Доказать, что четыре точки, полученныя такимъ образомъ, находятся на прямой линіи.

16-й. Даны два опредѣленные круга; два перемѣнные круга касаются между собой и съ предъидущими; найти геометрическое мѣсто точки прикосновенія перемѣнныхъ круговъ.

17-й. Беремъ на окружности произвольно четыре точки; доказать, что линіи, раздѣляющія пополамъ три пары прямыхъ, которыя проходятъ черезъ эти четыре точки, параллельно попарно.

18-й. Найти геометрическое мѣсто такой точки, что хорда прикосновенія касательныхъ, проведенныхъ изъ этой точки къ тремъ даннымъ кругамъ, пересѣкаются въ одной и той же точкѣ.

19-й. Данъ уголъ AOA′ и точка C на линіи, дѣлящей уголъ пополамъ. Уголъ постоянной величины вращается около его вершины, находящейся въ C; соединяемъ точки пересѣченія B и B′ сторонъ движущагося угла съ сторонами неподвижнаго угла; изъ точки C опускаемъ перпендикуляръ на BB′. Найти геометрическое мѣсто основанія перпендикуляра.

20-й. Даны четыре прямыя A, B, C, D, которыя, будучи взяты по три, образуютъ четыре треугольника. Прямая A принадлежитъ тремъ этимъ треугольникамъ; центръ круга, описаннаго около каждаго изъ нихъ, соединяемъ съ вершиною, не находящеюся на A; три прямыя, полученныя такимъ образомъ, пересѣкаются въ одной и той же точкѣ Y; четыре точки, подобныя I, и центры четырехъ круговъ находятся на одной и той же окружности.

21-й. Даны различные круги, которые, будучи взяты по два, имѣютъ одну и ту же радикальную ось; если перемѣнный кругъ пересѣчетъ два изъ этихъ круговъ подъ постоянными углами, то онъ пересѣчетъ также каждый изъ другихъ круговъ подъ постояннымъ угломъ.

КНИГА ТРЕТЬЯ.

Кривыя втораго порядка.

ГЛАВА I.

Построеніе линій втораго порядка.

111. Общее уравненіе второй степени съ двумя неизвѣстными x и y есть

$$(1)\qquad Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0;$$

Фиг. 68.

это уравненіе содержитъ пять произвольныхъ параметровъ, т. е. отношенія пяти коеффиціентовъ къ шестому. Сперва положимъ, что одинъ изъ коеффиціентовъ при x^2 и y^2, напримѣръ C не будетъ равенъ нулю, и рѣшимъ это уравненіе относительно y; тогда мы получимъ

$$(2)\qquad y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2+2Nx+P},$$

полагая $M=B^2-4AC$, $N=BE-2CD$, $P=E^2-4CF$,

Построимъ прямую DD′, выражаемую уравненіемъ.

$$y = -\frac{Bx + E}{2C}.$$

Для каждой величины x надобно по обѣ стороны прямой DD′ откладывать на ординатѣ длину, равную

$$Y = \frac{1}{2C}\sqrt{Mx^2 + 2Nx + P}.$$

Прямая DD′ (*фиг.* 68), которая дѣлитъ на двѣ равныя части хорды, параллельныя оси OY, называевся *діаметромъ* кривой; а Y есть величина ординаты, отсчитываемая отъ діаметра. Такимъ образомъ, построеніе геометрическаго мѣста приводится къ изученію трехчлена

$$Mx^2 + 2Nx + P;$$

и такъ какъ видъ геометрическаго мѣста главнымъ образомъ зависитъ отъ знака коеффиціента M, то надо различать три главные случаи.

Эллипсъ.

112. Разсмотримъ прежде случай, когда коеффиціентъ M, т. е. $B^2 - 4AC$, имѣетъ отрицательную величину. Ордината Y будетъ дѣйствительною въ томъ случаѣ, когда трехчленъ будетъ имѣтъ положительную величину. Чтобы узнать знакъ трехчлена, когда x измѣняется, ему даютъ различные виды; вотъ почему разсматриваемый нами случай дѣлится въ свою очередъ на три другіе.

1° $N^2 - MP > 0$. Оба корня трехчлена дѣйствительны и не равны. Означимъ черезъ x' самый меньшій, а черезъ x'' самый большій, тогда трехчленъ можно написать

$$M(x - x')(x - x'') \text{ или } - M(x - x')(x'' - x);$$

трехчленъ будетъ положителенъ, и слѣдовательно, ордината Y будетъ дѣйствительная при всѣхъ величинахъ x, заключающихся между x' и x''; наоборотъ, трехчленъ будетъ отрицательный, и ордината будетъ мнимая при всѣхъ величинахъ x меньшихъ x' или большихъ x''.

Возьмемъ на оси x-овъ двѣ точки P′ и P″, абсциссы которыхъ суть x' и x'', и черезъ эти точки проведемъ линіи P′A′, P″A″, параллельныя оси y; тогда всякая кривая будетъ заключаться между этими двумя парал-

лельными. Такъ какъ при измѣненіи абсциссы x отъ x' до x'', Y сохраняетъ конечную величину и возрастаетъ отъ нуля, и снова обращается въ нуль; такимъ образомъ, получимъ сомкнутую кривую, которая проходитъ черезъ точки A′ и A″, и которая называется *эллипсомъ*.

Величина x, заключающаяся между x' и x'' будетъ абсцисса точки P, заключающейся между точками P′ и P″, а соотвѣтствующая величина Y будетъ

$$\frac{1}{2C}\sqrt{(-M).PP'.PP''}.$$

Перемѣнное произведеніе PP′. PP″ двухъ отрѣзковъ прямой P′P″ равно квадрату ординаты круга, описаннаго на P′P″, какъ на діаметрѣ; когда точка P перемѣщается отъ P′ къ точкѣ I, срединѣ P′P″, то ордината круга, а слѣдовательно, величина Y, которая ей пропорціональна, возрастаетъ; она уменьшается, когда точка P перемѣщается отъ I до P″; слѣдовательно, величина Y достигаетъ *maximum*, когда точка P находится въ I, т. е. когда $x = \frac{x'+x''}{2} = -\frac{N}{M}$; это наибольшая величины равна $\frac{(x''-x')\sqrt{-M}}{4C}$. Отложивъ въ обѣ стороны отъ точки C, средины діаметра A′ A″, по ординатѣ линію, равную этой наибольшей величинѣ, получимъ двѣ точки B′ и B″ кривой, и проведя черезъ эти точки линіи, параллельныя діаметру, составимъ параллелограмъ FGKH, въ которомъ будетъ заключаться эллипсъ.

Очевидно, что двумъ точкамъ P и Q, одинаково отстоящимъ отъ средины I, соотвѣтствуютъ равныя величины Y; отложивъ эти величины по обѣ стороны діаметра DD′, получимъ четыре точки M, M′, N, N′. Такъ какъ два треугольника CRM, CSN′ равны, то три точки M, C, N′ находятся на прямой линіи, а точка C есть средина MN′; такимъ образомъ, всѣ точки кривой попарно симметричны относительно точки C, средины діаметра A′A″; слѣдовательно, эта точка C есть *центръ* эллипса. Очевидно также, что прямыя MN, M′N′ параллельны діаметру A′A″, и каждая изъ нихъ дѣлится прямою B′ B″ пополамъ; эта прямая есть второй діаметръ. Діаметры A′A″, B′B″, изъ которыхъ каждый дѣлитъ пополамъ хорды, параллельныя другому, называются *сопряженными діаметрами* эллипса.

113. *Замѣчаніе*. Такъ какъ

$$Mx^2 + 2Nx + P = M\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP - N^2}{M},$$

то уравненіе (1) можно представить въ видѣ

$$(3) \qquad \left(2Cy + Bx + E\right)^2 - M\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + \frac{N^2 - MP}{M} = 0.$$

Первый членъ есть квадратъ многочлена, содержащаго два перемѣнныя x и y; второй содержитъ квадратъ многочлена, который содержитъ только перемѣнное x, а третій постоянную отрицательную величину.

114. 2° $N^2 - MP = 0$. Оба корня x' и x'' равны; и мы получимъ

$$x' = x'' = -\frac{N}{M},\ Y = \frac{x - x'}{2C}\sqrt{M};$$

По положенію, коеффиціентъ M отрицателенъ, и слѣдовательно, величина Y будетъ мнимая при всѣхъ величинахъ x, исключая при $x = x'$, въ этомъ случаѣ $Y = 0$. Такъ какъ уравненіе допускаетъ только систему дѣйствительныхъ рѣшеній, поэтому геометрическое мѣсто будетъ единственная точка C, находящаяся на прямой DD'. Въ этомъ случаѣ уравненіе (3) приводится къ

$$(4) \qquad (2Cy + Bx + E)^2 - M\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 = 0,$$

и ясно, что оно имѣетъ только одно дѣйствительное рѣшеніе.

115. 3° $N^2 - MP < 0$. Трехчленъ

$$Mx^2 + 2Nx + P = M\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP - N^2}{M},$$

отрицательный, а слѣдовательно, Y будетъ мнимое при всѣхъ величинахъ x. Такъ какъ уравненіе не имѣетъ дѣйствительныхъ рѣшеній, то оно не выражаетъ никакого геометрическаго мѣста. Если уравненіе (1) представимъ въ видѣ (3), то три члена будутъ положительны, и дѣйствительно, видно, что уравненіе не допускаетъ дѣйствительнаго рѣшенія.

Гипербола.

116. Разсмотримъ теперь случай, когда коеффиціентъ M имѣетъ положительную величину. Этотъ случай раздѣляется также на три.

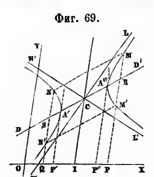
1° $N^2 - MP > 0$. Трехчленъ

$$Mx^2 + 2Nx + P,$$

который можно представить въ видѣ $M(x-x')(x-x'')$, положителенъ, и слѣдовательно, Y будетъ величина дѣйствительная, когда x измѣняется отъ x'' до $+\infty$ и отъ x' до $-\infty$; кромѣ того, Y измѣняется въ то же время отъ 0 до ∞.

Возьмемъ, какъ прежде, на оси x-овъ двѣ точки P′ и P″, абсциссы которыхъ суть x' и x'', и черезъ эти точки проведемъ линіи P′A′, P″A″, параллельныя оси y-овъ. Кривая будетъ находиться внѣ этихъ линій; она состоитъ изъ двухъ отдѣльныхъ вѣтвей, которыя простираются въ безконечность (*фиг.* 69); эта кривая называется *гиперболою*. Если по оси x-овъ отложимъ по обѣ стороны точки I, средины P′P″, двѣ равныя линіи IP и IQ, то соотвѣтствующія величины Y будутъ равны. Очевидно, что точка C, средина A′A″ есть центръ кривой, и что двѣ прямыя DD′ и IC суть два сопряженные діаметра.

Фиг. 69.



117. Разсмотримъ величину y.

$$y=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2+\frac{MP-N^2}{M}}.$$

Если x будетъ очень большое, то первый членъ въ скобкахъ, находящійся подъ корнемъ, будетъ очень великъ въ сравненіи со вторымъ; такъ что, ограничиваясь этимъ членомъ, получимъ для y приближенную величину:

$$(5)\qquad y_1=-\frac{Bx+E}{2C}\pm\frac{1}{2C}\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}.$$

Предъидущее уравненіе опредѣляетъ двѣ различныя прямыя, которыя пересѣкаются въ точкѣ діаметра DD′, абсцисса которой равна $-\frac{N}{M}$, т. е. полусуммѣ абсциссъ точекъ P′ и P″; слѣдовательно, эта точка есть центръ C кривой. Разсмотримъ вѣтвь A″M кривой; если C положительно, то эта вѣтвь выразится уравненіемъ

$$y=-\frac{Bx+E}{2C}+\frac{1}{2C}\sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2+\frac{MP-N^2}{M}},$$

въ которомъ x измѣняется отъ x'' до $+\infty$. Возьмемъ теперь прямую CL, уравненіе которой есть

$$y_1 = -\frac{Bx+E}{2C} + \frac{1}{2C}\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}.$$

При какой-нибудь величинѣ x, которая больше x'', ордината кривой будетъ менѣе ординаты прямой; такимъ образомъ вѣтвь $A''M$ заключается въ углѣ LCD'. Разность $y_1 - y$ ординатъ, которая соотвѣтствуетъ одной и той же абсциссѣ, имѣетъ величину

$$y_1 - y = \frac{1}{2C}\left[\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M} - \sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP-N^2}{M}}\right]$$

$$= \frac{MP - N^2}{2CM\left[\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M} + \sqrt{M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP-N^2}{M}}\right]}.$$

Когда x увеличивается неопредѣленно, знаменатель также увеличивается неопредѣленно, и слѣдовательно, разность $y_1 - y$ приближается къ нулю. Прямая CL, къ которой неопредѣленно приближается вѣтвь кривой $A''M$, называется *асимптотою* этой вѣтви кривой, заключающейся въ углѣ LCD'. Подобнымъ образомъ увидимъ, что вѣтви $A''M'$, $A'N$, $A'N'$ заключаются въ углахъ $L'CD'$, $H'CD$, HCD, и асимптотами имѣютъ прямыя CL', CH', CH. Такимъ образомъ, кривая заключается въ двухъ вертикальныхъ углахъ LCL', HCH', и каждая изъ безконечныхъ прямыхъ HL, $H'L'$ есть асимптота двухъ вѣтвей кривой.

Если уравненіе (1) представимъ въ видѣ (3) и отбросимъ постоянный членъ, то получимъ уравненіе

(6) $$(2Cy + Bx + E)^2 - M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 = 0,$$

которое выражаетъ двѣ асимптоты. Кромѣ того, замѣтимъ, что угловые коеффиціенты этихъ двухъ прямыхъ опредѣляются уравненіемъ

(7) $$m = -\frac{B}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{B^2 - 4AC},$$

или

$$Cm^2 + Bm + A = 0,$$

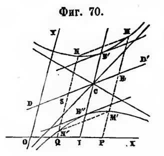
которое получимъ, замѣняя въ членахъ второй степени уравненія (1) x черезъ 1, а y черезъ m.

118. 2-й, $N^2 - MP < 0$. Такъ какъ трехчленъ

$$Mx^2 + 2Nx + P = M\left(x+\frac{N}{M}\right)^2 + \frac{MP-N^2}{M}$$

есть сумма двухъ положительныхъ количествъ, то величина Y будетъ дѣйствительная при всѣхъ величинахъ x и никогда не обратится въ нуль; при $x = -\frac{N}{M}$ Y имѣетъ наименьшую величину $\frac{\sqrt{MP - N^2}}{2C\sqrt{M}}$. Пусть I (*фиг.* 70) будетъ точка на оси x-овъ, абсцисса которой есть $-\frac{N}{M}$; проведемъ линію IC параллельно оси OY и возьмемъ линіи CB′ и CB″, равныя наименьшей величинѣ Y; полученныя такимъ образомъ двѣ точки B′ и B″ будутъ точками геометрическаго мѣста. Когда x измѣняется отъ $-\frac{N}{M}$ до $+\infty$, или отъ $-\frac{N}{M}$ до $-\infty$, величина Y возрастаетъ неопредѣленно; слѣдовательно, если изъ точекъ B′ и B″ проведемъ линіи, параллельныя діаметру DD′, то увидимъ, что кривая состоитъ изъ двухъ безконечныхъ вѣтвей, расположенныхъ внѣ параллельныхъ. Эту кривую называютъ также *гиперболою*.

Фиг. 70.



Если x дадимъ величины $x = -\frac{N}{M} \pm \alpha$, т. е. если по обѣ стороны точки I отложимъ двѣ линіи IP = IQ = α, то соотвѣтствующія величины Y, будутъ равны. Отсюда слѣдуетъ, что точка C есть центръ кривой, и что двѣ прямыя DD′, IC суть два сопряженные діаметра.

Точно также увидимъ, что двѣ прямыя

$$y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{1}{2C}\left(x + \frac{N}{M}\right)\sqrt{M},$$

которыя пересѣкаются въ центрѣ, суть асимптоты безконечныхъ вѣтвей.

119. 3-й. $N^2 - MP = 0$. Въ этомъ случаѣ мы получимъ

$$Y = \frac{1}{2C}\sqrt{M\left(x + \frac{N}{M}\right)^2} = \frac{\sqrt{M}}{2C}\left(x + \frac{N}{M}\right)$$

и

$$y = -\frac{Bx + E}{2C} \pm \frac{\sqrt{M}}{2C}\left(x + \frac{N}{M}\right).$$

Геометрическое мѣсто состоитъ изъ двухъ прямыхъ, которыя пересѣкаются на діаметрѣ DD′. Въ этомъ случаѣ уравненіе (3) приводится къ

$$(2Cy + Bx + E)^2 - M\left(x + \frac{N}{M}\right)^2 = 0;$$

первая часть этого уравненія состоитъ изъ произведенія двухъ множителей первой степени

$$\left[2Cy+Bx+E+\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}\right]\left[2Cy+Bx+E-\left(x+\frac{N}{M}\right)\sqrt{M}\right]=0.$$

Парабола.

120. Положимъ наконецъ, что коеффиціентъ M равенъ нулю. Тогда величина Y будетъ

$$Y=\frac{1}{2C}\sqrt{2Nx+P}.$$

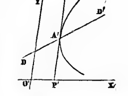
Этотъ случай мы раздѣлимъ на нѣсколько другихъ.

1-й. $N>0$. Положимъ $-\frac{P}{2N}=x'$, тогда

$$Y=\frac{1}{2C}\sqrt{2N(x-x')}.$$

Когда x измѣняется отъ x' до $+\infty$, Y будетъ величина дѣйствительная и будетъ измѣняться отъ 0 до $+\infty$; при величинахъ x меньшихъ x', Y будетъ мнимое. Слѣдовательно, если черезъ точку P′, абсцисса которой есть x', проведемъ линію P′A′ параллельно оси y, то увидимъ, что кривая вся расположена справа этой параллельной. Эта кривая состоитъ только изъ одной вѣтви, проходящей черезъ точку A и простирающаяся въ безконечность по обѣ стороны діаметра DD′ (*фиг.* 71); эта кривая называется *параболою*.

Фиг. 71.



2-й. $N<0$. Когда x измѣняется отъ x' до $-\infty$, Y имѣетъ дѣйствительную величину; кривая проходитъ черезъ точку A′ и простирается въ безконечность со стороны отрицательной оси x-овъ. Эта кривая называется также параболою.

3-й. $N=0$. Въ этомъ случаѣ будетъ

$$y=-\frac{2C}{Bx+E}\pm\frac{1}{2C}\sqrt{P}.$$

Если P будетъ положительно, то это уравненіе выразитъ двѣ прямыя, параллельныя діаметру DD′ и находящіяся отъ него на одинаковомъ раз-

стояніи. Если $P = 0$, то эти двѣ параллельныя совпадутъ съ діаметромъ; наконецъ, если P отрицательно, уравненіе не имѣетъ дѣйствительнаго рѣшенія.

Въ томъ случаѣ, когда M равно нулю, уравненіе (1) можно представить въ одномъ изъ слѣдующихъ трехъ видовъ.

(12) $(2Cy + Bx + E)^2 + 2Nx + P = 0,$

(13) $(2Cy + Bx + E)^2 + P = 0,$

(14) $(2Cy + Bx + E)^2 = 0.$

121. Во всемъ предъидущемъ мы предполагали, что коеффиціентъ C не равенъ нулю. Если же коеффиціентъ C равенъ нулю, а коеффиціентъ A не равенъ нулю, то уравненіе можно бы было рѣшить относительно x и, какъ прежде, построить геометрическое мѣсто. Такъ какъ первый членъ трехчлена, находящагося подъ корнемъ, коеффиціентомъ имѣетъ B^2, и слѣдовательно, имѣетъ величину положительную или нуль, то геометрическое мѣсто будетъ гипербола или парабола. Но лучше уравненіе рѣшить относительно перемѣннаго, которое входитъ только въ первой степени; сверхъ того, этотъ способъ единственно употребляется, когда коеффиціенты A и C въ одно время равны нулю.

Расположивъ уравненіе (1) относительно y, получимъ

$$(Bx + E)\,y + Ax^2 + Dx + F = 0,$$

откуда

$$y = -\frac{Ax^2 + Dx + F}{Bx + E}.$$

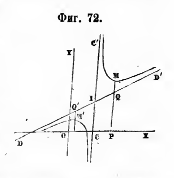
Положимъ, что B не равно нулю; выполнимъ дѣленіе, располагая по уменьшающимся степенямъ x, до тѣхъ поръ, пока получимъ остатокъ, независящій отъ x. Здѣсь надобно различать два случая, смотря по тому, будетъ ли остатокъ равенъ нулю или нѣтъ. Въ томъ случаѣ, когда остатокъ не равенъ нулю, мы получимъ результатъ вида

$$y = ax + b + \frac{r}{Bx + E} = ax + b + \frac{c}{x - d}.$$

Чтобы понять это, предположимъ $c > 0$. Построимъ геометрическое мѣсто, опредѣляемое уравненіемъ $y = ax + b$, и положимъ $Y = \frac{c}{x - d}$. Уравненіе $y = ax + b$ выражаетъ прямую DD′ (*фиг.* 72); и мы видимъ, что ординату этой прямой, при всякой величинѣ x, надобно увеличить на величину QM, равную Y. Эта величина, при $x = d$, обращается въ без-

конечность. Возьмемъ точку C, абсцисса которой есть d, и проведемъ линію CC′ параллельно OY. Если x дадимъ величину $d + x'$, гдѣ x' есть положительная величина, то величинз Y будетъ положительная; и когда x' приближается къ нулю, Y увеличивается неопредѣленно; если, наоборотъ, x' увеличивается неопредѣленно, Y приближается къ нулю. Такимъ образомъ, получимъ вѣтвь кривой, заключающейся въ углѣ C′ID′ и состоящей изъ двухъ безконечныхъ дугъ, которыя соотвѣтственно будутъ асимптотами двумъ прямымъ IC′ и ID′. Величинамъ x, которыя меньше d, соотвѣтствуютъ отрицательныя величины Y; такимъ образомъ, мы получимъ вторую вѣтвь, заключающуюся въ углѣ CID и состоящую изъ двухъ безконечныхъ дугъ, которыя будутъ асимптотами прямыхъ IC, ID. Двумъ величинамъ x', которыя имѣютъ обратные знаки, соотвѣтствуютъ величины y, которыя также равны и имѣютъ обратные знаки. Такимъ образомъ двѣ точки M и M′ симметричны относительно точки I, которая есть центръ кривой. Если постоянное c отрицательно, то получимъ еще кривую, составленную изъ двухъ безконечныхъ вѣтвей; и обѣ эти вѣтви будутъ расположены въ углахъ C′ID, CID′. Въ обоихъ случаяхъ кривая есть гипербола.

Фиг. 72.



122. Если остатокъ дѣленія равенъ нулю, то получимъ

$$Ax^2 + Dx + F = -(Bx + E)(ax + b),$$

и уравненіе приметъ видъ $(y - ax - b)(Bx + E) = 0$; это уравненіе разлагается на два другія уравненія; $y - ax - b = 0$, $Bx + E = 0$, выражающія двѣ прямыя, изъ которыхъ одна параллельна оси y.

Если A и C въ одно время равны нулю, то въ предъидущемъ разсужденіи надо положить $a = 0$; и прямая DD′ будетъ параллельна оси x-овъ; такимъ, образомъ получимъ или гиперболу, асимптоты которой параллельны осямъ координатъ, или двѣ прямыя, соотвѣтственно параллельныя осямъ.

123. Положимъ теперь, что коеффиціенты B и C равны нулю. Въ этомъ случаѣ коеффиціентъ A не можетъ быть равенъ нулю; въ противномъ случаѣ уравненіе будетъ первой степени. Величина $y = ax^2 + bx + c$; будетъ дѣйствительна при всякой величинѣ x; измѣняя x отъ $-\infty$ до $+\infty$, получимъ безконечную вѣтвь; это будетъ парабола.

124. *Замѣчаніе*. Разсматривая уравненіе второй степени, мы нашли

три рода кривыхъ: сомкнутыя кривыя, кривыя составленныя изъ двухъ безконечныхъ вѣтвей, и кривыя, имѣющія только одну безконечную вѣтвь. Эллипсами мы назвали всѣ сомкнутыя кривыя, опредѣляемыя уравненіемъ второй степени; гиперболы всѣ кривыя, состоящія изъ двухъ безконечныхъ вѣтвей; и параболами всѣ тѣ, которыя имѣютъ только одну безконечную вѣтвь. Вначалѣ (книга I, глава II), мы видѣли, что кривыя, означаемыя въ элементарной геометріи одинаковыми названіями, выражаются уравненіями второй степени. Ниже мы увидимъ, что, наоборотъ, всѣ кривыя, выражаемыя уравненіемъ второй степени, имѣютъ свойства, которыя служатъ опредѣленіемъ въ элементарной геометріи такимъ образомъ, что оба способа опредѣленія одинаковы.

Повторяя вкратцѣ разсужденіе, увидимъ, что видъ кривой, выражаемой уравненіемъ второй степени, опредѣляется знакомъ величины $B^2 - 4AC$. Такимъ образомъ кривая будетъ эллипсъ, гипербола или парабола, смотря по тому, будетъ ли $B^2 - 4AC$ отрицательно, положительно или нуль.

Однако необходимо помнить, что уравненіе не всегда выражаетъ кривую, ни даже геометрическое мѣсто. Въ томъ случаѣ, когда $B^2 - 4AC$ отрицательное, уравненіе выражаетъ эллипсъ, или точку, или не имѣетъ дѣйствительнаго рѣшенія. Если $B^2 - 4AC$ положительно, уравненіе выражаетъ гиперболу, или двѣ пересѣкающіяся прямыя; наконецъ, когда $B^2 - 4AC = 0$, уравненіе выражаетъ или параболу, или двѣ параллельныя прямыя, или одну прямую, или вовсе не имѣетъ дѣйствительнаго рѣшенія.

Если величина $B^2 - 4AC$ не равна нулю, то геометрическое мѣсто обратится въ точку или въ систему двухъ прямыхъ, когда коеффиціенты удовлетворяютъ условію $N^2 - MP = 0$, или

$$AE^2 + CD^2 - BDE + F(B^2 - 4AC) = 0.$$

Когда $B^2 - 4AC$ равно нулю, это отношеніе равнозначуще съ $N = 0$, и геометрическое мѣсто будетъ двѣ параллельныя прямыя.

Касательная къ кривымъ втораго порядка.

125. Пусть $f(x, y) = 0$ будетъ уравненіе кривой. Если черезъ x и y назовемъ координаты точки прикосновенія M; черезъ X и Y перемѣн-

ныя координаты какой-нибудь точки касательной, то, какъ мы видѣли (§ 89), касательная выразится уравненіемъ

$$(X - x) f'_x + (Y - y) f'_y = 0,$$

или

$$X f'_x + Y f'_y - (x f'_x + y f'_y) = 0.$$

Если кривая будетъ втораго порядка, то

$$f(x, y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F;$$
$$f_x' = 2Ax + By + D,$$
$$f_y' = Bx + 2Cy + E,$$
$$xf_x' + yf_y' = 2Ax^2 + 2Bxy + 2Cy^2 + Dx + Ey.$$

Такъ какъ точка прикосновенія M находится на кривой, то ея координаты x и y должны удовлетворять уравненію

(1) $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0;$$

отсюда

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = -(Dx + Ey + F),$$

а слѣдовательно

$$xf_x' + yf_y' = -(Dx + Ey + 2F).$$

Такимъ образомъ уравненіе касательной въ точкѣ, координаты которой суть x и y, будутъ

(2) $$(2Ax + By + D)X + (Bx + 2Cy + E)Y + (Dx + Ey + 2F) = 0.$$

Замѣтимъ, что координаты x и y точки прикосновенія входятъ въ это уравненіе только въ первой степени. Это уравненіе можно представить въ видѣ

(3) $$(2AX + BY + D)x + (BX + 2CY + E)y + (DX + EY + 2F) = 0$$

и отсюда заключаемъ, что оно не измѣняется, когда въ немъ X и Y замѣнимъ черезъ x и y и наоборотъ.

126. Положимъ, что требуется провести касательныя къ кривой черезъ данную точку P, находящуюся на кривой, и которая координатами имѣетъ x_1 и y_1. За неизвѣстныя возьмемъ координаты x и y одной изъ точекъ прикосновенія M; такъ какъ эти координаты должны удовлетворять уравненію (1), то касательная, проведенная въ точкѣ M, выразится уравненіемъ (2). Эта

касательная должна проходить черезъ точку P; поэтому координаты этой точки должны удовлетворять уравненію (2) или уравненію (3), и мы получимъ

(4) $(2Ax_1 + By_1 + D)\,x + (Bx_1 + Cy_1 + E)\,y + (Dx_1 + Ey^1 + 2F) = 0.$

Такимъ образомъ, координаты x y опредѣляются изъ двухъ уравненій (1) и (4). Такъ какъ одно изъ нихъ второй степени, а другое первой, то эти два уравненія допускаютъ два рѣшенія; отсюда заключаемъ, что черезъ данную точку P можно провести двѣ касательныя къ кривой втораго порядка. Рѣшить эти два уравненія значитъ найти точки пересѣченія линій, опредѣляемыхъ каждымъ изъ этихъ уравненій; первая есть данная кривая, вторая — прямая, проходящая черезъ обѣ точки прикосновенія. Замѣтимъ, что уравненіе (4) хорды прикосновенія имѣетъ одинаковый видъ съ уравненіемъ (2) касательной: стоитъ только въ немъ координаты точки прикосновенія замѣнить координатами точки P.

ПРИМѢРЫ.

1. Построить кривыя, выражаемыя уравненіями

$$xy + 2x - 5y = 0,\quad x^2 - 2xy + y^2 + 2x - 7 = 0$$
$$2y^2 + 7xy + 3x^2 - 3y + x - 2 = 0,\quad x^2 + 3xy - 2x = 0$$
$$3x^2 - 5xy + 2y^2 + 3x - 2y = 0,\quad 5x^2 + 4xy + y^2 - 2x + 5 = 0$$
$$2x^2 - 2xy + y^2 + 2x + 1 = 0,\quad x^2 - 2xy + y^2 - 2x + 2y - 8 = 0.$$

2. Найти геометрическое мѣсто точки, ордината которой есть средняя пропорціональная между соотвѣтствующими ординатами двухъ данныхъ прямыхъ.

3. Найти геометрическое мѣсто центра круга, который пересѣкаетъ два данныя круга подъ данными углами.

4. Данъ кругъ, касающійся къ двумъ взаимно-перпендикулярнымъ прямымъ OX, OY, и двѣ точки P и Q, расположенныя симметрично относительно линіи, дѣлящей уголъ пополамъ; къ кругу проводимъ какую-нибудь касательную, которая пересѣкаетъ стороны угла въ точкахъ A и B. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія прямыхъ AP, BQ.

5. Треугольникъ ABC описанъ около даннаго круга; уголъ C постоянный; вершина B описываетъ прямую линію; найти геометрическое мѣсто вершины A.

6. Построить параболу $\sqrt{\frac{x}{a}} + \sqrt{\frac{y}{b}} = 1.$

ГЛАВА II.

Центръ, діаметры и оси кривыхъ втораго порядка.

Центръ.

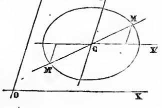
127. Центромъ кривой мы называли опредѣленную точку C, относительно которой всѣ точки кривой симметричны по двѣ. Разсматривая общее уравненіе второй степени, мы нашли, что эллипсъ и гипербола имѣютъ центръ. Теперь же мы постараемся отыскать центръ кривой втораго порядка прямо, не рѣшая уравненія. Способъ, который мы здѣсь примемъ, основывается на слѣдующей теоремѣ: если начало координатъ будетъ центромъ линіи втораго порядка, то уравненіе линіи не будетъ содержать членовъ первой степени.

Дѣйствительно, пусть

(1) $$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0$$

будетъ уравненіе линіи втораго порядка, центръ которой есть начало координатъ (*фиг.* 73). Уравненіе линіи MM′, проведенной черезъ начало, будетъ $y=mx$. Исключивъ y изъ этого уравненія и уравненія кривой, получимъ уравненіе

Фиг. 73.



(2) $$(A+Bm+Cm^2)x^2+(D+Em)x+F=0,$$

которое опредѣляетъ абсциссы двухъ точекъ пересѣченія. Такъ какъ начало координатъ есть средина прямой MM′, то корни предъидущаго уравненія должны быть равны и имѣть противоположные знаки, а для этого необходимо, чтобы коеффиціентъ при первой степени x былъ равенъ нулю. Такимъ образомъ получимъ $D+Em=0$; и такъ какъ это условіе должно быть справедливо для безконечнаго числа величинъ m, то необходимо, чтобы D и E отдѣльно равнялись нулю, т. е. $D=0$, $E=0$. Обратно, если эти условія выполняются, то корни уравненія (2), при всякой ве-

личинѣ m, будутъ имѣть противоположные знаки; слѣдовательно, начало координатъ будетъ центромъ кривой.

128. Чтобы узнать, имѣетъ ли кривая второй степени центръ, переносимъ оси параллельно прежнему ихъ направленію въ произвольную точку, координаты которой мы означимъ черезъ a и b; потомъ смотримъ, можно ли эти величины опредѣлить такимъ образомъ, чтобы новое уравненіе не содержало членовъ первой степени.

Для перемѣщенія осей параллельно прежнему ихъ направленію, мы имѣемъ формулы $x = a + x'$, $y = b + y'$. Внеся ихъ въ уравненіе (1), получимъ новое уравненіе

$$(3) \qquad \begin{aligned} &Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + (2Aa + Bb + D)x' + (Ba + 2Cb + E)y' \\ &+ Aa^2 + Bab + Cb^2 + Da + Eb + F = 0, \end{aligned}$$

о составленіи котораго мы замѣтимъ. Означимъ для краткости черезъ $f(x, y)$ первую часть уравненія (1), которая есть функція цѣлая второй степени относительно x и y. Въ уравненіи (3) члены второй степени одинаковы съ членами въ уравненіи (1); коеффиціенты при членахъ первой степени суть частныя производныя отъ функціи $f(x, y)$, взятыя относительно перемѣнныхъ x и y, и въ которыхъ эти перемѣнныя замѣнены черезъ a и b; наконецъ, постоянный членъ есть величина многочлена $f(x, y)$ при $x = a$, $y = b$. Слѣдовательно, уравненіе (3) можно написать такъ

$$(4) \qquad Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + f_a'(a, b)x' + f_b'(a, b)y' + f(a, b) = 0.$$

Приравнявъ нулю коеффиціенты при x' и y', получимъ два уравненія первой степени

$$(5) \qquad \begin{cases} 2Aa + Bb + D = 0, \\ Ba + 2Cb + E = 0. \end{cases}$$

Отсюда видно, *что центръ кривой второго порядка мы опредѣлимъ, рѣшивъ два уравненія, которыя получимъ, когда приравняемъ нулю частныя производныя, взятыя относительно* x *и* y, *отъ первой части даннаго уравненія.*

129. Если a и b будемъ разсматривать, какъ перемѣнныя координаты, то каждое изъ уравненій (5) будетъ опредѣлять прямую; и здѣсь надо различать нѣсколько случаевъ.

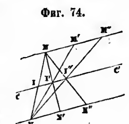
1°. $B^2 - 4AC \gtrless 0$. Оба уравненія удовлетворяются системою величинъ

a и b и только одною; обѣ прямыя пересѣкаются, и линія допускаетъ центръ и только одинъ центръ, координаты котораго суть

$$(6)\qquad \begin{cases} a = \dfrac{2CD - BE}{B^2 - 4AC}, \\ b = \dfrac{2AE - BD}{B^2 - 4AC}. \end{cases}$$

2°. $B^2 - 4AC = 0$. Прямыя (5) параллельны или совпадаютъ; въ первомъ случаѣ кривая не имѣетъ центра; во второмъ случаѣ за центръ можно взять каждую точку прямой, опредѣляемой однимъ изъ уравненій (5). Очевидно, что въ этомъ случаѣ, если получимъ геометрическое мѣсто, это геометрическое мѣсто необходимо будетъ состоять изъ двухъ параллельныхъ прямыхъ. Дѣйствительно, пусть CC′ будетъ прямая, геометрическое мѣсто центровъ (*фиг.* 74), а M точка геометрическаго мѣста. Точку M соединимъ съ различными точками прямой CC′; эти прямыя продолжимъ и на продолженіи ихъ отложимъ части, равныя имъ. Точки N, N′, N″,... полученныя такимъ образомъ, будутъ принадлежать также геометрическому мѣсту; кромѣ того, всѣ эти точки расположены по линіи, параллельной CC′. Повторяя то же самое съ точкою N, получимъ вторую линію, параллельную MM′. Сверхъ того, уравненіе (1) не можетъ выразить другихъ точекъ, кромѣ точекъ этихъ двухъ прямыхъ; въ противномъ случаѣ прямая пересѣкла бы геометрическое мѣсто не въ двухъ, но въ большемъ числѣ точекъ. Если бы точка M находилась на прямой CC′, то обѣ параллельныя совпадали бы съ геометрическимъ мѣстомъ центровъ.

Фиг. 74.



130. Если кривая имѣетъ центръ, то, перенеся оси параллельно имъ самимъ, уравненіе упростится и будетъ

$$(7)\qquad Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + F_1 = 0,$$

потому что члены первой степени уничтожаются. Постоянный членъ F_1 новаго уравненія есть

$$F_1 = Aa^2 + Bab + Cb^2 + Da + Eb + F,$$

гдѣ a и b означаетъ координаты центра. Но такъ какъ величины a и b удовлетворяютъ уравненіямъ (5), то, умноживъ обѣ части каждаго изъ нихъ соотвѣтственно на a и b и сложивъ, получимъ

$$2Aa^2 + 2Bab + 2Cb^2 + Da + Eb = 0,$$

откуда $$Aa^2 + Bab + Cb^2 = -\frac{Da + Eb}{2},$$
а слѣдовательно,
$$F_1 = F + \frac{Da + Eb}{2}.$$
Замѣтимъ также, что, замѣнивъ a и b ихъ величинами, получимъ
$$F_1 = \frac{AE^2 + CD^2 - BDE + F(B^2 - 4AC)}{B^2 - 4AC}.$$

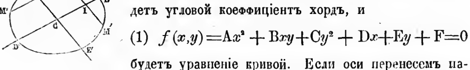
Если новый, постоянный членъ F_1 равенъ нулю, то уравненіе получитъ видъ
(8) $$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 = 0.$$
Отсюда (9) $$y' = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C}x'.$$

Если величина $B^2 - 4AC$ отрицательная, то уравненіе допускаетъ только одно дѣйствительное рѣшеніе $x' = 0$, $y' = 0$. Если величина $B^2 - 4AC$ положительная, то уравненіе выражаетъ двѣ прямыя, проходящія черезъ начало координатъ. Въ этомъ случаѣ уравненіе (7), въ которомъ постоянное F_1 имѣетъ какую-нибудь величину, опредѣляетъ гиперболу. Мы видѣли (§ 117), что асимптоты гиперболы проходятъ черезъ ея центръ, и что угловые коеффиціенты опредѣляются формулою
$$m = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 - 4AC}}{2C};$$
эти асимптоты суть нечто иное, какъ прямыя, выражаемыя уравненіемъ (9) или уравненіемъ (8). Такимъ образомъ, если уравненіе второй степени выражаетъ гиперболу, отнесенную къ ея центру, то уравненіе асимптоты получимъ, уничтоживъ постоянный членъ въ данномъ уравненіи.

Діаметры.

131. Если кривую втораго порядка пересѣчемъ прямыми параллельными, то геометрическое мѣсто среднихъ точекъ I хордъ MM′, заключающихся между двумя точками пересѣченія, будетъ *діаметръ* кривой. Пусть m будетъ угловой коеффиціентъ хордъ, и

Фиг. 75.



(1) $$f(x,y) = Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
будетъ уравненіе кривой. Если оси перенесемъ па-

раллельно прежнему ихъ направленію въ произвольную точку I плоскости, координаты которой суть a и b, то уравненіе кривой обратится (§ 128) въ

$$(4)\quad Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + f_a'(a, b)\,x' + f_b'(a, b)\,y' + f(a, b) = 0.$$

Дѣйствительно, проведемъ черезъ начало I линію MM′, параллельную данному направленію; уравненіе этой параллельной будетъ $y' = mx'$. Исключивъ y' изъ этого уравненія и уравненія кривой, получимъ уравненіе второй степени

$$(10)\quad (A + Bm + Cm^2)\,x'^2 + [f_a'(a,b) + f_b'(a,b)\,m]\,x' + f(a,b) = 0,$$

изъ котораго опредѣляются абсциссы точекъ пересѣченія. Чтобы начало I было срединою хорды MM′ (*фиг.* 75), необходимо, чтобы корни предъидущаго уравненія были равны и имѣли противоположные знаки, т. е. чтобы a и b удовлетворяли уравненію

$$f_a'(a, b) + mf_b'(a, b) = 0;$$

такъ какъ координаты средины всякой изъ разсматриваемыхъ хордъ должны удовлетворять этому уравненію, то оно есть уравненіе геометрическаго мѣста. Если въ немъ a и b замѣнимъ черезъ x и y, то получимъ

$$(11)\quad f_x'(x, y) + mf_y'(x, y) = 0,$$

или

$$(2Ax + By + D) + m(Bx + 2Cy + E) = 0.$$

Такъ какъ это уравненіе первой степени, то отсюда заключаемъ, что діаметръ, соотвѣтствующій какому-нибудь ряду параллельныхъ хордъ, есть прямая DD′. Означивъ черезъ m' угловой коеффиціентъ діаметра, получимъ

$$(12)\quad m' = -\frac{2A + Bm}{B + 2Cm}.$$

132. *Замѣчаніе 1.* Направленіе діаметра вообще измѣняется съ направленіемъ хордъ; однакожъ, когда

$$\frac{2A}{B} = \frac{B}{2C} \text{ или } B^2 - 4AC = 0,$$

т. е. когда кривая есть парабола, m' есть величина постоянная и равна $-\frac{B}{2C}$. Такимъ образомъ всѣ діаметры параболы параллельны между собою.

133. *Замѣчаніе 2.* Если данное число m будетъ удовлетворять отношенію

$$(13) \quad A + Bm + Cm^2 = 0,$$

откуда

$$m = -\frac{B}{2C} \pm \frac{1}{2C}\sqrt{B^2 - 4AC},$$

то уравненіе (10) обратится въ уравненіе первой степени. Въ этомъ случаѣ каждая прямая, параллельная данному направленію, пересѣчетъ кривую только въ одной точкѣ, и такимъ образомъ нельзя отыскать діаметръ, соотвѣтствующій этому направленію. Въ томъ случаѣ, когда мы имѣемъ эллипсъ, корни уравненія (13) мнимыя, обстоятельство, о которомъ мы говоримъ, не можетъ представиться; такимъ образомъ, всякому направленію хордъ соотвѣтствуетъ діаметръ. Въ томъ случаѣ, когда мы имѣемъ гиперболу, корни уравненія (13) опредѣляютъ направленія асимптотъ (§ 117); такимъ образомъ прямая параллельная одной изъ асимптотъ гиперболы пересѣкаетъ кривую только въ одной точкѣ. Если же мы имѣемъ параболу, то корни уравненія (13) будутъ равны, а величина m будетъ общимъ угловымъ коеффиціентомъ всѣмъ діаметрамъ; прямая, проведенная въ этомъ направленіи, пересѣкаетъ параболу только въ одной точкѣ.

134. *Замѣчаніе 3.* Величины x и y, которыя удовлетворяютъ уравненіямъ

$$2Ax + By + D = 0, \quad Bx + 2Cy + E = 0,$$

удовлетворяютъ уравненію (11), при всякой величинѣ m; слѣдовательно, если геометрическое мѣсто имѣетъ только одинъ центръ, то всѣ діаметры проходятъ черезъ центръ; но если оно имѣетъ ихъ безконечное число, то всѣ діаметры совпадутъ съ геометрическимъ мѣстомъ центровъ.

Два уравненія, которыя опредѣляютъ центръ, выражаютъ два діаметра; первый соотвѣтствуетъ хордамъ, параллельнымъ оси x-овъ; второй оси y-овъ.

Замѣчаніе 4. Въ томъ случаѣ, когда мы имѣемъ эллипсъ и гиперболу, всякая прямая, проведенная черезъ центръ, есть діаметръ; потому что величиною m можно располагать такъ, чтобы коеффиціентъ m', опредѣляемый формулою (13), имѣлъ какую-нибудь величину. Однако, если величина, полученная для m' будетъ равна одному изъ корней уравненія (13), то ее нельзя допустить, потому что соотвѣтствующія прямыя не

опредѣляютъ діаметровъ; но тогда m' будетъ равно m; оно соотвѣтствуетъ одной изъ асимптотъ.

Сопряженные діаметры.

135. Положимъ, что $B^2 - 4AC$ не равно нулю. Соотношеніе (12) между m и m' можно написать такъ

$$(14)\quad 2Cmm' + B(m + m') + 2A = 0.$$

Представимъ себѣ, что проведены сѣкущія, какъ напр. MM'', параллельныя діаметру DD' (*фиг*, 75); пусть m'' будетъ угловой коеффиціентъ діаметра EE', который дѣлитъ эти хорды пополамъ; тогда точно также между направленіемъ m' хордъ и направленіемъ m'' соотвѣтствующаго діаметра EE' получимъ соотношеніе

$$2Cm'm'' + B(m' + m'') + 2A = 0;$$

такъ какъ это и предъидущее уравненіе первой степени относительно m'' и m, то очевидно, что $m'' = m$. Два діаметра DD' и EE', угловые коеффиціенты которыхъ суть m' и m, имѣютъ то свойство, что каждый изъ нихъ дѣлитъ хорды, параллельныя другому, пополамъ; поэтому они называются *сопряженными діаметрами*.

Эллипсъ и гипербола имѣютъ безконечное число системъ сопряженныхъ діаметровъ. Если кривая будетъ гипербола, то за первый діаметръ можно взять какую-нибудь прямую, проведенную черезъ центръ, лишь бы она не совпадала съ одной изъ асимптотъ.

Оси.

136. Въ кривыхъ втораго порядка, діаметры, перпендикулярные къ хордамъ, которыя они дѣлятъ пополамъ, суть оси симметріи.

Фиг. 76.

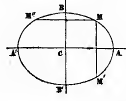
Въ параболѣ всѣ діаметры параллельны; поэтому, если представимъ себѣ рядъ хордъ MM' (*фиг*. 76), перпендикулярныхъ къ общему направленію діаметровъ, то діаметръ AA', который дѣлитъ эти хорды пополамъ будетъ осью кривой, и она будетъ только одна. Угловой коеффиціентъ діаметровъ есть $-\frac{B}{2C}$;

слѣдовательно, если оси координатъ будутъ прямоугольныя, то ось кривой будетъ діаметромъ хордъ, угловой коэффиціентъ котораго есть $\frac{2C}{B}$; его уравненія (§ 131) будетъ

$$B(2Ax + By + D) + 2C(Bx + 2Cy + E) = 0.$$

Если кривая будетъ эллипсъ или гипербола, то всякой оси AA' (*фиг.* 77) соотвѣтствуетъ вторая BB', образуя съ первой систему сопряженныхъ діаметровъ. Такимъ образомъ вопросъ приводится къ отысканію сопряженныхъ діаметровъ, перпендикулярныхъ между собою. Если оси координатъ прямоугольныя, то угловые коэффиціенты получимъ, соединивъ уравненіе (14) съ соотношеніемъ $mm' = -1$. Отсюда найдемъ $m + m' = 2\frac{C-A}{B}$; такимъ образомъ m и m' суть корни уравненія второй степени

Фиг. 77.



$$(15)\quad Bu^2 + 2(A - C)u - B = 0.$$

Эллипсъ и гипербола имѣютъ двѣ оси. Если $B = 0$ и $A = C$, то уравненіе обратится въ тождество, и кривая будетъ имѣть безконечное число системъ сопряженныхъ прямоугольныхъ діаметровъ; въ этомъ случаѣ геометрическое мѣсто будетъ кругъ.

137. Мы видѣли (§ 130), что если $B^2 - 4AC$ будетъ величина положительная, то уравненіе

$$(8)\quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$$

выразитъ двѣ прямыя, проходящія черезъ начало; уравненіе (15) опредѣляетъ направленіе осей, т. е. линіи, раздѣляющія пополамъ углы, образуемые этими двумя прямыми; уравненія этихъ линій мы получимъ, замѣнивъ въ уравненіи (15) u черезъ $\frac{y}{x}$;

$$(16)\quad Bx^2 - 2(A - C)xy - By^2 = 0.$$

Такъ какъ направленія осей зависятъ только отъ коэффиціентовъ членовъ второй степени, то, если кривая будетъ гипербола, оси, параллельныя линіямъ, дѣлящимъ пополамъ углы, образуемые прямыми (8), будутъ линіи, раздѣляющія пополамъ углы асимптотъ.

Вершинами кривой втораго порядка называются точки, въ которыхъ она пересѣкается съ осью. Парабола, имѣя одну ось, которая пересѣкаетъ кривую въ одной точкѣ, имѣетъ только одну вершину. Эллипсъ имѣетъ четыре вершины; гипербола двѣ.

Эллипсъ и гипербола, отнесенныя къ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ.

138. Возьмемъ діаметръ кривой втораго порядка за ось x-овъ, а за ось y-овъ линію параллельную хордамъ, которыя діаметръ дѣлитъ пополамъ; тогда уравненіе

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

должно для каждой величины x давать двѣ величины y, равныя и съ противоположными знаками; для этого необходимо, чтобы

$$Bx + E = 0,$$

при всякой величинѣ x; а слѣдовательно, $B = 0$, $E = 0$. Поэтому уравненіе будетъ имѣть видъ

$$(17) \quad Ax^2 + Cy^2 + Dx + F = 0.$$

Если кривая будетъ эллипсъ или гипербола, то, принимая за ось y діаметръ, сопряженный первому, получимъ точно также $D = 0$; тогда уравненіе кривой будетъ

$$(18) \quad Ax^2 + Cy^2 + F = 0.$$

Парабола, отнесенная къ діаметру и касательной, проведенной къ концу этого діаметра.

139. Парабола не имѣетъ сопряженныхъ діаметровъ; но если за начало координатъ возьмемъ точку, въ которой діаметръ пересѣкаетъ кривую, то постоянный членъ F уравненія (17) будетъ нуль; кромѣ того извѣстно, что прямая, параллельная діаметру, пересѣкаетъ кривую только въ одной точкѣ; такимъ образомъ, каждой величинѣ y соотвѣтствуетъ одна величина x; для чего необходимо, чтобы $A = 0$. Слѣдовательно, уравненіе параболы будетъ вида

$$(19) \quad Cy^2 + Dx = 0,$$

Замѣтимъ, что ось y-овъ есть не что иное, какъ касательная, проведенная въ началѣ координатъ. Уравненія (18) и (19) относятся къ безконечному числу системъ косоугольныхъ осей и къ одной системѣ прямоугольныхъ.

ГЛАВА III.

Упрощеніе уравненія второй степени.

140. Чтобы легче было изучать свойства кривой втораго порядка, надобно по возможности упростить ея уравненіе, отнеся ее къ прилично выбраннымъ осямъ координатъ. Въ предъидущей главѣ мы видили, что уравненіе второй степени всегда можно привести къ одному изъ двухъ видовъ

$$(\alpha)\ Ax^2 + Cy^2 + F = 0, \quad (\beta)\ Cy^2 + Dx = 0.$$

Если кривая будетъ эллипсъ или гипербола, то уравненіе ея приведемъ къ виду (α), принимая за оси координатъ систему какихъ-нибудь двухъ сопряженныхъ діаметровъ; тогда вообще координаты будутъ косоугольныя; онѣ будутъ прямоугольныя, когда кривую отнесемъ къ двумъ осямъ. Если кривая будетъ парабола, то уравненіе ея приведется къ виду (β), принимая за ось x-овъ какой-нибудь діаметръ, а за ось y-овъ касательную, проведенную къ концу этого діаметра; если пожелаемъ, чтобы эти координаты были прямоугольныя, то за ось x-овъ надобно взять ось кривой.

Съ помощію этихъ двухъ видовъ уравненій въ прямоугольныхъ коордипахъ, мы докажемъ большую часть свойствъ кривыхъ втораго порядка. Теперь мы покажемъ, какъ упрощается уравненіе. Пусть

$$(1) \qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

будетъ уравненіе второй степени относительно прямоугольныхъ координатъ; если бы оси были косоугольныя, то первое преобразованіе будетъ состоять въ томъ, чтобы сдѣлать ихъ прямоугольными.

Эллипсъ и гипербола.

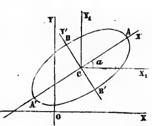
141. Разсмотримъ сперва случай, когда $B^2 - 4AC$ не равно нулю; въ этомъ случаѣ кривая имѣетъ только одинъ центръ, координаты кото-

раго a и b удовлетворяютъ двумъ уравненіямъ (§ 128)

$$2Aa + Bb + D = 0, \quad Ba + 2Cb + E = 0.$$

Перенесемъ оси параллельно самимъ себѣ въ центръ C (*фиг.* 78); отъ этого, какъ мы знаемъ, члены второй степени не перемѣнятся, а члены первой степени уничтожатся; постоянный же членъ F_1 новаго уравненія опредѣляется изъ формулы $F_1 = \frac{Da + Eb}{2} + F$. Отъ такой перемѣны координатъ уравненіе кривой упростится, и мы получимъ

Фиг. 78.



(2) $\quad Ax_1^2 + Bx_1y_1 + Cy_1^2 + F_1 = 0.$

Полагая оси прямоугольными, повернемъ ихъ около центра C на уголъ α такъ, чтобы онѣ совпали съ осями кривой; для этого мы имѣемъ формулы преобразованія

$$x_1 = x' \cos\alpha - y' \sin\alpha; \quad y_1 = x' \sin\alpha + y' \cos\alpha.$$

Внеся эти величины въ уравненіе (2), получимъ новое уравненіе

(3) $(A\cos^2\alpha + C\sin^2\alpha + B\sin\alpha\cos\alpha)x'^2 + (A\sin^2\alpha + C\cos^2\alpha - B\sin\alpha\cos\alpha)y'^2$
$+ [2(C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)]\, x'y' + F_1 = 0.$

Уголъ α можно выбрать такъ, чтобы коеффиціентъ при $x'y'$ обращался въ нуль; для этого надобно положить

(4) $$2(C - A)\sin\alpha\cos\alpha + B(\cos^2\alpha - \sin^2\alpha) = 0,$$

или

(5) $$B\,\mathrm{tang}^2\alpha + 2(A - C)\,\mathrm{tang}\,\alpha - B = 0.$$

Это уравненіе второй степени одинаково съ уравненіемъ (15) § 136, которое опредѣляетъ направленія осей кривой. Но уравненіе (4) можно рѣшить проще, представивъ его въ видѣ

$$(C - A)\sin 2\alpha + B\cos 2\alpha = 0;$$

откуда

(6) $$\mathrm{tang}\,2\alpha = \frac{B}{A - C}.$$

Если мы исключимъ случай круга, для котораго въ одно время имѣемъ $B=0$ и $A=C$, то уравненіе (6) допускаетъ положительное рѣшеніе ω, которое меньше π, а различныя величины угла 2α, удовлетворяющія этому уравненію, заключаются въ формулѣ

$$2\alpha=\omega+k\pi,$$

гдѣ k означаетъ какое-нибудь цѣлое число положительное или отрицательное; отсюда находимъ

$$\alpha=\frac{\omega}{2}+k\frac{\pi}{2}.$$

Различныя величины α даютъ для оси CX' только четыре различныя направленія; эти четыре направленія противоположны другъ другу по два, и составляютъ двѣ перпендикулярныя прямыя. Для α мы возьмемъ величину $\frac{\omega}{2}$, которая всегда положительна и меньше $\frac{\pi}{2}$. Тогда членъ, въ который входитъ $x'y'$, уничтожится въ уравненіи (3); остается вычислить коэффиціенты при членахъ x'^2 и y'^2. Если положимъ

$$M=A\cos^2\alpha+C\sin^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha,$$
$$N=A\sin^2\alpha+C\cos^2\alpha-B\sin\alpha\cos\alpha;$$

то получимъ

$$M+N=A+C,$$

$$M-N=(A-C)(\cos^2\alpha-\sin^2\alpha)+2B\sin\alpha\cos\alpha=(A-C)\cos2\alpha+B\sin2\alpha.$$

Изъ уравненія (6) находимъ

$$\sin 2\alpha=\frac{B}{\pm\sqrt{B^2+(A-C)^2}},\quad \cos 2\alpha=\frac{A-C}{\pm\sqrt{B^2+(A-C)^2}};$$

слѣдовательно,

$$M-N=\pm\sqrt{B^2+(A-C)^2}.$$

Такимъ образомъ оба коэффиціента M и N вычислимъ посредствомъ формулъ

$$(7)\qquad \begin{cases} M+N=A+C \\ M-N=\pm\sqrt{B^2+(A-C)^2}. \end{cases}$$

Такъ какъ величину 2α мы взяли положительную и меньшую π, то $\sin 2\alpha$ есть величина положительная; поэтому передъ корнемъ надо по-

ставить знакъ, который имѣетъ B. Такимъ образомъ уравненіе кривой приводится къ простому виду

$$(8) \qquad Mx'^2 + Ny'^2 + F_1 = 0.$$

Если мы оба уравненія (7) возвысимъ въ квадратъ и вычтемъ, то получимъ

$$4NM = 4AC - B^2.$$

Уравненіе (8) выразитъ эллипсъ или гиперболу, смотря по тому, будутъ ли оба коэффиціенты имѣть одинаковые или разные знаки.

Парабола.

142. Если $B^2 - 4AC = 0$, то члены второй степени даннаго уравненія составятъ полный квадратъ; дѣйствительно, замѣнивъ A его величиною $\frac{B^2}{4C}$, получимъ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = C\left(y^2 + \frac{B}{C}xy + \frac{B^2}{4C^2}x^2\right) = C\left(y + \frac{B}{2C}x\right)^2,$$

и уравненіе можно написать такъ

$$C\left(y + \frac{B}{2C}x\right)^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Повернемъ оси координатъ около начала на уголъ α (*фиг.* 72). Съ помощію формулъ преобразованія

$$x = x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha, \quad y = x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha;$$

данное уравненіе обратится въ

$$(9) \qquad C\left[\left(\cos\alpha - \frac{B}{2C}\sin\alpha\right)y_1 + \left(\sin\alpha + \frac{B}{2C}\cos\alpha\right)x_1\right]^2$$

$$+ (D\cos\alpha + E\sin\alpha)x_1 + (E\cos\alpha - D\sin\alpha)y_1 + F = 0.$$

Уголъ α можно выбрать такъ, чтобы коэффиціентъ при x_1 или y_1 въ многочленѣ, который возвышается въ квадратъ, обратился въ нуль; положимъ, напримѣръ

$$\sin\alpha + \frac{B}{2C}\cos\alpha = 0,$$

откуда

(10) $$\operatorname{tang}\alpha = -\frac{B}{2C};$$

тогда уравненіе (9) упростится и получитъ видъ

(11) $$Ny_1^2 + Px_1 + Qy_1 + F = 0.$$

Мы имѣемъ

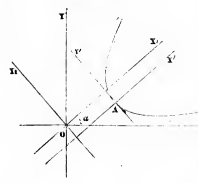
$$N = C\left(\cos\alpha - \frac{B}{2C}\sin\alpha\right)^2 = C\left(\cos\alpha + \operatorname{tang}\alpha\sin\alpha\right)^2 = \frac{C}{\cos^2\alpha},$$

и слѣдовательно, $N = \frac{B^2+4C^2}{4C} = A + C$. Что же касается коеффиціентовъ P и Q, то мы ихъ получимъ, замѣнивъ $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ ихъ величинами; такимъ образомъ, найдемъ

$$P = \frac{2CD - BE}{\pm\sqrt{4C(A+C)}}, \qquad Q = \frac{2CE + BD}{\pm\sqrt{4C(A+C)}}.$$

Одна изъ величинъ α, опредѣляемыхъ уравненіемъ (10), положительна и меньше π; поэтому если возьмемъ эту величину, то $\sin\alpha$ будетъ величина положительная; слѣдоват. корень надобно взять съ знакомъ обратнымъ знаку B. Если коеффиціентъ P равенъ нулю, то уравненіе (11), не заключая больше x_1, выразитъ только двѣ прямыя, параллельныя оси OX_1.

Фиг. 79.



Если же этотъ коеффиціентъ не равенъ нулю, то перемѣщаемъ оси параллельно самимъ себѣ; положивъ $x_1 = a + x'$, $y_1 = b + y'$, уравненіе (11) обратится въ

$$Ny'^2 + Px' + (2Nb + Q)y' + (Nb^2 + Pa + Qb + F) = 0.$$

Координаты a и b новаго начала A мы выберемъ такимъ образомъ, чтобы коеффиціентъ при y' и постоянный членъ

$$2Nb + Q = 0,\ Nb^2 + Pa + Qb + F = 0,$$

обращались въ нуль; отсюда находимъ для a и b величины конечныя и опредѣленныя, и уравненіе получитъ простой видъ

(12) $$Ny'^2 + Px' = 0.$$

Потомъ оси координатъ поворачиваемъ около начала такимъ образомъ, чтобы ось OX_1 сдѣлалась параллельною оси параболы. Затѣмъ оси перемѣщаемъ параллельно самимъ себѣ въ вершину A параболы. Такимъ образомъ, парабола будетъ отнесена къ ея вершинѣ и къ касательной, проведенной къ вершинѣ.

143. *Замѣчаніе*. Для упрощенія уравненія второй степени, мы предполагали оси прямоугольными; если же оси будутъ косоугольныя, образующія между собою уголъ θ, то кривую можно отнести къ прямоугольнымъ координатамъ, взявъ за ось x-овъ прежнюю ось, а за ось y-овъ прямую, перпендикулярную къ оси x-овъ. Формулы преобразованія въ этомъ случаѣ будутъ

$$x = \frac{x' \sin\theta - y' \cos\theta}{\sin\theta}, \quad y = \frac{y'}{\sin\theta};$$

коэффиціенты при членахъ второй степени въ новомъ уравненіи будутъ

$$A' = A,\ B' = \frac{B \sin\theta - 2A \sin\theta \cos\theta}{\sin^2\theta},\ C' = \frac{C + A\cos^2\theta - B\cos\theta}{\sin^2\theta}.$$

Замѣтимъ, что эти коэффиціенты удовлетворяютъ слѣдующимъ отношеніямъ

$$\frac{A + C - B\cos\theta}{\sin^2\theta} = A' + C', \quad \frac{B^2 - 4AC}{\sin^2\theta} = B'^2 - 4A'C'.$$

Такъ какъ величины $A' + C'$ и $B'^2 - 4A'C'$, которыя равны $M + N$ и $-4MN$, остаются одинаковыми при всякой системѣ прямоугольныхъ осей, то отсюда слѣдуетъ, что величины

$$\frac{A + C - B\cos\theta}{\sin^2\theta}, \quad \frac{B^2 - 4AC}{\sin^2\theta}$$

остаются постоянными при всякой системѣ косоугольныхъ осей.

Примѣры.

1. $2x^2 - 3xy + 3y^2 + x - 7y + 1 = 0$.

Кривая есть эллипсъ, потому что величина $B^2 - 4AC$ отрицательная. Чтобы найти координаты центра, приравняемъ нулю двѣ частныя производныя

$$4x - 3y + 1 = 0,\ -3x + 6y - 7 = 0;$$

откуда

$$x = 1,\ y = \frac{5}{3},\ F_1 = -\frac{13}{3}.$$

Если оси перенесемъ параллельно самимъ себѣ въ центръ C (*фиг.* 78), то уравненіе обратится въ

$$2x_1^2 - 3x_1y_1 - \frac{13}{3} = 0.$$

Повернемъ теперь оси на уголъ α, опредѣляемый изъ формулы

$$\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{B}{A - C} = 3.$$

Рѣшивъ уравненіе помощію таблицъ, получимъ
$2\alpha = 71^\circ 33' 54''$ или $\alpha = 35^\circ 46' 57''$.

Уголъ α можно найти также графически; на осяхъ x и y отъ начала C откладываемъ линіи соотвѣтственно равныя 1 и 3; тогда діагональ прямоугольника, построеннаго на двухъ линіяхъ, будетъ составлять съ осью x уголъ, тангенсъ котораго равенъ 3; слѣдовательно, ось CX′ раздѣляетъ этотъ уголъ пополамъ. Потомъ M и N опредѣлимъ изъ формулъ

$$M + N = 5,\ M - N = -\sqrt{10},$$

потому что B отрицательно; отсюда

$$M = \frac{5 - \sqrt{10}}{2},\ N = \frac{5 + \sqrt{10}}{2},$$

и уравненіе кривой будетъ

$$(5 - \sqrt{10})x'^2 + (5 + \sqrt{10})y'^2 = \frac{26}{3};$$

кривая на осяхъ отсѣкаетъ линіи

$$CA = \sqrt{\frac{26}{3(5 - \sqrt{10})}},\ CB = \sqrt{\frac{26}{3(5 + \sqrt{10})}}.$$

II. $2x^2 - 5xy + 5y - 1 = 0$.

Кривая есть гипербола (*фиг.* 80). Координаты центра, которые опредѣляются изъ уравненій

$$4x - 5y = 0,$$
$$-5x + 5 = 0;$$

будутъ

$$x = 1,\ y = \frac{4}{5},\ \text{откуда}\ F_1 = 1.$$

Если начало перенесемъ въ центръ, то уравненіе будетъ

$$2x_1^2 - 5x_1y_1 + 1 = 0.$$

Фиг. 80.

Уголъ α опредѣляется изъ формулы $\operatorname{tang} 2\alpha = -\frac{5}{2}$, и мы получимъ $M + N = 2$, $M - N = -\sqrt{29}$, откуда

$$M = \frac{2 - \sqrt{29}}{2}, \qquad N = \frac{2 + \sqrt{29}}{2}.$$

Уравненіе кривой, отнесенной къ ея осямъ, будетъ

$$(2 - \sqrt{29})\,x'^2 + (2 + \sqrt{29})\,y'^2 + 2 = 0.$$

Такъ какъ первоначальное уравненіе не содержитъ члена y^2, то одна изъ асимптотъ параллельна оси OY (*фиг.* 80).

III. $4x^2 - 12xy + 9y^2 - 36x + 100 = 0.$

Кривая есть парабола (*фиг.* 79). Члены второй степени составляютъ точный квадратъ; и уравненіе можно написать такъ

$$9\left(y - \frac{2}{3}x\right)^2 - 36x + 100 = 0.$$

Повернемъ оси координатъ на уголъ α, опредѣляемый уравненіемъ $\operatorname{tang}\alpha = -\frac{B}{2C} = \frac{12}{18} = \frac{2}{3}$, откуда $\alpha = 34^\circ\,41'\,25''$, тогда получимъ

$$N = 13,\ \cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{13}},\quad \sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{13}},$$

$$P = -\frac{108}{\sqrt{13}},\quad Q = \frac{72}{\sqrt{13}}.$$

Слѣдовательно, уравненіе кривой, отнесенной къ осямъ OX_1 и OY_1, будетъ

$$13y_1^2 - \frac{108}{\sqrt{13}}x_1 + \frac{72}{\sqrt{13}}y_1 + 100 = 0.$$

Координаты вершины мы найдемъ изъ этого уравненія и уравненія $26y_1 + \frac{72}{\sqrt{13}} = 0$. Такимъ образомъ получимъ

$$y_1 = -\frac{36}{13\sqrt{13}},\ x_1 = \frac{3901}{27.\,13\sqrt{13}}.$$

Если перенесемъ оси въ эту точку, то уравненіе обратится въ

$$13y'^2 - \frac{189}{\sqrt{13}}x' = 0.$$

ГЛАВА IV.

Эллипсъ.

144. Построимъ кривую, выражаемую уравненіемъ

$$Mx^2 + Ny^2 + F_1 = 0,$$

въ которомъ оба коеффиціента M и N имѣютъ одинаковый знакъ, наприм. $+$.

Если постоянное F_1 будетъ величина положительная, то уравненіе не будетъ удовлетворяться дѣйствительными величинами x и y; поэтому оно не будетъ выражать никакого геометрическаго мѣста.

Если F_1 будетъ равна нулю, то уравненіе, удовлетворяясь величинами $x = 0$, $y = 0$, выразитъ только одну точку, начало координатъ 0.

Разсмотримъ теперь случай, когда F_1 будетъ величина отрицательная; положимъ $F_1 = -H$, тогда уравненіе обратится въ

$$Mx^2 + Ny^2 = H.$$

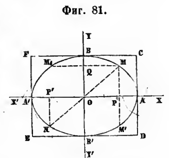
Опредѣливъ y, получимъ

$$y = \pm\sqrt{\frac{H - Mx^2}{N}}.$$

Чтобы ордината была величина дѣйствительная, необходимо, чтобы числовая величина абсциссы была менѣе $\sqrt{\frac{H}{M}}$; отложимъ на оси $X'X$ отъ на-

чала координатъ двѣ линіи OA, OA', равныя $\sqrt{\frac{H}{M}}$, и черезъ точки A, A' проведемъ линіи, параллельныя оси YY'; тогда вся кривая будетъ расположена между этими двумя параллельными линіями (*фиг.* 81). Каждой абсциссѣ OP, заключающейся между этими предѣлами, соотвѣтствуютъ двѣ ординаты PM, PM', равныя и съ обратными знаками. При $x=0$, ордината достигаетъ самой большей числовой величины $\sqrt{\frac{H}{N}}$; отложимъ на YY' отъ начала координатъ двѣ линіи OB, OB' равныя $\sqrt{\frac{H}{N}}$, и черезъ точки B, B' проведемъ двѣ линіи, параллельныя оси X'X; тогда вся кривая будетъ расположена между этими двумя новыми параллельными линіями, и слѣдовательно, кривая заключается въ прямоугольникѣ CDFF, образуемомъ этими параллельными.

Фиг. 81.



Если для краткости черезъ a и b означимъ двѣ величины $\sqrt{\frac{H}{M}}$, $\sqrt{\frac{H}{N}}$, то уравненіе приметъ видъ

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,$$

откуда

$$(2) \quad y=\pm\frac{a}{b}\sqrt{a^2-x^2}.$$

При возрастаніи x отъ 0 до a, числовая величина y уменьшается отъ b до нуля; и такимъ образомъ мы получимъ, въ слѣдствіе двойнаго знака, двѣ дуги кривой BMA, B'M'A'. При измѣненіи x отъ 0 до $-a$, числовая величина y уменьшается также отъ b до нуля, и мы получаемъ двѣ другія дуги BM_1A', B'NA', равныя первымъ. Эти четыре равныя дуги, составляютъ эллипсъ.

Прямая A'A есть *ось* эллипса, потому что каждой абсциссѣ OP соотвѣтствуютъ двѣ равныя и съ обратными знаками ординаты MP, PM'. Прямая B'B есть также *ось* эллипса, потому что, рѣшивъ уравненіе относительно x, точно также увидимъ, что каждой ординатѣ OQ соотвѣтствуютъ двѣ равныя и съ обратными знаками абсциссы QM, QM_1. Точки A, A', B, B', въ которыхъ оси пересѣкаютъ эллипсъ, называются *вершинами* эллипса. Оси A'A, B'B соотвѣтственно равны $2a$ и $2b$.

Если оси будутъ равны, то эллипсъ обратится въ кругъ.

Очевидно, что начало координатъ 0 есть центръ эллипса; дѣйствительно, пусть x, y будутъ координаты какой-нибудь точки M эллипса; ясно, что уравненіе (1) удовлетворяется также величинами $-x$, $-y$; слѣдовательно, существуетъ вторая точка N эллипса, координаты которой $-\mathrm{OP}'$, $-\mathrm{P'N}$ соотвѣтственно равны координатамъ OP, PM точки M, но имѣютъ противоположное направленіе. Изъ равенства треугольниковъ OPM и OP′N заключаемъ, что $\mathrm{OM}=\mathrm{ON}$; и такъ какъ углы POM, P′ON равны, то линія MON есть прямая линія. Такимъ образомъ точки M и N эллипса симметричны по двѣ относительно точки O; слѣдовательно, точка 0 есть центръ эллипса.

145. Чтобы изучить, какимъ образомъ измѣняется разстояніе центра отъ различныхъ точекъ эллипса, т. е. радіусъ эллипса, найдемъ уравненіе эллипса въ полярныхъ координатахъ, принимая центръ 0 за полюсъ, а ось OA кривой за полярную ось. Замѣнивъ въ уравненіи (1) x и y ихъ величинамъ $\rho\cos\omega$ и $\rho\sin\omega$, получимъ

$$(3)\qquad \frac{\rho^2\cos^2\omega}{a^2}+\frac{\rho^2\sin^2\omega}{b^2}\mp 1.$$

Положимъ, что $a>b$, и представимъ уравненіе въ видѣ

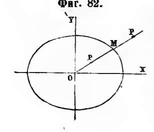
$$\frac{1}{\rho^2}=\frac{1}{a^2}+\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)\sin^2\omega.$$

Если мы будемъ измѣнять ω отъ 0 до $\frac{\pi}{2}$, то величина $\frac{1}{\rho^2}$ будетъ возрастать и слѣдовательно ρ будетъ постоянно уменьшаться отъ a до b. Наибольшая величина будетъ a, и наименьшая b.

146. Означимъ черезъ x и y координаты какой-нибудь точки плоскости и разсмотримъ многочленъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1.$$

Фиг. 82.



Для какой-нибудь точки M, находящейся на эллипсѣ (*фиг.* 82), многочленъ этотъ равенъ нулю. Вообразимъ себѣ, что движущаяся точка P проходитъ черезъ точку M и удаляется по продолженію радіуса OM; такъ какъ обѣ координаты x и y увеличиваются въ абсолютной величинѣ, то многочленъ возрастаетъ неопредѣленно; слѣдовательно, онъ полу-

чаетъ положительныя, возрастающія величины. Наоборотъ, если движущаяся точка приближается къ центру, то многочленъ уменьшается и получаетъ отрицательныя величины. Такимъ образомъ, многочленъ $\frac{x^2}{a^2} +$ $\frac{y^2}{b} - 1$ будетъ отрицательный для всѣхъ точекъ, находящихся внутри эллипса, длят очекъ, находящихся на эллипсѣ, онъ равенъ нулю, и, наконецъ, онъ будетъ положительный для всѣхъ точекъ, находящихся внѣ эллипса.

147. *Квадраты ординатъ, перпендикулярныхъ къ одной изъ осей эллипса, пропорціональны произведенію соотвѣтствующихъ отрѣзковъ этой оси.*

Въ самомъ дѣлѣ, если черезъ x и y означимъ координаты какой-нибудь точки M эллипса (*фиг.* 81), то, въ слѣдствіе уравненія (2), получимъ

$$\frac{y^2}{a^2 - x^2} = \frac{b^2}{a^2}, \quad \text{или} \quad \frac{y^2}{(a-x)(a+x)} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Но отрѣзки AP, A'P оси AA' соотвѣтственно равны $a - x$ и $a + x$; слѣдовательно, получимъ

$$\frac{MP^2}{AP \times A'P} = \frac{b^2}{a^2}.$$

Итакъ квадратъ ординаты находится въ постоянномъ отношеніи съ произведеніемъ отрѣзковъ, образуемыхъ на оси.

148. *Ординаты, перпендикулярныя къ большей оси эллипса, относятся къ соотвѣтствующимъ ординатамъ круга, описаннаго на этой оси, какъ на діаметрѣ, такъ какъ малая ось къ большей.*

Фиг. 83.

Пусть AA' будетъ большая ось эллипса (*фиг.* 83); на этой оси, какъ на діаметрѣ, опишемъ кругъ; ординатѣ MP эллипса соотвѣтствуетъ ордината M_1P круга. Уравненіе (2) можно написать въ видѣ

$$\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a};$$

но $\sqrt{a^2 - x^2}$ выражаетъ ординату M_1P круга; слѣдовательно,

$$\frac{MP}{M_1P} = \frac{b}{a}.$$

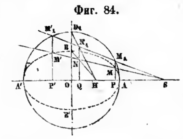
Малая ось имѣетъ то же свойство; ордината MQ, перпендикулярная къ малой оси, относится къ соотвѣтствующей ординатѣ M_2Q круга, описаннаго на этой оси, какъ на діаметрѣ, какъ большая ось къ малой оси.

Эллипсъ есть ортогональная проекція круга. Представимъ себѣ, что кругъ AB_1A' мы повернули около оси AA' на такой уголъ φ, что $\cos\varphi = \frac{b}{a}$; тогда ордината PM_1 круга повернется около точки P, оставаясь перпендикулярною къ оси AA'. Въ этомъ положеніи она проектируется на прямую PM. Чтобы получить длину проекціи, надобно линію PM_1 умножить на $\cos\varphi$, или на $\frac{b}{a}$; тогда мы получимъ ординату PM эллипса. Такимъ образомъ, проекція точки M_1 круга есть точка M эллипса: и такъ какъ каждая точка круга проектируется въ соотвѣтствующую точку эллипса, то отсюда слѣдуетъ, что эллипсъ есть проекція круга. Можно также кругъ разсматривать, какъ ортогональную проекцію эллипса. Представимъ, что мы повернули эллипсъ около оси BB' на уголъ φ, косинусъ котораго равенъ $\frac{b}{a}$; тогда ордината QM эллипса будетъ имѣть проекціею ординату QM_2 круга, описаннаго на BB', какъ на діаметрѣ, и малый кругъ будетъ проекціею эллипса.

149. *Построеніе эллипса по точкамъ.* Изъ предъидущаго мы выводимъ очень простой способъ строить эллипсъ по точкамъ. На каждой изъ двухъ осей эллипса, какъ на діаметрѣ, описываемъ кругъ (*фиг.* 83); изъ центра проводимъ какой-нибудь радіусъ, который пересѣчетъ оба круга въ точкахъ M_1 и M_2; чрезъ точку M_1 проводимъ линію, параллельную малой оси; чрезъ точку M_2 линію, параллельную большой оси; точка пересѣченія M этихъ двухъ прямыхъ будетъ точка эллипса. Найдя такимъ образомъ достаточное число точекъ, проводимъ черезъ нихъ непрерывную линію, которая и будетъ эллипсъ.

150. *Построить точки пересѣченія эллипса съ прямою.* Полезно бываетъ опредѣлить точки, въ которыхъ данная прямая MM′ пересѣкаетъ эллипсъ, опредѣляемый по его двумъ осямъ AA′, BB′ (*фиг.* 84), не чертивъ эллипсъ. Эллипсъ, какъ мы сказали, можно разсматривать какъ ортогональную проекцію круга AB_1A', описаннаго на большой оси AA', какъ на діаметрѣ, если мы его повернемъ около AA' на уголъ φ, косинусъ котораго равенъ $\frac{b}{a}$.

Фиг. 84.



Найдемъ въ плоскости круга прямую M_1M_1', проекція которой была бы MM' въ плоскости эллипса; пусть N будетъ какая-нибудь точка прямой MM'; соотвѣтствующая точка N_1 находится на ординатѣ NQ на такомъ разстояніи, что

$$\frac{NQ}{N_1Q} = \cos\varphi = \frac{b}{a};$$

чтобы ее опредѣлить, проводимъ прямую BN до пересѣченія ея съ осью AA' въ точкѣ H; прямая B_1H, имѣя проекцію по HB, пересѣкаетъ ординату QN къ точкѣ N_1. Подобнымъ образомъ получимъ другую какую-нибудь точку прямой M_1M_1'; но лучше взять точку S, въ которой прямая MM' пересѣкаетъ ось; прямая SN_1 проекціею имѣетъ данную прямую въ плоскости эллипса. Эта прямая SN_1 пересѣкаетъ кругъ въ двухъ точкахъ M_1, M_1'; ординаты M_1P, $M_1'P'$ опредѣлятъ на данной прямой двѣ точки M, M′, въ которыхъ эта прямая пересѣкаетъ эллипсъ.

Касательная.

151. Мы нашли (§ 125) уравненіе касательной къ кривой втораго порядка; если уравненіе эллипса представимъ въ простой формѣ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0,$$

то уравненіе касательной, проведенной въ точкѣ M, координаты которой суть x, y, будетъ

$$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} - 1 = 0. \tag{4}$$

Угловой коеффиціентъ касательной есть $-\frac{b^2x}{a^2y}$. Очевидно, что въ точкахъ A и A′ касательная перпендикулярна къ оси A′A; въ точкахъ B и B′ она ей параллельна, и при движеніи точки прикосновенія по эллипсу отъ A къ B, касательная составляетъ съ A′A тупой уголъ, который увеличивается отъ $\frac{\pi}{2}$ до π.

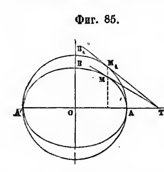
Такъ какъ нормаль перпендикулярна къ касательной, то ея уравненіе будетъ

$$Y - y = \frac{a^2y}{b^2x}(X - x).$$

152. *Построеніе касательной въ точкѣ эллипса.* Если въ уравне-

ніи касательной сдѣлаемъ $Y = 0$, то получимъ абсциссу $X = \frac{a^2}{x}$ точки T, въ которой касательная пересѣкаетъ продолженіе большой оси (*фиг.* 85).

Фиг. 85.

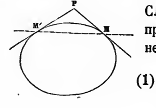


Такъ какъ эта величина OT не зависитъ отъ малой оси $2b$ и ординаты y точки прикосновенія, то отсюда слѣдуетъ, что, построивъ на оси A'A нѣсколько эллипсовъ, касательныя въ точкахъ, которыя имѣютъ одну и ту же абсциссу, будутъ проходить черезъ одну и ту же точку T, находящуюся на продолженіи оси A'A. Но между этими эллипсами находится кругъ AB_1A'. Чтобы построить касательную къ эллипсу въ точкѣ M, проведемъ касательную къ кругу въ точкѣ M_1, находящейся на одной и той же ординатѣ; соединяемъ точку M съ точкою T, въ которой касательная къ кругу пересѣкаетъ продолженіе оси A'A; прямая MT, полученная такимъ образомъ, будетъ касательная къ эллипсу.

Изъ этого построенія видно, что касательную проведенную къ эллипсу въ точкѣ M надобно разсматривать, какъ проекцію касательной, проведенной къ кругу въ соотвѣтствующей точкѣ M_1. Дѣйствительно если плоскость круга повернемъ около оси AA' на уголъ φ, то точка T, въ которой касательная M_1T пересѣкаетъ ось, остается неподвижною; точка же M_1 будетъ имѣть проекціею точку M, а прямая M_1T будетъ имѣть проекціею MT, т. е. касательную къ эллипсу.

153. *Провести касательную черезъ внѣшнюю точку* P. Означимъ черезъ x_1 и y_1 координаты точки P (*фиг.* 86). Мы нашли (§ 126) уравненіе хорды прикосновенія MM'. Слѣдовательно, опредѣленіе точекъ прикосновенія приводится къ рѣшенію двухъ совмѣстныхъ уравненій

Фиг. 86.



(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

(5) $$\frac{xx_1}{a^2} + \frac{yy_1}{b^2} = 1.$$

Исключивъ y, получимъ уравненіе второй степени

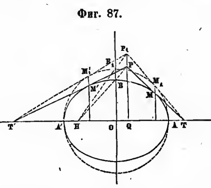
$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2}\right) - 2\frac{xx_1}{a^2} + \left(1 - \frac{y_1^2}{b^2}\right) = 0,$$

корни котораго выражаютъ абсциссы точки прикосновенія M и M' двухъ

касательныхъ, проведенныхъ изъ точки P. Корни этого уравненія, въ которомъ $\frac{x}{a}$ можно принимать за неизвѣстное, будутъ дѣйствительны, если удовлетворяется условіе $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} - 1 > 0$, т. е. если точка P находится внѣ эллипса.

Легко построить геометрически касательныя, проведенныя изъ точки P, разсматривая эллипсъ какъ проекцію круга AB_1A (*фиг.* 87). Отыщемъ въ плоскости круга такую точку P_1, которая имѣла бы проекціею точку P въ плоскости эллипса. Проведемъ въ плоскости эллипса прямую PB и продолжимъ до пересѣченія ея съ осью въ точкѣ H; прямая HB_1, проекція которой есть HB, пройдетъ черезъ точку P_1 и опредѣлитъ эту точку. Изъ точки P_1 проведемъ къ кругу касательныя P_1M_1 и $P_1M'_1$ и продолжимъ ихъ до пересѣченія съ осью въ точкахъ T и T'; прямыя PT и PT', которыя суть проекціи касательныхъ къ кругу, будутъ касательными къ эллипсу, и точки прикосновенія M и M' будутъ находиться на ординатахъ точекъ M_1, M'_1. Для этихъ построеній нѣтъ необходимости, чтобы эллипсъ былъ начерченъ.

Фиг. 87.



154. *Провести касательную параллельно данной прямой.* Пусть $y = mx$ будетъ уравненіе данной прямой OL, которая, положимъ, проведена черезъ центръ (*фиг.* 88). Назовемъ черезъ x и y координаты точки прикосновенія M. Эта точка находится на эллипсѣ, поэтому получимъ уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1;$$

Фиг. 88.

такъ какъ угловой коеффиціентъ касательной долженъ быть равенъ m, то получимъ второе уравненіе

$$-\frac{b^2x}{a^2y} = m.$$

Эти два совмѣстныя уравненія опредѣляютъ два неизвѣстныя x и y; первое выражаетъ данный эллипсъ, второе прямую MM', проходящую

черезъ центръ; точки, въ которыхъ эта прямяя пересѣкаетъ эллипсъ, будутъ точками прикосновенія.

Эти касательныя легко построить геометрически. Отыщемъ прежде въ плоскости круга діаметръ OL_1, который проекціею имѣлъ бы OL въ плоскости эллипса; для этого надобно точку B соединить съ какою-нибудь точкою L прямой OL и продолжить прямую BL до пересѣченія ея съ осью въ точкѣ H; потомъ провести B_1H и взять точку пересѣченія L_1 этой прямой съ ординатою точки L; такъ какъ точка L есть проекція точки L_1, то прямая OL будетъ проекціею OL_1. Проводимъ къ кругу касательныя MT_1, M'_1T', параллельныя OL_1, и черезъ точки T и T', въ которыхъ эти касательныя пересѣкаютъ ось, проводимъ линіи TM, TM', параллельныя прямой OL. Это будутъ искомыя касательныя, потому что проекціи OL, TM прямыхъ параллельныхъ OL_1, TM_1 суть эти же параллельныя. Точки прикосновенія M и M' опредѣляются ординатами точекъ M_1 и M'_1.

155. Уравненіе касательной, проведенной къ аллипсу, можно получить въ другомъ видѣ, который полезно знать. Найдемъ точки пересѣченія эллипса $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ и прямой $y=mx+k$.

Исключивъ y, получимъ уравненіе второй степени

$$\left(\frac{1}{a^2}+\frac{m^2}{b^2}\right)x^2+\frac{2mk}{b^2}x+\left(\frac{k^2}{b^2}-1\right)=0,$$

корни котораго выражаютъ абсциссы точекъ пересѣченія. Если корни этого уравненія будутъ дѣйствительные и не равны, тогда прямая пересѣчетъ эллипсъ въ двухъ точкахъ; это будетъ сѣкущая. Если же корни будутъ равны между собою, что будетъ тогда, когда удовлетворяется условіе $k^2=a^2m^2+b^2$, то обѣ точки пересѣченія сольются, и прямая обратится въ касательную. Замѣнивъ постоянное k его величиною, уравненіе касательной представится въ видѣ

$$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}. \tag{6}$$

Это уравненіе, въ которомъ m есть произвольный параметръ, выражаетъ всѣ касательныя, проведенныя къ эллипсу. Если данъ угловой коэффиціентъ m, т. е. направленіе касательной, то уравненіе будетъ совершенно опредѣлено, и, по причинѣ двойнаго знака, мы получимъ двѣ параллельныя касательныя, находящіяся на равномъ разстояніи отъ центра.

156. Этотъ видъ уравненія касательной бываетъ полезенъ во многихъ случаяхъ. Для примѣра рѣшимъ слѣдующую задачу. Найдемъ геометрическое мѣсто вершины прямаго угла, описаннаго около эллипса. Положимъ, что желаемъ черезъ внѣшнюю точку (*фиг.* 89), координаты которой суть x и y, провести касательныя къ эллипсу. Если касательную выразимъ уравненіемъ

Фиг. 89.

$$Y = mX \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2},$$

то, изъ условія, что касательная должна проходить черезъ точку P, получимъ условное уравненіе

$$y = mx \pm \sqrt{a^2 m^2 + b^2},$$

въ которомъ угловой коэффиціентъ m есть неизвѣстное. Это уравненіе, будучи представлено въ цѣломъ видѣ

$$m^2 (a^2 - x^2) + 2xym + (b^2 - y^2) = 0,$$

есть второй степени; два его корня опредѣляютъ направленія двухъ касательныхъ, проведенныхъ изъ точки P къ эллипсу, а слѣдовательно, опредѣляютъ эти касательныя. Обѣ касательныя, проведенныя черезъ точку P, будутъ перпендикулярны между собою, если произведеніе двухъ величинъ m будетъ равно -1; для этого необходимо, чтобы координаты точки P удовлетворяли соотношенію

$$\frac{b^2 - y^2}{a^2 - x^2} = -1 \text{ или } x^2 + y^2 = a^2 + b^2.$$

Такимъ образомъ, геометрическое мѣсто вершины прямаго угла, описаннаго около эллипса, есть кругъ, описанный около прямоугольника, построеннаго на осяхъ.

Діаметры.

157. Мы нашли (§ 131) общее уравненіе діаметровъ въ кривыхъ втораго порядка. Если означить черезъ $f(x, y) = 0$ уравненіе кривой, и черезъ m угловой коэффиціентъ параллельныхъ хордъ MM′ (*фиг.* 90), то уравненіе діаметра DD′, какъ мы видѣли, будетъ вида

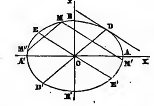
$$f_x' + mf_y' = 0.$$

Такъ какъ эллипсъ отнесенъ къ его осямъ, то уравненіе діаметра будетъ

$$\frac{2x}{a^2}+\frac{2my}{b^2}=0, \text{ или } y=-\frac{b^2}{a^2m}x.$$

Если черезъ m' означимъ угловой коеффиціентъ діаметра DD′ то между направленіемъ хордъ и направленіемъ діаметра получимъ соотношеніе

Фиг. 90.



$$(7) \qquad mm'=-\frac{b^2}{a^2}.$$

Мы видѣли также, что если проведемъ хорды MM″, параллельныя діаметру DD′, то угловой коеффиціентъ діаметра EE′, дѣлящаго эти хорды пополамъ, будетъ m; два діаметра DD′, EE′ составляютъ систему сопряженныхъ діаметровъ, угловые коеффиціенты ихъ m и m' связаны между собой соотношеніемъ (7).

Это соотношеніе показываетъ, что угловые коеффиціенты m и m' имѣютъ обратные знаки, и слѣдовательно, два сопряженные полудіаметры OD и OE, расположенные съ одной стороны большой оси, находятся съ той и другой стороны малой оси; если первый будетъ обращаться отъ положенія OA къ OB, то второй будетъ обращаться отъ положенія OB къ OA′.

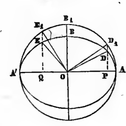
158. Касательная, проведенная въ какой-нибудь точкѣ D эллипса, параллельна діаметру EE′, сопряженному діаметру DD′, проходящему черезъ точку прикосновенія. Дѣйствительно, если черезъ x и y назовемъ координаты точки D, то угловой коеффиціентъ діаметра OD будетъ $m=\frac{y}{x}$; угловой же коеффиціентъ касательной въ точкѣ D есть $m'=-\frac{b^2x}{a^2y}$. Очевидно, что эти два коеффиціента удовлетворяютъ соотношенію $mm'=-\frac{b^2}{a^2}$.

Это можно доказать, вообразивъ, что сѣкущая MM′ двигается параллельно діаметру EE′ и удаляется отъ центра; тогда обѣ точки пересѣченія M и M′ будутъ все болѣе и болѣе приближаться къ срединѣ хорды и наконецъ сольются въ точкѣ D; тогда сѣкущая обратится въ касательную въ точкѣ D.

159. Свойства сопряженныхъ діаметровъ вытекаютъ непосредственно, если эллипсъ мы будемъ разсматривать какъ проекцію круга. Два перпен-

дикулярные между собою діаметра OD_1, OE_1 (*фиг.* 91) въ плоскости круга образуютъ систему сопряженныхъ діаметровъ, потому что каждый изъ нихъ дѣлитъ пополамъ хорды, параллельныя другому; параллельныя хорды проектируются на плоскость эллипса по направленію параллельныхъ хордъ; средина хорды имѣетъ проекцію средину проекціи хорды; слѣдовательно, каждый изъ діаметровъ OD и OE, которые суть проекціи первыхъ, дѣлитъ пополамъ хорды, параллельныя другому; это есть два сопряженные діаметра эллипса.

Фиг. 91.



Отсюда легко находимъ соотношеніе, которое существуетъ между угловыми коэффиціентами m и m' двухъ сопряженныхъ діаметровъ. Если черезъ m_1 и m_1' назовемъ угловые коэффиціенты двухъ сопряженныхъ діаметровъ OD_1, OE_1 круга, то получимъ $m = \frac{b}{a} m_1$, $m' = \frac{b}{a} m'_1$; откуда $mm' = \frac{b^2}{a^2} m_1 m'_1$; такъ какъ сопряженные діаметры круга перпендикулярны между собой, то получимъ $m_1 m_1' = -1$; отсюда $mm' = -\frac{b^2}{a^2}$.

Если данъ діаметръ OD, то можно найти сопряженный OE, не чертя эллипсъ. Построимъ діаметръ OD_1, который проекціею имѣетъ OD; проводимъ діаметръ OE_1, перпендикулярный къ OD_1 и проектируемъ OE_1; проекція OE будетъ искомый діаметръ.

160. *Эллипсъ отнесенный къ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ.* Мы видѣли (§ 138), что, принимая за оси координатъ два сопряженные діаметра DD', EE'' эллипса (*фиг.* 92), уравненіе кривой упрощается и получаетъ видъ

$$Mx'^2 + Ny'^2 = H.$$

Фиг. 92.

Означимъ черезъ $2a'$ и $2b'$ величины этихъ сопряженныхъ діаметровъ; если въ предъидущемъ уравненіи сдѣлаемъ послѣдовательно $y = 0$ и $x = 0$, то получимъ $a'^2 = \frac{H}{M}$, $b'^2 = \frac{H}{N}$; и уравненіе кривой будетъ имѣть видъ

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} = 1. \tag{8}$$

Такимъ образомъ, уравненіе эллипса сохраняетъ тотъ же видъ, будетъ ли

кривая отнесена къ своимъ осямъ или къ системѣ сопряженныхъ діаметровъ.

Тѣ же вычисленія, которыя мы дѣлали для доказательствъ свойствъ эллипса съ помощію уравненія кривой, отнесенной къ ея осямъ, и въ которыхъ мы предполагали координаты ортогональными, можно повторить надъ уравненіемъ кривой, отнесенной къ системѣ сопряженныхъ діаметровъ. Такимъ образомъ, если эллипсъ отнесенъ къ системѣ сопряженныхъ діаметровъ OD и OE, то уравненіе касательной будетъ

$$\frac{x'X'}{a'^2}+\frac{y'Y'}{b'^2}=1.$$

Но уравненіе нормали не будетъ имѣть того же вида, какъ при осяхъ координатъ OA и OB.

161. Если черезъ α и β назовемъ углы, образуемые двумя полудіаметрами OD, OE съ большею осью OA; черезъ a' и b' ихъ величины, то по уравненію (3) (§ 145) получимъ

$$(9)\qquad \frac{a'^2\cos^2\alpha}{a^2}+\frac{a'^2\sin^2\alpha}{b^2}=1,\qquad (10)\quad \frac{b'^2\cos\beta^2}{a^2}+\frac{b'^2\sin^2\beta}{b^2}=1.$$

Такъ какъ оба діаметра сопряженные, то получимъ еще уравненіе.

$$\tang\alpha\tang\beta=-\frac{b^2}{a^2}.$$

или

$$(11)\qquad \frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2}+\frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2}=0.$$

Изъ двухъ угловъ α и β одинъ есть острый, другой тупой; положимъ, что α острый, β тупой. Четыре перемѣнныя α, β, a', b', изъ которыхъ одна произвольная, связаны между собою тремя уравненіями; соединяя эти уравненія выведемъ различныя теоремы.

162. Если обѣ части уравненія (11) умножимъ на $a'b'$, то получимъ

$$\frac{\dfrac{a'\cos\alpha}{a}}{\dfrac{b'\sin\beta}{b}}=\frac{\dfrac{a'\sin\alpha}{b}}{\dfrac{-b'\cos\beta}{a}};$$

каждая изъ этихъ дробей равна такой дроби, у которой числитель есть квадратный корень изъ суммы квадратовъ числителей, а знаменатель квад-

ратный корень изъ суммы квадратовъ знаменателей; по уравненіямъ (9) и (10) эти двѣ суммы равны единицѣ; слѣдовательно,

$$\frac{\frac{a' \cos\alpha}{a}}{\frac{b' \sin\beta}{b}} = \frac{\frac{a' \sin\alpha}{b}}{\frac{-b' \cos\beta}{a}} = 1;$$

откуда

$$\frac{a' \cos\alpha}{a} = \frac{b' \sin\beta}{b}, \quad \frac{a' \sin\alpha}{b} = -\frac{b' \cos\beta}{a}.$$

Если въ уравненіи (9) $\frac{a' \sin\alpha}{b}$ замѣнимъ равною ей величиною $-\frac{b' \cos\beta}{a}$ то получимъ

(12) $$a'^2 \cos^2\alpha + b'^2 \cos^2\beta = a^2.$$

Если въ томъ же уравненіи $\frac{a' \cos\alpha}{a}$ замѣнимъ черезъ $\frac{b' \sin\beta}{b}$, то найдемъ

(13) $$a'^2 \sin^2\alpha + b'^2 \sin^2\beta = b^2.$$

Изъ двухъ уравненій (12) и (13) видно, *что сумма квадратовъ проекцій двухъ какихъ-нибудь сопряженныхъ діаметровъ на каждую изъ осей есть величина постоянная и равна квадрату этой оси.*

Сложивъ уравненія (12) и (13), получимъ

(14) $$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2,$$

т. е. *сумма квадратовъ двухъ какихъ-нибудь сопряженныхъ діаметровъ есть величина постоянная и равна суммѣ квадратовъ осей.*

163. Разложивъ каждый членъ уравненія (9) на два множителя, представимъ его въ видѣ

$$\frac{a' \cos\alpha}{a} \cdot \frac{a' \cos\alpha}{a} + \frac{a' \sin\alpha}{b} \cdot \frac{a' \sin\alpha}{b} = 1;$$

если множители $\frac{a' \cos\alpha}{a}$, $\frac{a' \sin\alpha}{b}$ замѣнимъ черезъ $\frac{b' \sin\beta}{b}$, $-\frac{b' \cos\beta}{a}$, то получимъ

$$\frac{a' b' (\sin\beta \cos\alpha - \sin\alpha \cos\beta)}{ab} = 1;$$

или

(15) $$a' b' \sin(\beta - \alpha) = ab.$$

Произведеніе $a'b' \sin(\beta - \alpha)$ выражаетъ площадь параллелограмма ODKE (*фиг.* 92); умноживъ на 4, получимъ площадь описаннаго параллелограмма FGHK. Такимъ образомъ, *площадь параллелограмма, построеннаго на двухъ какихъ-нибудь сопряженныхъ діаметрахъ, есть величина постоянная и равна площади прямоугольника, построеннаго на осяхъ.*

Вписанный параллелограммъ DED'E', который получимъ, когда соединимъ концы сопряженныхъ діаметровъ, равенъ половинѣ предъидущаго параллелограмма и имѣетъ также постоянную площадь.

164. Эти теоремы легко можно доказать, разсматривая эллипсъ, какъ проекцію круга. Два сопряженные діаметра OD и OE эллипса суть проекціи двухъ перпендикулярныхъ между собою діаметровъ OD_1 и OE_1 круга (*фиг.* 91). Такъ какъ углы D_1OP_1, E_1OQ служатъ дополненіемъ другъ другу, то прямоугольные треугольники D_1OP_1, E_1OQ равны; слѣдовательно, $OQ = D_1P$, но $OP^2 + D_1P^2 = OD_1^2 = a^2$, поэтому

$$OP^2 + OQ^2 = a^2.$$

Такъ какъ линіи OP и OQ суть проекціи двухъ сопряженныхъ діаметровъ OD и OE на большую ось эллипса, то очевидно, что сумма квадратовъ этихъ двухъ проекцій есть величина постоянная

$$a'^2 \cos \alpha + b'^2 \cos \beta = a^2.$$

То же самое получимъ для другой оси; проекціи двухъ сопряженныхъ полудіаметровъ на малую ось равны ординатамъ DP и EQ; но $DP = \frac{b}{a} D_1P$, $EQ = \frac{b}{a} EQ$; слѣдовательно, $PD^2 + EQ^2 = \frac{b^2}{a^2}(D_1P^2 + E_1Q^2)$; такъ какъ линіи EQ и OP равны, то $D_1P^2 + E_1Q^2 = D_1P^2 + OP^2 = a^2$, и потому

$$DP^2 + EQ^2 = b^2$$

или

$$a'^2 \sin^2 \alpha + b'^2 \sin^2 \beta = b^2.$$

Сложивъ почленно два предъидущія уравненія, получимъ

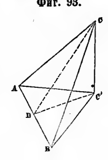
$$a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2.$$

165. Чтобы доказать свойство относительно площади параллелограмма, мы воспользуемся слѣдующей теоремой.

Проекція плоской площади на какую-нибудь плоскость равна проектируемой площади, умноженной на косинусъ угла двухъ плоскостей.

Разсмотримъ сначала треугольникъ ABC (*фиг.* 93), въ которомъ одна сторона AB параллельна плоскости проекцiи; мы можемъ предположить, что плоскость проекцiи проходитъ черезъ эту сторону AB; изъ вершины C опустимъ на эту плоскость перпендикуляръ CC′, и въ этой плоскости проведемъ C′D перпендикулярно къ AB; прямая CD будетъ также перпендикулярна къ AB, и уголъ CDC′ будетъ мѣрою двуграннаго угла φ двухъ плоскостей. Положивъ это, получимъ

Фиг. 93.



$$C'D = CD \cos\varphi,$$

откуда

$$\frac{AB \times C'D}{2} = \frac{AB \times CD}{2} \cos\varphi,$$

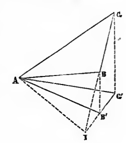
а слѣдовательно

$$AB'C = ABC \times \cos\varphi.$$

Такимъ образомъ площадь треугольника AC′B равна площади ABC, умноженной на $\cos\varphi$.

Положимъ теперь, что ни одна сторона треугольника ABC (*фиг.* 94) не параллельна плоскости проекцiи; эту плоскость мы можемъ провести черезъ вершину A такъ, чтобы двѣ другiя вершины находились на одной сторонѣ плоскости; продолженная плоскость треугольника пересѣкаетъ плоскость проекцiи по прямой AI, и прямая BC пересѣкаетъ эту плоскость въ точкѣ I; треугольники AIC, AIB проектируются на AIC′, AIB′, и мы получимъ

Фиг. 94.



$$AIC' = AIC \times \cos\varphi,$$
$$AIB' = AIB \times \cos\varphi;$$

вычитая одно изъ другаго, найдемъ,

$$AB'C' = ABC \times \cos\varphi.$$

Эта теорема, доказанная для треугольника, справедлива также для плоскаго многоугольника, который всегда можно разложить на треугольники и также для площади, ограниченной какою-нибудь сомкнутою кривой, потому что эту площадь можно разсматривать какъ предѣлъ площади впи-

саннаго многоугольника, число сторонъ котораго увеличивается неопредѣленно, такъ что каждая сторона приближается къ нулю.

Если эллипсъ будемъ разсматривать какъ проекцію круга, то параллелограмъ, построенный на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ, будетъ проекція квадрата, описаннаго около круга; такъ какъ площадь квадрата есть величина постоянная и равна $4a^2$, то площадь параллелограма есть также величина постоянная и равна $4a^2 \cos\varphi$, т. е. $4ab$.

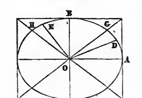
Площадь эллипса.

166. Изъ этой же теоремы опредѣляется непосредственно площадь эллипса. Такъ какъ эллипсъ есть проекція круга, то его площадь равна площади круга πa^2, умноженной на $\cos\varphi$ или на $\frac{b}{a}$, т. е. πab.

Равные сопряженные діаметры.

167. Мы видѣли (§ 157), что два сопряженные полудіаметра OD и OE расположены по обѣ стороны малой оси OB (*фиг.* 95). Извѣстно, что радіусъ эллипса будетъ тѣмъ болѣе, чѣмъ болѣе отдаляется отъ малой оси; слѣдовательно, для того, чтобы два сопряженные діаметра были равны, надобно, чтобы эти два діаметра составляли съ малою осью OB равные углы, а для этого необходимо, чтобы углы α и β были дополнительными. Слѣдовательно, получимъ $\text{tang}^2\,\alpha = \frac{b^2}{a^2}$ или $\text{tang}\,\alpha = \frac{b}{a}$; такимъ образомъ равные сопряженные діаметры OG и OH сливаются съ діагоналями прямоугольника, построеннаго на осяхъ.

Фиг. 95.



Изъ отношенія $a'^2 + b'^2 = a^2 + b^2$ находимъ $a'^2 = \frac{a^2+b^2}{2}$, и уравненіе эллипса, отнесеннаго къ его сопряженнымъ равнымъ діаметрамъ, будетъ

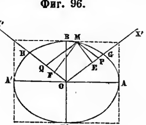
$$x^2 + y^2 = \frac{a^2+b^2}{2};$$

оно имѣетъ тотъ же видъ, какъ уравненіе круга, только координаты косоугольныя. Это уравненіе выражаетъ, что сумма квадратовъ разстояній каждой точки эллипса отъ двухъ равныхъ сопряженныхъ діаметровъ есть

величина постоянная. Дѣйствительно, пусть θ будетъ уголъ двухъ равныхъ сопряженныхъ діаметровъ; MP и MQ координаты точки M, ME и MF перпендикуляры, опущенные изъ точки M на эти діаметры; въ такомъ случаѣ, получимъ (*фиг.* 96) $ME = y' \sin\theta$, $MF = x' \sin\theta$; откуда

$$ME^2 + MF^2 = (x'^2 + y'^2) \sin^2\theta$$
$$= \frac{(a^2 + b^2)\sin^2\theta}{2} = \frac{2a^2 b^2}{a^2 + b^2}.$$

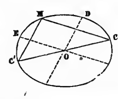
Фиг. 96.



Дополнительныя хорды.

168. *Дополнительными хордами* въ эллипсѣ называются такія двѣ хорды MC, MC′, которыя, проходя черезъ одну и ту же точку эллипса, опираются на концы одного діаметра CC′ (*фиг.* 97). Двѣ дополнительныя хорды параллельны двумъ сопряженнымъ діаметрамъ. Дѣйствительно, проведемъ діаметры OD и OE параллельно дополнительнымъ хордамъ MC′, MC. Въ треугольникѣ CMC′ прямая OD, параллельная CM, дѣлитъ двѣ стороны CC′ и CM на части пропорціональныя; такъ какъ центръ O есть средина CC′, то отсюда слѣдуетъ, что діаметръ OD дѣлитъ пополамъ хорду CM, а слѣдовательно, дѣлитъ пополамъ всѣ хорды, параллельныя діаметру OE. Точно также діаметръ OE дѣлитъ пополамъ хорду C′M, а слѣдовательно дѣлитъ пополамъ всѣ хорды, параллельныя OD. Такимъ образомъ, два діаметра OD и OE, параллельные дополнительнымъ хордамъ MC′, MC, суть сопряженные діаметры.

Фиг. 97.

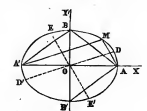


Наоборотъ, если черезъ концы діаметра CC′ проведемъ прямыя, параллельныя двумъ сопряженнымъ діаметрамъ OD и OE, то эти прямыя пересѣкутся на эллипсѣ. Дѣйствительно, пусть M будетъ точка, въ которой хорда CM, параллельная OE, пересѣкаетъ эллипсъ; соединимъ точки C′ и M; такъ какъ дополнительныя хорды MC, MC′ параллельны двумъ сопряженнымъ діаметрамъ, то вторая хорда C′M будетъ параллельна OD.

169. Такимъ образомъ, ученіе объ измѣненіи угла двухъ сопряженныхъ діаметровъ приводится къ ученію объ измѣненіи угла двухъ дополнительныхъ хордъ, т. е. угла, вписаннаго въ половину эллипса. Для простоты вычисленія полагаютъ, что двѣ дополнительныя хорды проведены

черезъ концы большой оси (*фиг.* 98). Уголъ AMA′, который мы назовемъ черезъ θ, равенъ разности двухъ угловъ MAX, MA′X; такъ какъ угловые коеффиціенты двухъ прямыхъ AM и A′M суть $\frac{y}{x-a}$ и $\frac{y}{x+a}$, то получимъ

Фиг. 98.



$$\operatorname{tang}\theta = \frac{\frac{y}{x-a} - \frac{y}{x+a}}{1 + \frac{y^2}{x^2-a^2}} = \frac{2ay}{x^2+y^2-a^2},$$

или, замѣнивъ x^2 его величиною, изъ уравненія эллипса,

$$\operatorname{tang}\theta = -\frac{2ab^2}{(a^2-b^2)y}.$$

Если точка M описываетъ верхнюю половину AMA′ эллипса, то уголъ θ будетъ тупой, потому что тангенсъ будетъ отрицательный; когда точка M будетъ въ точкѣ A, т. е. когда $y = 0$, тогда уголъ будетъ прямой; при движеніи точки M отъ A къ B, y увеличивается; а такъ какъ абсолютная величина tang θ уменьшается, то тупой уголъ θ увеличивается и достигаетъ maximum въ точкѣ B; въ этомъ случаѣ получимъ $y = b$ и $\operatorname{tang}\theta = -\frac{2ab}{a^2-b^2}$. Когда точка M переходитъ за точку B и проходитъ четверть эллипса BA′, уголъ θ уменьшается отъ наибольшей его величины до прямаго угла

Отсюда слѣдуетъ, что уголъ сопряженныхъ полудіаметровъ OD и OE, находящихся по одной сторонѣ большой оси, есть тупой и измѣняется, начиная отъ прямаго угла до наибольшей величины ABA′; сопряженные діаметры, которые составляютъ наибольшій уголъ, соотвѣтственно параллельные дополнительнымъ хордамъ A′B и AB, и слѣдовательно, одинаково наклоненные съ той и другой стороны къ малой оси, равны.

Мы разсматривали измѣненіе тупаго угла DOE двухъ сопряженныхъ діаметровъ, острый же уголъ DOE′ измѣняется въ обратномъ направленіи. Этотъ уголъ мы получимъ прямо, проводя черезъ концы малой оси BB′ дополнительныя хорды. Когда точка M описываетъ четверть эллипса BA, вписанный уголъ уменьшается, начиная отъ прямаго угла до наименьшаго угла BAB′, который служитъ дополненіемъ наибольшему тупому углу ABA′ до двухъ прямыхъ.

170. Когда эллипсъ начерченъ, можно графически опредѣлить центръ и оси. Чтобы найти центръ, проводимъ двѣ параллельныя хорды, достаточно отдаленныя одна отъ другой; соединимъ средины этихъ хордъ, и

такимъ образомъ получимъ діаметръ, средина котораго будетъ центромъ. Если на этомъ діаметрѣ опишемъ полуокружность и оба конца діаметра соединимъ съ точкою, въ которой эта полуокружность пересѣкаетъ полуэллипсъ, то получимъ двѣ дополнительныя хорды, перпендикулярныя между собой; параллельные имъ діаметры, образующіе систему сопряженныхъ перпендикулярныхъ между собою діаметровъ, будутъ оси эллипса.

Точно также можно найти двѣ системы сопряженныхъ діаметровъ, которые составляютъ между собой данный уголъ, заключающійся между minimum и maximum; для этого достаточно описать на діаметрѣ сегментъ, вмѣщающій въ себѣ данный уголъ.

171. *По двумъ даннымъ сопряженнымъ діаметрамъ построить эллипсъ.* Пусть DD', EE' (*фиг.* 99) будутъ два данные сопряженные діаметра, величины которыхъ означимъ черезъ $2a'$ и $2b'$. Уравненіе эллипса, отнесеннаго къ этимъ двумъ діаметрамъ, будетъ

Фиг. 99.

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1.$$

Черезъ центръ проведемъ прямую E_1E_1' перпендикулярно къ DD' и отложимъ на ней часть $OE_1 = OE$. Эллипсъ, оси котораго суть DD', E_1E_1', отнесенный къ этимъ осямъ, выражается тѣмъ же уравненіемъ. Отсюда слѣдуетъ, что ординаты MP, M_1P, которыя соотвѣтствуютъ одной и той же абсциссѣ OP, равны между собой. Представимъ себѣ, что, по способу, изложенному въ § 149, построены различныя точки эллипса DE_1D', оси котораго извѣстны. Пусть M_1 будетъ одна изъ этихъ точекъ, M_1P ея ордината; если черезъ точку P проведемъ линію PM, параллельную OE и равную PM_1, то получимъ искомую точку M эллипса. Каждая точка перваго эллипса опредѣлитъ соотвѣтствующую точку втораго. Это приводитъ къ тому, чтобы первый эллипсъ искривить, поворачивая каждую ординату PM_1 около ея подошвы P на постоянный уголъ.

Точно такое же преобразованіе прилагается къ касательной.

Касательная въ точкѣ M выражается уравненіемъ

$$\frac{xX}{a'^2}+\frac{yY}{b'^2}=1,$$

въ косоугольныхъ координатахъ это уравненіе выражаетъ также касательную, проведенную въ точкѣ M_1, въ прямоугольныхъ координатахъ. Эти

двѣ касательныя пересѣкаютъ продолженіе діаметра DD′ въ одной и той же точкѣ T, абсциссу которой найдемъ, положивъ $Y = 0$.

Вмѣсто того, чтобы строить эллипсъ по точкамъ, какъ мы показали, можно сперва опредѣлить оси эллипса и потомъ построить этотъ эллипсъ по его осямъ. Опредѣленіе осей зависитъ отъ слѣдующей теоремы.

172. *Два какіе нибудь сопряженные діаметра отсѣкаютъ на опредѣленной касательной* PQ *два отрѣзка* DP, DQ, *произведеніе которыхъ есть величина постоянная и равно квадрату полудіаметра* OE, *параллельнаго касательной* (*фиг.* 100).

Фиг. 100.

Если за оси координатъ возьмемъ діаметръ OD, который проходитъ черезъ точку прикосновенія, и сопряженный діаметръ OE, и если черезъ a' и b' назовемъ эти діаметры, то уравненіе эллипса будетъ

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1.$$

Пусть

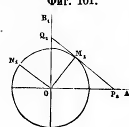
$$y = mx,\ y = m'x$$

будутъ уравненія двухъ сопряженныхъ діаметровъ OA, OB. Въ слѣдствіе замѣчанія, сдѣланнаго въ § 160, угловые коеффиціенты будутъ связаны между собою уравненіемъ $mm' = -\frac{b'^2}{a'^2}$. Если въ этихъ уравненіяхъ сдѣлаемъ $x = a'$, то найдемъ $DP = -ma'$, $DQ = m'a'$, откуда

$$DP.\ DQ = -mm'a^2 = b'^2.$$

173. Эту теорему можно легко доказать, разсматривая эллипсъ, какъ проекцію круга. Пусть OA_1, OB_1 (*фиг.* 101) будутъ два перпендикулярные между собою діаметра круга; P_1Q_1 касательная въ какой-нибудь точкѣ M_1; проведемъ радіусъ OM_1 и радіусъ ON_1 параллельно касательной; изъ прямоугольнаго треугольника PO_1Q_1 находимъ

Фиг. 101.



$$M_1P_1 \times M_1Q_1 = OM_1{}^2 = ON_1{}^2.$$

Когда будемъ проектировать фигуру, діаметры OA_1, OB_1 опредѣлятъ два сопряженные діаметра

эллипса, касательная P_1Q_1 касательную къ эллипсу, и прямая ON_1 линію параллельную этой касательной; прямыя, параллельныя M_1P_1, M_1Q_1, ON_1 имѣютъ проекціями MP, MQ, ON, которыя имъ пропорціональны; слѣдовательно, между этими проекціями также получимъ соотношеніе

$$MP.\ MQ = ON^2.$$

174. Положимъ, что два сопряженные діаметра OA и OB будутъ оси эллипса (*фиг.* 100). Кругъ, описанный на PQ, какъ на діаметрѣ, проходитъ черезъ точку O, и ордината DH, перпендикулярная къ PQ, равна OE. Отсюда вытекаетъ очень простой способъ опредѣлить направленіе осей, по двумъ даннымъ сопряженнымъ діаметрамъ OD и OE. Черезъ точку D проводимъ линію, параллельную OE; эта линія будетъ касательная въ точкѣ D; на этой прямой возстановляемъ перпендикуляръ DH, равный OE, и описываемъ кругъ, центръ котораго находится на PQ, и который пройдетъ черезъ точку O и H; прямыя OP и OQ, которыя идутъ отъ центра къ двумъ точкамъ P и Q, въ которыхъ кругъ пересѣкаетъ касательную, опредѣлятъ направленіе осей.

175. Остается опредѣлить величину осей. Изъ уравненій

$$a^2 + b^2 = a'^2 + b'^2, \quad ab = a'b' \sin\theta,$$

находимъ

$$(a-b)^2 = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \sin\theta = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right),$$

$$(a+b)^2 = a'^2 + b'^2 + 2a'b' \sin\theta = a'^2 + b'^2 - 2a'b' \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right).$$

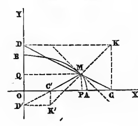
Такъ какъ можно положить, что θ означаетъ острый уголъ между сопряженными діаметрами, то изъ этихъ формулъ видно, что величина $(a-b)$ есть третья сторона треугольника, въ которомъ двѣ другія стороны равны a' и b' и уголъ между ними равенъ $\frac{\pi}{2} - \theta$. Это есть треугольникъ ODH, потому что уголъ ODH равенъ $\frac{\pi}{2} - \theta$, а двѣ стороны DO и DH равны a' и b'; такимъ образомъ, третья сторона OH опредѣляетъ $a - b$. Точно также $a + b$ есть третья сторона треугольника, котораго двѣ другія стороны равны a' и b', а уголъ между ними есть дополнительный предъидущаго; это есть треугольникъ ODK, который получимъ, продолживъ перпендикуляръ DH и отложивъ на немъ величину, равную DH; третья сторона OK опредѣлитъ $a + b$. Если изъ точки O, какъ центра, радіусомъ равнымъ OH опишемъ кругъ, то линія KI будетъ равна большей оси $2a$, линія KL малой оси $2b$.

Нужно замѣтить, что большая ось OA дѣлитъ уголъ HOK пополамъ; малая ось дѣлитъ дополнительный уголъ пополамъ.

Черченіе эллипса непрерывнымъ движеніемъ.

176. *Если два конца прямой* CD, *величина которой постоянна, двигаются по двумъ перпендикулярнымъ между собою прямымъ* OX, OY, *то точка* M *этой прямой опишетъ эллипсъ* (*фиг.* 102).

Фиг. 102.



Возьмемъ за оси координатъ двѣ опредѣленныя прямыя; назовемъ черезъ a и b двѣ постоянныя линіи MD, MC, черезъ x и y перемѣнныя координаты точки M. Изъ подобныхъ треугольниковъ MPC, DQM находимъ $\frac{MP}{DQ} = \frac{MC}{MD}$

или
$$\frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a}.$$

Слѣдовательно, геометрическое мѣсто, описанное точкою M, есть эллипсъ, котораго оси $2a$ и $2b$ направлены по двумъ даннымъ перпендикулярнымъ между собою линіямъ.

Нѣтъ никакой необходимости, чтобы точка M находилась на движущейся прямой между точками C и D; она можетъ находиться на продолженіи этой линіи. Разсмотримъ прямую C'D', двѣ точки которой C' и D' двигаются по двумъ перпендикулярнымъ между собою прямымъ OX и OY, и найдемъ геометрическое мѣсто, описанное точкою M. Если черезъ a и b назовемъ разстоянія MD' и MC', то изъ подобныхъ треугольниковъ MPC', D'QM, какъ прежде, найдемъ

$$\frac{MP}{D'Q} = \frac{MC'}{MD'}, \quad \text{или} \quad \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{b}{a}.$$

На этомъ свойствѣ основывается устройство маленькаго инструмента, называемаго *эллиптическимъ циркулемъ*. Два кончика нитки прикрѣплены въ двухъ точкахъ C' и D', взятыхъ произвольно на прямой C'D', и въ точкѣ M карандашъ; два кончика двигаются по перпендикулярнымъ между собою желобкамъ, сдѣланнымъ на деревянной доскѣ; карандашъ, помѣщенный въ M, опишетъ эллипсъ непрерывнымъ движеніемъ.

177. Замѣтимъ, что нормаль, проведенная къ эллипсу въ точкѣ M, проходитъ черезъ точку пересѣченія K перпендикуляровъ, опущенныхъ изъ точекъ C и D на двѣ опредѣленныя прямыя. Дѣйствительно, если черезъ x_1 и y_1 назовемъ координаты точки K, то изъ подобныхъ треугольниковъ MPC, DQM находимъ

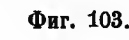
$$\frac{x_1 - x}{x} = \frac{b}{a}, \quad \frac{y_1 - y}{y} = \frac{a}{b};$$

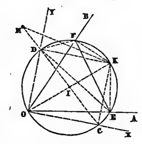
откуда

$$\frac{y_1 - y}{x_1 - x} = \frac{a^2 y}{b^2 x}.$$

Такимъ образомъ угловой коеффиціентъ прямой KM равенъ угловому коеффиціенту нормали, проведенной къ эллипсу въ точкѣ M.

178. Эту теорему въ общемъ смыслѣ можно выразить такъ: *Когда двѣ точки* E, F *движущейся плоскости двигаются по двумъ прямымъ* OA, OB, *находящимся въ неподвижной плоскости, тогда какая-нибудь точка движущейся плоскости описываетъ эллипсъ* (*фиг.* 103). Разсмотримъ частное положеніе движущейся плоскости; изъ точекъ E и F возставимъ перпендикуляры къ прямымъ OA и OB, и пусть K будетъ точка пересѣченія этихъ перпендикуляровъ; кругъ, описанный на прямой OK, какъ на діаметрѣ, пройдетъ черезъ точки E и F. Такъ какъ EF есть величина постоянная, точно такъ, какъ и уголъ EOF, то діаметръ круга есть тоже величина постоянная. Положимъ, что кругъ соединенъ неизмѣняемо съ прямой EF и двигается съ ней вмѣстѣ; кругъ будетъ постоянно проходить черезъ точку O; всякая точка D круга опишетъ прямую линію OY, потому что дуга FD есть величина постоянная, уголъ FOD постоянный.


Фиг. 103.

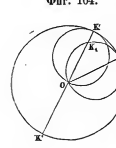


Разсмотримъ теперь какую-нибудь точку M движущейся плоскости. Соединимъ эту точку съ центромъ I круга и отмѣтимъ два конца C и D этого діаметра. Въ слѣдствіе предъидущаго обѣ точки C и D движутся по двумъ перпендикулярнымъ между собою прямымъ OX и OY; отсюда заключаемъ, что точка M описываетъ эллипсъ, оси котораго, равныя двойнымъ разстояніямъ MC и MD, имѣютъ направленія по двумъ перпендикулярнымъ между собою прямымъ OY и OX. Въ частномъ случаѣ точка I опишетъ кругъ.

Перпендикуляры, возставленные изъ точекъ C и D на прямыя OX и OY, пересѣкаются въ точкѣ K; отсюда слѣдуетъ, что прямая MK нормальна къ эллипсу въ точкѣ M. Если будемъ разсматривать эллипсы, описанные различными точками движущейся плоскости, то увидимъ, что нормали, проведенныя ко всѣмъ этимъ эллипсамъ въ соотвѣтствующихъ точкахъ, проходятъ черезъ одну и ту же точку K.

Такъ какъ діаметръ OK движущагося круга имѣетъ постоянную длину, то геометрическое мѣсто точки K въ неподвижной плоскости будетъ кругъ, описанный изъ точки O, какъ центра, радіусомъ, равнымъ OK (*фиг.* 104). Движущійся кругъ постоянно касается неподвижнаго круга. Пусть OK′ будетъ новое положеніе движущагося круга; діаметръ OK′ пересѣкаетъ въ точкѣ K_1 кругъ въ первомъ его положеніи; эта точка K_1 движущагося круга описываетъ, какъ мы видѣли, діаметръ K′K″; во второмъ положеніи движущагося круга она приходитъ въ K′. Въ неподвижномъ кругѣ уголъ при центрѣ KOK′ измѣряется отношеніемъ дуги KK′ къ радіусу OK; въ маленькомъ кругѣ вписанный уголъ KOK_1 измѣряется отношеніемъ дуги KK_1 къ діаметру OK; отсюда заключаемъ, что дуги KK′ и KK_1 равны. Отсюда слѣдуетъ, что движеніе перемѣщающейся плоскости въ неподвижной плоскости можно получить, катя движущійся кругъ по неподвижному кругу, т. е. такимъ образомъ, чтобы дуги KK_1 и KK′ двухъ круговъ, заключающіяся между точками прикосновенія, въ двухъ какихъ-нибудь положеніяхъ, были равны.

Фиг. 104.



ПРИМѢРЫ.

1-й. Найти геометрическое мѣсто вершинъ параллелограммовъ, построенныхъ на сопряженныхъ діаметрахъ эллипса.

2-й. Найти геометрическое мѣсто средины хордъ, проведенныхъ черезъ одну и ту же точку въ эллипсѣ.

3-й. Хорда круга перемѣщается параллельно самой себѣ; черезъ концы проводимъ прямыя, параллельныя двумъ даннымъ направленіямъ; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія параллельныхъ линій.

4-й. Доказать, что между всѣми параллелограммами, описанными около одного и того же эллипса, параллелограммы, построенные на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ имѣютъ наименьшую площадь.

5-й. Доказать, что между всѣми параллелограммами, вписанными въ одинъ и тотъ же эллипсъ, тѣ параллелограммы, діагонали которыхъ составляютъ систему сопряженныхъ діаметровъ, имѣютъ наибольшую площадь.

6-й. Какой самый большой эллипсъ изъ всѣхъ эллипсовъ, вписанныхъ въ одинъ и тотъ же параллелограммъ?

7-й. Какой самый меньшій эллипсъ изъ всѣхъ эллипсовъ, описанныхъ около одного и того же параллелограмма?

8-й. Доказать, что между всѣми системами сопряженныхъ діаметровъ эллипса, оси составляютъ наименьшую сумму, а равные сопряженные діаметры наибольшую сумму.

9-й. Вписать въ эллипсъ такую хорду, чтобы сумма ея длины и разстоянія ея средины отъ центра была наибольшая.

10-й. Прямая перемѣщается параллельно самой себѣ въ плоскости двухъ другихъ прямыхъ; возьмемъ на ней такую точку, чтобы сумма квадратовъ ея разстояній отъ пересѣченій съ неподвижными прямыми была величина постоянная; найти геометрическое мѣсто, описанное этою точкою.

11-й. Даны какіе-нибудь два эллипса; можно опредѣлить два направленія, параллельныя въ одно время двумъ сопряженнымъ діаметрамъ въ томъ и другомъ эллипсѣ; черезъ общія точки двухъ кривыхъ проходитъ третій эллипсъ, въ которомъ равные сопряженные діаметры будутъ параллельны этимъ двумъ направленіямъ.

12-й. Эллипсъ обращается около своего центра; въ точкахъ, гдѣ онъ пересѣкаетъ неподвижную прямую, проводимъ касательныя къ кривой; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія этихъ касательныхъ.

13-й. Данъ кругъ и неподвижная прямая, проходящая черезъ его центръ; движущаяся прямая, равная радіусу, однимъ концомъ опирается на кругъ, другимъ на прямую; найти геометрическое мѣсто, описываемое точкою движущейся прямой.

14-й. Движущаяся плоскость перемѣщается по неподвижной плоскости такъ, что двѣ прямыя движущейся плоскости остаются соотвѣтственно касательными къ двумъ кругамъ неподвижной плоскости; найти геометрическое мѣсто, описываемое точкою неподвижной плоскости на движущейся плоскости.

15-й. Найти площадь эллипса, выражаемаго уравненіемъ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1.$$

16. Треугольникъ вписанъ въ эллипсъ; если черезъ R назовемъ радіусъ описаннаго круга; черезъ d, d', d'' полудіаметры, параллельные сторонамъ, то получимъ $R = \frac{d'd'd''}{ab}$.

17. Какой-нибудь прямоугольникъ описанъ около эллипса; параллелограммъ, вершины котораго находятся въ точкахъ прикосновенія, имѣетъ постоянный параметръ, а двѣ смежныя стороны составляютъ съ касательною равные углы.

18. Отъ какой нибудь точки эллипса по нормали откладываемъ линію равную $\frac{k^2}{p}$, гдѣ k есть постоянная величина, а p перпендикуляръ, опущенный изъ центра на касательную; найти геометрическое мѣсто конца этой прямой.

ГЛАВА V.

Гипербола.

179. Построимъ теперь кривую, выражаемую уравненіемъ

$$Mx^2 + Ny^2 + F_1 = 0,$$

въ которомъ M и N имѣютъ разные знаки. Положимъ, что M положительно, N отрицательно и равно $-N'$. Если F_1 равно нулю, то, рѣшивъ уравненіе

$$Mx^2 - N'y^2 = 0,$$

относительно y, получимъ

$$y = \pm \sqrt{\frac{M}{N'}}x;$$

это уравненіе выражаетъ двѣ прямыя, проходящія черезъ начало. Если F_1 будетъ положительно, то этотъ случай посредствомъ перемѣны осей приведется къ случаю F_1 отрицательнаго; для этого въ уравненіи надо y замѣнить черезъ x, а x черезъ y; такимъ образомъ, положивъ $F_1 = -H$, уравненіе будетъ имѣть видъ

$$Mx^2 - N'y^2 = H,$$

въ которомъ M, N′ и H суть положительныя числа.

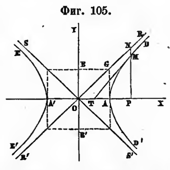
Каждой величинѣ x соотвѣтствуютъ двѣ равныя и съ обратными знаками величины y; слѣдовательно, ось x есть симметричная ось кривой; то же самое можно сказать относительно оси y. Отсюда заключаемъ, что начало координатъ есть центръ кривой. Это послѣднее свойство можно доказать, замѣтивъ, что если уравненіе удовлетворяется координатами x и y точки, то оно удовлетворится точно также координатами $-x$ и $-y$ симметричной ей точки.

Рѣшивъ уравненіе относительно y, получимъ

$$y = \pm \sqrt{\frac{Mx^2 - H}{N'}}.$$

Чтобы величина y была дѣйствительная, надобно, чтобы численная величина x была болѣе $\sqrt{\frac{H}{M}}$. Отложивъ отъ начала координатъ по оси X'X двѣ линіи OA, OA', равныя $\sqrt{\frac{H}{M}}$, и проведя черезъ точки A и A' линіи, параллельныя OY (*фиг.* 105), увидимъ, что ни одной точки кривой не существуетъ между этими двумя параллельными линіями. При $x = $ OA, ордината y равна нулю, и мы получимъ точку A; если x будетъ неопредѣленно возрастать, начиная отъ OA, то численная величина y будетъ также неопредѣленно возрастать, начиная отъ нуля; такимъ образомъ получимъ двѣ безконечныя дуги AD и AD'.

Фиг. 105.



Измѣняя x отъ $-$ OA' до $-\infty$, получимъ двѣ другія безконечныя дуги A'E, A'E', симметричныя предъидущимъ относительно OY. Эти четыре дуги составляютъ двѣ вѣтви гиперболы, оси симметріи которой суть двѣ прямыя X'X, Y'Y. Первая изъ этихъ осей только одна пересѣкаетъ кривую; она называется *поперечною осью;* вторая — *мнимою осью;* точки A и A' называются вершинами кривой. Если для краткости положимъ $a = \sqrt{\frac{H}{M}}$, $b = \sqrt{\frac{H}{N'}}$, то уравненіе будетъ имѣть видъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{1}$$

Размѣры гиперболы зависятъ только отъ двухъ линій a и b; эти два параметра называются полуосями кривой; первая называется дѣйствительною полуосью, вторая мнимою полуосью.

180. *Квадраты ординатъ, перпендикулярныхъ къ поперечной оси, пропорціональны произведеніямъ соотвѣтствующихъ отрѣзковъ на этой оси.*

Дѣйствительно, изъ уравненія (1) находимъ

$$\frac{y^2}{x^2 - a^2}, \text{ или } \frac{y^2}{(x+a)(x-a)} = \frac{b^2}{a^2};$$

слѣдовательно,

$$\frac{MP^2}{A'P.\ AP} = \frac{b^2}{a^2}.$$

181. *Асимптоты*. Мы видѣли (§ 130), что если начало координатъ совпадаетъ съ центромъ гиперболы, то уравненіе асимптоты получимъ, уничтоживъ въ уравненіи кривой постоянный членъ. Такимъ образомъ, въ нашемъ случаѣ обѣ асимптоты RR′, SS′ выразятся уравненіемъ

(2) $$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0, \quad \text{или } y=\pm\frac{b}{a}x.$$

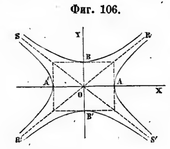
Легко убѣдиться, что разность MN ординаты прямой OR и дуги AD предѣломъ имѣетъ нуль, потому что эта разность выражается

$$\frac{b}{a}\left(x-\sqrt{x^2-a^2}\right)=\frac{ab}{x+\sqrt{x^2-a^2}}.$$

Дуга AD заключается въ углѣ ROX и неопредѣленно приближается къ прямой OR, которая есть ея асимптота. Прямыя OR′, OS, OS′ суть также асимптоты дугъ A′E′, A′E, AD′. Изъ уравненія (2) видно, что асимптоты R′R, S′S суть діагонали прямоугольника, построеннаго на осяхъ.

182. *Сопряженныя гиперболы*. Сопряженными гиперболами называются такія двѣ гиберполы, которыя имѣютъ одинъ и тотъ же центръ и однѣ и тѣ же оси, и кромѣ того дѣйствительная ось одной гиперболы есть мнимая ось другой. Такимъ образомъ, данная гипербола имѣетъ сопряженную другую гиперболу, поперечная ось которой есть b, а мнимая ось есть a (*фиг.* 106). Уравненіе этой второй гиперболы, очевидно, будетъ

Фиг. 106.



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=-1.$$

Двѣ сопряженныя гиперболы имѣютъ однѣ и тѣ же асимптоты, потому что прямоугольникъ, построенный на осяхъ, одинаковъ для двухъ кривыхъ. Одна изъ кривыхъ расположена въ двухъ вертикальныхъ углахъ ROS′, R′OS; другая въ двухъ другихъ углахъ ROS, R′OS′.

183. *Равносторонняя гипербола*. Равностороннею гиперболою называется такая гипербола, у которой оси a и b равны. Въ этомъ случаѣ прямоугольникъ, построенный на осяхъ, обращается въ квадратъ, а асимптоты будутъ перпендикулярны между собой; сопряженная гипербола будетъ равна первой; въ этомъ случаѣ сопряженную гиперболу получимъ, повернувъ равностороннюю гиперболу около центра на прямой уголъ.

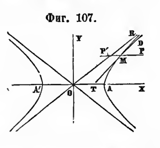
Подобно тому, какъ мы строили эллипсъ, имѣющій осями a и b, посредствомъ круга радіуса a, можно построить помощію равносторонней гиперболы, ось которой есть a, гиперболу, которая осями имѣетъ a и b, т. е. первую гиперболу можно разсматривать какъ ортогональную проекцію равносторонней гиперболы. Но въ графическомъ построеніи гиперболы это не приноситъ никакой пользы, потому что черченіе равносторонней гиперболы нисколько не проще черченія какой-нибудь гиперболы.

184. Пусть x и y будутъ координаты какой-нибудь точки плоскости; разсмотримъ многочленъ

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1.$$

Для точки M принадлежащей кривой, этотъ многочленъ равенъ нулю. Если точка P будетъ двигаться отъ M по линіи, параллельной поперечной оси AA′ (*фиг.* 107), то членъ $\frac{y^2}{b^2}$ не будетъ измѣняться, между тѣмъ какъ членъ $\frac{x^2}{a^2}$ будетъ уменьшаться или увеличиваться, смотря по тому, будетъ ли точка P приближаться или удаляться отъ оси y-овъ. Отсюда слѣдуетъ, что многочленъ будетъ отрицательный для всѣхъ точекъ, находящихся между двумя вѣтвями гиперболы, а для всѣхъ другихъ точекъ плоскости онъ будетъ положительный.

Фиг. 107.



Касательная.

185. Уравненіе касательной, проведенной въ точкѣ M, координаты которой суть x и y, есть

$$(3)\qquad \frac{xX}{a^2}-\frac{yY}{b^2}-1=0.$$

Чтобы построить эту прямую, можно опредѣлить точку T (*фиг.* 107), въ которой она пересѣкаетъ ось OX. Если въ уравненіи (2) сдѣлаемъ $Y=0$, то получимъ $X=OT=\frac{a^2}{X}$; эту линію OT найдемъ, какъ третью пропорціональную.

186. Угловой коэффиціентъ касательной есть

$$\frac{b^2x}{a^2y} = \frac{b}{a\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}},$$

Положимъ, что точка M описываетъ дугу AD; въ точкѣ A угловой коэффиціентъ равенъ безконечности, и касательная будетъ перпендикулярна къ поперечной оси; при возрастаніи x, угловой коэффиціентъ постоянно уменьшается и приближается къ предѣлу $\frac{b}{a}$, угловому коэффиціенту асимптоты OR; слѣдовательно, уголъ MTX уменьшается отъ $\frac{\pi}{2}$ до ROX; въ то же время величина OT уменьшается отъ a до 0; отсюда слѣдуетъ, что асимптота есть предѣльное положеніе касательной, когда точка прикосновенія удаляется въ безконечность.

187. *Провести касательную черезъ внѣшнюю точку* P. Если черезъ x_1 и y_1 назовемъ координаты точки P, то точка прикосновенія опредѣлится изъ уравненія хорды прикосновенія.

$$(3) \qquad \frac{x_1x}{a^2} - \frac{y_1y}{b^2} - 1 = 0.$$

и уравненія гиперболы.

Исключивъ y, получимъ уравненіе второй степени

$$\frac{x^2}{a^2}\left(\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}\right) - 2\frac{x_1x}{a^2} + \left(1 + \frac{y_1^2}{b^2}\right) = 0,$$

корни котораго выразятъ абсциссы точекъ прикосновенія M и M′ двухъ касательныхъ, проведенныхъ изъ точки P. Условіе дѣйствительности корней есть $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2} - 1 < 0$, т. е. точка P должна находиться между двумя вѣтвями кривой. Если точка P будетъ находиться въ углѣ асимптотъ, между которыми заключается кривая, то произведеніе корней будетъ положительное, потому что коэффиціентъ $\frac{x_1^2}{a^2} - \frac{y_1^2}{b^2}$ будетъ положительный; слѣдовательно, оба корня будутъ имѣть одинаковые знаки, и обѣ точки прикосновенія будутъ находиться на одной вѣтви кривой. Наоборотъ, если P будетъ находиться въ одномъ изъ угловъ ROS, R′OS′, то на каждой вѣтви будетъ находиться точка прикосновенія.

188. *Провести касательную параллельно данной прямой*. Означивъ черезъ m угловой коэффиціентъ данной прямой, найдемъ точно такъ же, какъ въ § 155, что уравненіе касательной будетъ

$$(5) \qquad y = mx \pm \sqrt{a^2m^2 - b^2}$$

Чтобы задача была возможна, надобно, чтобы величина m^2 была больше $\frac{b^2}{a^2}$; т. е. если данная прямая проходитъ отъ начала, то она заключается въ углѣ ROS. Мы уже видѣли (§ 186), что числовая величина угловаго коэффиціента касательной больше $\frac{b}{a}$.

189. Къ гиперболѣ можно провести двѣ перпендикулярныя, между собой касательныя, только тогда, когда уголъ ROS′ менѣе прямаго угла, т. е. когда a болѣе b; если это условіе удовлетворяется, то геометрическое мѣсто, вершины прямаго угла, описаннаго около гиперболы, выразится уравненіемъ

$$x^2 + y^2 = a^2 - b^2;$$

это есть кругъ концентричный кривой.

Діаметры.

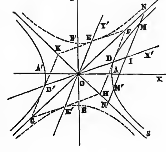
190. Въ гиперболѣ, отнесенной къ ея осямъ, діаметръ, раздѣляющій пополамъ хорды, угловой коэффиціентъ которыхъ есть m, выражается уравненіемъ

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} m = 0,$$

или

$$y = \frac{b^2}{a^2 m} x.$$

Фиг. 108.



Если черезъ m' означимъ угловой коэффиціентъ діаметра, то между направленіемъ хордъ и направленіемъ діаметра получимъ соотношеніе

$$(6) \qquad mm' = \frac{b^2}{a^2}.$$

Изъ этого уравненія видно, что если за угловой коэффиціентъ хордъ возьмемъ m', то угловой коэффиціентъ діаметра будетъ m; т. е. если прямая DD′ дѣлитъ хорды, параллельныя EE′, пополамъ (*фиг.* 108), то обратно прямая EE′ дѣлитъ пополамъ хорды, параллельныя DD′. Такимъ образомъ два діаметра DD′ EE′ имѣютъ свойство, что каждый изъ нихъ дѣлитъ пополамъ хорды параллельныя другому; такіе діаметры называются сопряженными діаметрами.

Гипербола имѣетъ безконечное число системъ сопряженныхъ діаметровъ. Изъ уравненія (6) видно, что m и m' должны имѣть одинаковые знаки; если мы положимъ, что они положительные, то при измѣненіи m отъ 0 до $\frac{b}{a}$, m' будетъ измѣняться отъ ∞ до $\frac{b}{a}$; діаметръ DD' обращается отъ OA къ асимптотѣ OR, а діаметръ EE' отъ OB къ той же асимптотѣ. Точно также видно, что одинъ изъ двухъ діаметровъ всегда пересѣкаетъ кривую, другой не пересѣкаетъ. Оси образуютъ только одну систему сопряженнныхъ перпендикулярныхъ между собою діаметровъ, а острый уголъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ измѣняется отъ $\frac{\pi}{2}$ до 0.

Подобно тому, какъ и въ эллипсѣ, мы докажемъ, что касательная FH, проведенная въ точкѣ D гиперболы, параллельна діаметру EE', сопряженному діаметру DD', который проходитъ черезъ точку прикосновенія.

191. Двѣ сопряженныя гиперболы и система ихъ осей имѣютъ одинъ и тотъ же діаметръ для одного и того же ряда хордъ, потому что уравненія трехъ геометрическихъ мѣстъ

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \pm 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$$

отличаются только постояннымъ членомъ, который не входитъ въ уравненіе діаметра $f_x' + mf_y' = 0$. Три геометрическія мѣста имѣютъ также однѣ и тѣ же системы сопряженныхъ діаметровъ.

Если гипербола будетъ равносторонняя, то уравненіе $mm' = \frac{b^2}{a^2}$ обратится въ $mm' = 1$; это уравненіе выражаетъ, что углы DOX, EOX служатъ другъ другу дополненіемъ, а слѣдовательно асимптоты дѣлятъ углы сопряженныхъ діаметровъ пополамъ.

192. *Гипербола отнесенная къ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ.* Если за оси координатъ возьмемъ два сопряженные діаметра гиперболы, то мы видѣли, что уравненіе кривой будетъ имѣть тотъ же видъ

$$Mx'^2 + Ny'^2 = H.$$

Возьмемъ за ось x діаметръ, который пересѣкаетъ кривую; можно положить, что H положительно, тогда M будетъ положительно, а N отрицательно. Величина перваго полудіаметра равна разстоянію OD точки O отъ точки пересѣченія діаметра съ кривою; это разстояніе равно $a' = \sqrt{\frac{H}{M}}$.

Длиною втораго діаметра называютъ величину $b' = \sqrt{\frac{H}{-N}}$. Если M замѣнимъ черезъ $\frac{H}{a'^2}$ и N черезъ $\frac{-H}{b'^2}$, то предъидущее уравненіе будетъ

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} - 1 = 0. \tag{7}$$

Этотъ результатъ мы получимъ также посредствомъ преобразованія координатъ; если въ уравненіи $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ перемѣнныя x и y замѣнимъ величинами

$$y = x' \cos\alpha + y' \cos\beta, \quad y = x' \sin\alpha + y' \sin\beta,$$

то, такъ какъ постоянный членъ не измѣняется и мы должны получить уравненіе (7), заключаемъ, что многочленъ $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$ сдѣлается тожественнымъ съ многочленомъ $\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2}$. Если это же преобразованіе приложимъ къ сопряженной гиперболѣ, то получимъ $\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} + 1 = 0$. Слѣдовательно, величина мнимаго полудіаметра b' данной гиперболы, имѣющей направленіе по OY', равна разстоянію OE точки O отъ точки E, въ которой прямая OY' пересѣкаетъ сопряженную гиперболу.

Подобнымъ же образомъ уравненіе асимптотъ будетъ

$$\frac{x'^2}{a'^2} - \frac{y'^2}{b'^2} = 0 \text{ или } y' = \pm \frac{b'}{a'} x'.$$

Отсюда заключаемъ, *что діагонали параллелограмма FHGK, построеннаго на двухъ какихъ-нибудь сопряженныхъ діаметрахъ, совпадаютъ съ асимптотами гиперболы.*

Подобно тому, какъ въ § 181, можно убѣдиться прямо, что прямыя $y' = \pm \frac{b'}{a'} x'$ суть асимптоты.

Стороны FH, GK параллелограмма суть касательныя къ первой гиперболѣ, а стороны FK и GH — къ сопряженной гиперболѣ, такъ что параллелограмъ будетъ описаннымъ около системы двухъ кривыхъ.

193. Если черезъ α и β назовемъ углы, образуемые поперечною осью OX съ двумя сопряженными полудіаметрами OD и OE; черезъ a' и b' ихъ величины, то между этими четырьмя перемѣнными величинами получимъ три уравненія.

$$\frac{a'^2\cos^2\alpha}{a^2}-\frac{a'^2\sin\alpha^2}{b^2}=1,$$

$$\frac{b'^2\cos^2\beta}{a^2}-\frac{b'^2\sin^2\beta}{b^2}=-1.$$

$$\frac{\cos\alpha\cos\beta}{a^2}-\frac{\sin\alpha\sin\beta}{b^2}=0.$$

Первыя два уравненія выводятся изъ уравненій двухъ сопряженныхъ гиперболъ, отнесенныхъ къ полярнымъ координатамъ; третье уравненіе выражаетъ, что два діаметра суть сопряженные діаметры. Эти уравненія аналогичны съ уравненіями, которыя мы нашли для эллипса (§ 161); поэтому съ ними можно сдѣлать то же преобразованіе. Третье уравненіе можно представить въ видѣ

$$\frac{\frac{a'\cos\alpha}{a}}{\frac{b'\sin\beta}{b}}=\frac{\frac{a'\sin\alpha}{b}}{\frac{b'\cos\beta}{a}}=\frac{\sqrt{\left(\frac{a'\cos\alpha}{a}\right)^2-\left(\frac{a'\sin\alpha}{b}\right)^2}}{\sqrt{\left(\frac{b'\sin\beta}{b}\right)^2-\left(\frac{b'\cos\beta}{a}\right)^2}}=1;$$

продолжая точно также, получимъ

$$a'^2\cos^2\alpha-b'^2\cos\beta=a^2,\quad a'^2\sin\alpha-b'^2\sin^2\beta=-b^2.$$

Такимъ образомъ, *разность квадратовъ проекцій двухъ какихъ-нибудь сопряженныхъ діаметровъ на каждую изъ осей есть величина постоянная.*

Сложивъ почленно эти два уравненія, получимъ

$$a'^2-b'^2=a^2-b^2;$$

т. е. разность квадратовъ двухъ какихъ-нибудь сопряженныхъ діаметровъ есть величина постоянная и равна разности квадратновъ осей.

Точно также найдемъ

$$a'b'\sin(\beta-\alpha)=ab;$$

отсюда заключаемъ, *что площадь параллелограмма, построеннаго на двухъ сопряженныхъ діаметрахъ, есть величина постоянная и равна площади прямоугольника, построеннаго на осяхъ.*

Изъ уравненія $a'^2-b'^2=a^2-b^2$ видно, что если a не равно b, то a' не будетъ равняться b', и гипербола не будетъ имѣть равныхъ со-

пряженныхъ діаметровъ. Если, наоборотъ, гипербола будетъ равносторонняя, то $a' = b'$; тогда всѣ сопряженные діаметры будутъ равны, что согласно съ замѣчаніемъ § 191, потому что тогда оба діаметра составляютъ съ асимптотами равные углы.

194. Такъ какъ гипербола и ея двѣ асимптоты имѣютъ одинъ и тотъ же діаметръ для одного и того же ряда хордъ, то средина I хорды MM′ будетъ тоже срединою хорды NN′ (*фиг.* 108). Слѣдовательно, *отрѣзки* MN, M′N′ *сѣкущей, заключающейся между гиперболою и ея асимптотами, равны.*

Если сѣкущая обратится въ касательную, то получимъ DF=DH; т. е. *отрѣзки касательной, заключающіеся между точкою прикосновенія и асимптотами, равны.*

195. Положимъ, что гипербола отнесена къ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ DD′, EE′, изъ которыхъ одинъ параллеленъ данной сѣкущей MN; тогда уравненіе кривой будетъ

$$y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(x'^2 - a'^2),$$

а уравненіе асимптотъ $y'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}x'^2$.

Такъ какъ на *фиг.* 108 сѣкущая MM′ пересѣкаетъ одну и ту же вѣтвь въ двухъ точкахъ, то параллельный ей діаметръ EE′ не пересѣчетъ кривой, и мы получимъ

$$\mathrm{MI}'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}(\mathrm{OI}'^2 - a'^2), \quad \mathrm{NI}'^2 = \frac{b'^2}{a'^2}\mathrm{OI}'^2.$$

и слѣдовательно,

$$\mathrm{NI}^2 - \mathrm{MI}^2 = b'^2, \text{ или } (\mathrm{NI}-\mathrm{MI})(\mathrm{NI}+\mathrm{MI}) = b'^2,$$

но

$$\mathrm{NI} - \mathrm{MI} = \mathrm{MN} \text{ и } \mathrm{NI} + \mathrm{MI} = \mathrm{MN}';$$

слѣдовательно,

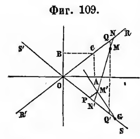
$$\mathrm{MN} \times \mathrm{MN}' = b'^2.$$

Если сѣкущая будетъ пересѣкать обѣ вѣтви гиперболы, то параллельный ей діаметръ пересѣчетъ кривую, и мы получимъ подобный же результатъ. Итакъ *произведеніе отрѣзковъ сѣкущей, заключающейся между точкою кривой и асимптотами, равно квадрату полудіаметра параллельнаго сѣкущей.*

196. По даннымъ асимптотамъ RR′, SS′ и точкѣ M гиперболы, можно найти столько точекъ кривой, сколько угодно (*фиг.* 109). Дѣй-

ствительно, проведемъ черезъ точку M какую-нибудь прямую NMN′; эта прямая пересѣчетъ асимптоты въ точкахъ N и N′. Если на этой прямой возьмемъ линію N′M′, равную NM, то получимъ вторую точку M′ гиперболы. Точно также можно опредѣлить направленіе и величину осей. Такъ какъ кривая расположена въ углахъ ROS, R′OS′, то линія OA, раздѣляющая эти два угла пополамъ, будетъ поперечною осью, а перпендикуляръ OB мнимою осью. Проведемъ QMQ′ перпендикулярно къ OA; тогда мнимая ось b будетъ среднею пропорціональною между MQ и MQ′. Отложивъ на OB линію OB равную b и проведя BC параллельно OA, BC будетъ дѣйствительною осью a.

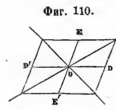
Фиг. 109.



Можно также построить касательную къ кривой въ точкѣ M′ кривой. Проводимъ черезъ эту точку линію M′P параллельно асимптотѣ и возьмемъ OG = 2OP; тогда прямая M′G будетъ искомая касательная.

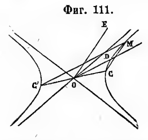
197. Зная положеніе и величину двухъ сопряженныхъ діаметровъ, легко опредѣлить оси. Дѣйствительно, пусть DD′, EE′ (*фиг.* 110) будутъ два діаметра, изъ которыхъ первый будетъ дѣйствительный; тогда діагонали параллелограмма, построеннаго на двухъ діаметрахъ, будутъ ассимптотами; зная оси асимптоты и точку D, мы приходимъ къ предъидущему построенію.

Фиг. 110.



198. *Дополнительныя хорды*. Дополнительными хордами называются такія двѣ хорды MC, MC′, которыя, выходя изъ одной точки кривой, опираются на концы одного и того же діаметра CC′ (*фиг.* 111). Подобно тому какъ въ § 168 было доказано для эллипса, мы докажемъ, *что двѣ дополнительныя хорды параллельны системѣ сопряженныхъ діаметровъ*, и обратно, *если черезъ концы діаметровъ проведемъ прямыя, параллельныя двумъ сопряженнымъ діаметрамъ, то эти прямыя пересѣкутся на гиперболѣ и образуютъ систему дополнительныхъ хордъ.*

Фиг. 111.



Гипербола, отнесенная къ асимптотамъ.

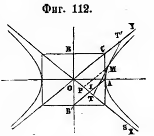
199. Если за оси координатъ возьмемъ двѣ асимптоты кривой, то урав-

неніе не будетъ содержать членовъ первой степени, потому что начало координатъ будетъ центромъ; слѣдовательно, оно будетъ имѣть видъ

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = H.$$

Прямыя, параллельныя OY, пересѣкаютъ кривую только въ одной точкѣ; слѣдовательно, каждой величинѣ x соотвѣтствуетъ только одна величина y; а это показываетъ, что коеффиціентъ C долженъ быть равенъ нулю. Точно также увидимъ, что коеффиціентъ A долженъ быть нуль; такимъ образомъ уравненіе приводится къ

Фиг. 112.



(8) $$Bxy = H, \text{ или } xy = \frac{H}{B} = k^2.$$

Если оси возьмемъ такъ, какъ показано на фигурѣ, то постоянное $\frac{H}{B}$ будетъ положительное, потому что для всѣхъ точекъ кривой координаты x и y будутъ имѣть одинаковые знаки. Постоянное k^2 легко опредѣлить, когда извѣстны оси кривой; дѣйствительно, уравненіе (8) должно удовлетворяться координатами одной какой-нибудь изъ точекъ кривой. Если, напримѣръ, будемъ разсматривать вершину A, то для этой точки получимъ

$$x = y = OI = \frac{AB'}{2} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}; \text{ откуда } k^2 = \frac{a^2 + b^2}{4}.$$

Иногда постоянное k^2 называютъ степенью гиперболы.

Когда гипербола отнесена къ ея асимптотамъ, то уравненіе касательной TT', проведенной въ точкѣ M, координаты который суть x и y, будетъ

(9) $$yX + xY = 2k^2.$$

Абсциссу точки пересѣченія касательной съ осью OX мы найдемъ, положивъ въ этомъ уравненіи $Y = 0$, откуда

$$X = OT = \frac{2k^2}{y} = 2x = 2OP.$$

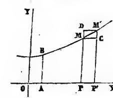
Отсюда мы снова видимъ, что точка прикосновенія M дѣлитъ пополамъ отрѣзокъ TT' касательной, заключающійся между асимптотами (§ 194).

Площадь гиперболическаго сегмента.

200. Сперва мы докажемъ теорему, на которой обыкновенно основывается вычисленіе площадей.

Разсмотримъ площадь, заключающуюся между осью OX, кривою, постоянною ординатою AB и перемѣнною ординатою MP (*фиг.* 113) соотвѣтствующею абсциссѣ x. Эта площадь, которую мы означимъ черезъ S, есть функція перемѣннаго x, производную которой мы постараемся опредѣлить. Дадимъ x приращеніе $\Delta x = PP'$ довольно малое, чтобы отъ M до M′ ордината измѣнилась въ одномъ направленіи; черезъ точки M и M′ проведемъ линіи MC, MD параллельно оси OX; приращеніе ΔS площади болѣе параллелограмма MPP′C и менѣе параллелограмма DPP′M′; площадь перваго параллелограмма равна $y\Delta x \sin\theta$, гдѣ θ есть уголъ между осями; площадь втораго равна $(y + \Delta y)\ \Delta x \sin\theta$; слѣдовательно,

Фиг. 113.



$$y\Delta x \sin\theta < \Delta S < (y+\Delta y)\ \Delta x \sin\theta;$$

и, раздѣливъ на Δx, получимъ

$$y \sin\theta < \frac{\Delta S}{\Delta x} < (y + \Delta y) \sin\theta.$$

Положимъ теперь, что Δx приближается къ нулю; отношеніе $\frac{\Delta S}{\Delta x}$ заключается между двумя величинами: $y \sin\theta$ и другою величиною, которая предѣломъ имѣетъ эту величину; слѣдовательно, отношеніе имѣетъ предѣломъ также $y \sin\theta$. Такимъ образомъ, производная площади, разсматриваемой какъ функція абсциссы, равна $y \sin\theta$. Обратно, площадь S есть первоначальная функція отъ $y \sin\theta$, разсматриваемой какъ функція отъ x. Если оси будутъ прямоугольныя, то производная площади равна y.

201. Разсмотримъ гиперболу, отнесенную къ ея асимптотамъ, и опредѣлимъ площадь, заключающуся между асимптотою OX, гиперболою, постоянною ординатою AB, соотвѣтствующею абсциссѣ a, и перемѣнной орди-

натой MP, соотвѣтствующей абсциссѣ x (*фиг.* 114). Изъ уравненія (8) находимъ $y = \frac{k^2}{x}$ и слѣдовательно

$$S' = y \sin\theta = k^2 \sin\theta \times \frac{1}{x}.$$

Но $\frac{1}{x}$ есть производная отъ Lx; слѣдовательно, $k^2 \sin\theta \frac{1}{x}$ есть производная отъ $k^2 \sin\theta\, Lx$; поэтому

$$S = k^2 \sin\theta\, Lx + C.$$

Фиг. 114.

Постоянное C опредѣлится изъ условія, что при $x = a$, площадь должна равняться нулю; откуда находимъ $C = -k^2 \sin\theta\, La$. Такимъ образомъ получимъ

$$S = k^2 \sin\theta\,(Lx - La) = k^2 \sin\theta \times L\left(\frac{x}{a}\right) \tag{10}$$

Такъ какъ абсцисса a остается постоянною, то, при неопредѣленномъ увеличеніи x, площадь S будетъ также неопредѣленно увеличиваться. Это же самое имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда a приближается къ нулю, а x остается постояннымъ.

Въ частномъ случаѣ, когда гипербола будетъ равносторонняя, мы получимъ $\sin\theta = 1$; если кромѣ того положимъ $k^2 = 1$ и если площадь будемъ считать отъ ординаты, которая соотвѣтствуетъ абсциссѣ 1, т. е. отъ вершины кривой, то предъидущая формула приведется къ

$$S = L(x).$$

Вотъ почему Неперовы логариѳмы называются также гиперболическими логариѳмами. Если положимъ $k = 1$ и $a = 1$, то формула (10) обратится въ

$$S = \sin\theta\, L(x).$$

Уголъ θ можно взять такъ, чтобы S былъ равенъ логариѳму отъ x, взятому по какой-нибудь системѣ, основаніе которой больше e.

ПРИМѢРЫ.

1-й. Даны двѣ точки A и B; черезъ эти двѣ точки проводимъ такія двѣ двигающіяся прямыя AM и BM, чтобы уголъ MAB былъ вдвое болѣе угла MBA; найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія M.

2-й. Опредѣлить геометрическое мѣсто центровъ окружностей, которыя отсѣкаютъ линіи данной длины на сторонахъ даннаго угла.

3-й. Даны двѣ неподвижныя прямыя; движущаяся прямая пересѣкаетъ первыя двѣ такъ, что составляетъ треугольникъ постоянной величины; найти геометрическое мѣсто центровъ тяжестей этихъ треугольниковъ.

4-й. Сѣкущія, проведенныя изъ какой-нибудь точки гиперболы къ двумъ неподвижнымъ точкамъ, взятымъ на кривой, отсѣкаютъ на той или другой асимптотѣ линіи постоянной длины.

5-й. Всякая хорда гиперболы дѣлитъ пополамъ отрѣзокъ той или другой асимптоты, заключающійся между касательными къ двумъ ея концамъ.

6-й. Если на хордѣ гиперболы, принимаемой за діагональ, построимъ параллелограмъ, стороны котораго были бы соотвѣтственно параллельны асимптотамъ, то другая діагональ пройдетъ черезъ центръ.

7-й. Дана неподвижная точка и неподвижная прямая; уголъ постоянной величины вращается около его вершины, помѣщенной въ неподвижной точкѣ; найти геометрическое мѣсто центра круга, описаннаго около треугольника, составленнаго изъ сторонъ угла и неподвижной прямой.

8-й. Треугольникъ ABC вписанъ въ гиперболу; двѣ его стороны имѣютъ постоянныя направленія; найти геометрическое мѣсто средины третьей стороны.

9-й. На одной изъ діагоналей прямоугольника, принимаемой за хорду, описанъ кругъ; найти геометрическое мѣсто концевъ діаметровъ, параллельныхъ второй діагонали.

10-й. Даны уголъ и неподвижная точка; черезъ эту точку проводимъ какую-нибудь сѣкущую и черезъ точки, въ которыхъ эта сѣкущая пересѣкаетъ обѣ стороны угла, проводимъ прямыя, соотвѣтственно параллельныя этимъ сторонамъ; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія этихъ параллельныхъ линій.

11-й. Найти такую точку, что, проведя черезъ эту точку линіи параллельныя асимптотамъ гиперболы, площадь треугольника, образуемаго этими параллельными и гиперболою, была бы равна данной постоянной величинѣ.

12-й. Найти такую точку, чтобы одна изъ линій, дѣлящихъ пополамъ углы, образуемые прямыми, которыя соединяютъ эту точку съ двумя неподвижными точками A и B, имѣла данное направленіе.

13-й. Всякая равносторонняя гипербола, описанная около треугольника, проходитъ черезъ точку пересѣченія высоты.

14-й. Данъ эллипсъ; проводимъ два какіе-нибудь сопряженные діаметра; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія одного изъ нихъ съ прямой, проведенной черезъ неподвижную точку, перпендикулярно къ другому діаметру.

ГЛАВА VI.

Парабола.

202. Второй видъ, къ которому приводится общее уравненіе второй степени, есть $Ny^2 + Px = 0$, или

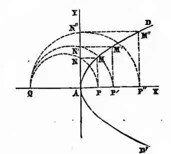
(1) $$y^2 = 2px.$$

Если p будетъ отрицательно, то этотъ случай черезъ перемѣну направленія положительной оси x приведетъ къ случаю p положительнаго; поэтому мы будемъ предполагать, что p положительно. Очевидно, что кривая, выражаемая уравненіемъ (1), симметрична относительно оси x и проходитъ черезъ начало координатъ. Рѣшивъ уравненіе (1) относительно y, получимъ

$$y = \pm\sqrt{2px}.$$

Чтобы ордината была величина дѣйствительная, необходимо, чтобы абсцисса была положительная; если x будетъ возрастать отъ 0 до $+\infty$, то абсолютная величина y будетъ также возрастать отъ 0 до ∞; такимъ образомъ мы получимъ двѣ неопредѣленныя дуги AD и AD′, которыя образуютъ параболу (*фиг* 115).

Фиг. 115.



Прямая AX есть ось параболы, точка A есть вершина; величина p, которая опредѣляетъ кривую, называется параметромъ параболы.

203. *Построеніе кривой по точкамъ.* Ордината MP точки M есть средняя пропорціональная между постоянною величиною $2p$ и абсциссою AP. Отложимъ на AX по направленію отрицательной оси x линію AQ, равную $2p$; потомъ опишемъ различныя окружности, центры которыхъ находились бы на OX, и которыя проходили бы черезъ точку Q. Эти окружности пересѣкаютъ снова ось AX въ точкахъ P, P′,..., а прямую AY въ точкакъ N, N′.... Череъ точки P, P′.... проведемъ перпендикуляры къ оси AX; черезъ точки N, N′... перпендикуляры къ AY; точки пересѣченія M, M′.... будутъ точки параболы.

204. Изъ уравненій

$$MP^2 = 2p.\ AP,\quad M'P'^2 = 2p.\ AP',$$

находимъ

$$\frac{MP^2}{M'P'^2} = \frac{AP}{A'P'},$$

т. е. *квадраты ординатъ, перпендикулярныхъ къ оси параболы, пропорціональны отрѣзкамъ оси, заключающимся между вершиною и ординатами.*

205. Проведемъ черезъ точку M кривую линію, параллельную оси, и представимъ себѣ, что движущаяся точка перемѣщается по этой параллельной линіи. Если въ функціи

$$y^2 - 2px,$$

x и y замѣнимъ координатами движущейся точки, то эта функція обратится въ нуль, когда движущаяся точка будетъ въ M; если движущаяся точка будетъ находиться внѣ кривой, то функція будетъ имѣть положительную величину, а если она будетъ внутри кривой, то функція будетъ отрицательная.

206. Мы видѣли, что безконечныя вѣтви гиперболы имѣютъ асимптоты; парабола не имѣетъ ихъ. Это видно во-первыхъ изъ того, что y увеличивается неопредѣленно вмѣстѣ съ x, и поэтому асимптоты параллельной оси параболы не будетъ. Во-вторыхъ пусть $y_1 = ax + b$ будетъ уравненіе какой-нибудь прямой наклоненной къ оси; разность ординатъ точекъ прямой и кривой, которыя соотвѣтствуютъ одной и той же абсциссѣ, равна

$$ax + b - \sqrt{2px},$$

которую можно представить въ видѣ

$$x\left(a + \frac{b}{x} - \sqrt{\frac{2p}{x}}\right).$$

При неопредѣленномъ возрастаніи x, первый производитель увеличивается неопредѣленно, а второй приближается къ величинѣ a, отличающейся отъ нуля; потому произведеніе неопредѣленно увеличивается. Такимъ образомъ, не будетъ даже асимптоты, наклоненной къ оси.

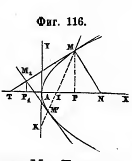
Касательная.

207. Уравненіе касательной, проведенной въ точкѣ M, координаты которой суть x и y, есть

(2) $$yY = p\ (X + x).$$

Пусть T будетъ точка, въ которой касательная пересѣкаетъ ось параболы (*фиг.* 116); если въ уравненіи (2) сдѣлаемъ $Y = 0$, получимъ $X = -x$, то есть $AT = AP$. Это даетъ намъ легкій способъ строить касательную къ параболѣ въ данной точкѣ M; опускаемъ перпендикуляръ MP на ось, беремъ $AT = AP$ и соединяемъ точки M и T.

Фиг. 116.



208. *Провести касательную черезъ внѣшнюю точку* M_1. Пусть x_1 и y_1, будутъ координаты точки M_1; точки прикосновенія опредѣлятся изъ уравненія хорды прикосновенія

(3) $$y_1 y = p\ (x + x_1)$$

и уравненія кривой (1); откуда получимъ

$$y = y_1 \pm \sqrt{y_1^2 - 2px_1},\quad x = \frac{y^2}{2p};$$

эти величины будутъ дѣйствительныя, когда точка M будетъ находиться внѣ кривой.

Чтобы построить прямую MM′, отыскиваемъ точки, въ которыхъ она пересѣкаетъ оси координатъ; если въ уравненіи (3) сдѣлаемъ $y = 0$, то получимъ $x = -x_1$; т. е. AI равно AP_1; если сдѣлаемъ $x = 0$, то получимъ $y = \frac{px_1}{y_1}$; такимъ образомъ, точку K найдемъ, какъ четвертую пропорціональную.

209. *Провести касательную параллельно данной прямой.* Если черезъ m означимъ угловой коеффиціентъ данной прямой, то изъ уравненія $\frac{p}{y} = m$ и уравненія кривой опредѣлимъ координаты точки прикосновенія $y = \frac{p}{m}$, $x = \frac{p}{2m^2}$; отсюда находимъ уравненіе касательной

(4) $$Y = mX + \frac{p}{2m}.$$

210. *Нормаль*. Уравненіе нормали MN, проведенной къ параболѣ, въ точкѣ M, координаты которой суть x и y, есть

$$(5) \qquad Y - y = -\frac{y}{p}(X - x).$$

Положивъ $Y = 0$, получимъ абсциссу точки N, въ которой оно пересѣкаетъ ось

$$PN = X - x = p.$$

Такимъ образомъ *въ параболѣ субнормаль* PN *есть величина постоянная и равна параметру* p.

Діаметры.

211. Приложивъ общее уравненіе діаметровъ кривыхъ втораго порядка къ параболѣ, выражаемой уравненіемъ $y^2 - 2px = 0$, получимъ уравненіе

$$(6) \qquad my - p = 0, \text{ или } y = \frac{p}{m}.$$

Подобно тому, какъ доказали въ § 132, мы докажемъ, *что всѣ діаметры параболы параллельны оси.*

Фиг. 117.

Такъ какъ угловой коеффиціентъ m хордъ можно взять такъ, чтобы $\frac{p}{m}$ имѣло какую угодно величину, то отсюда выводимъ обратное заключеніе, что *всякая линія, параллельная оси, есть діаметръ.*

Пусть A′ будетъ точка пересѣченія діаметра съ кривой (*фиг.* 116): такъ какъ ордината точки A′ равна $\frac{p}{m}$, и угловой коеффиціентъ касательной въ этой точкѣ равенъ $\frac{p}{y}$, т. е. m, то заключаемъ, *что касательная, проведенная къ концу діаметра, параллельна хордамъ, которыя этотъ діаметръ дѣлитъ пополамъ.*

212. *Парабола, отнесенная къ одному изъ своихъ діаметровъ и къ касательной, проведенной къ одному изъ его концовъ.* Мы видѣли (§ 139), что, принимая за оси координатъ діаметръ A′X′ и касательную A′Y′, проведенную къ его концу, уравненіе параболы будетъ

$$(7) \qquad y^2 = 2p'x.$$

Если черезъ a и b назовемъ координаты точки A′ относительно первоначальныхъ осей, и если проведемъ AP′ параллельно A′T, то, какъ извѣстно, получимъ A′P′ = AT = AP; слѣдовательно, координаты вершины A относительно новыхъ осей равны a и $-\sqrt{4a^2+b^2}$; такъ какъ эти координаты должны удовлетворять уравненію (7), то находимъ

$$2p' = \frac{4a^2+b^2}{a} = \frac{4a^2+2pa}{a} = 2p + 4a.$$

Точно также получимъ

$$p' = \frac{\mathrm{A'T}^2}{2\mathrm{AT}} = \frac{\mathrm{A'T}^2}{\mathrm{TP}} = \mathrm{TN}.$$

Если черезъ θ означимъ уголъ Y′A′X′ новыхъ осей, то изъ треугольниковъ NA′T NA′P получимъ

$$\mathrm{TN} = \frac{\mathrm{A'N}}{\sin\theta},\ \ \mathrm{A'N} = \frac{\mathrm{PN}}{\sin\theta},$$

откуда

$$p' = \mathrm{TN} = \frac{\mathrm{PN}}{\sin^2\theta} = \frac{p}{\sin^2\theta}.$$

213. Такъ какъ уравненіе параболы, отнесенной къ діаметру A′X и къ касательной A′Y (*фиг.* 118), есть $y^2 = 2p'x$, то очевидно, что уравненіе $y\mathrm{Y} = p'(\mathrm{X}+x)$ выразитъ или касательную въ точкѣ M, если x и y будутъ означать координаты этой точки; или хорду прикосновеній касательныхъ, проведенныхъ изъ внѣшней точки, если x и y будутъ означать координаты этой внѣшней точки.

Фиг. 118.

Касательныя, проведенныя въ двухъ концахъ M и M′ хорды, пересѣкаютъ діаметръ въ одной и той же точкѣ T такъ, что A′T = A′I. Отсюда слѣдуетъ, что прямая прикосновеній M′M, относящаяся къ внѣшней точкѣ T, дѣлится пополамъ діаметромъ TX, который проходитъ въ этой точкѣ, и сверхъ того A′I = A′T.

Изъ этого мы выводимъ способъ строить параболу по точкамъ, когда извѣстны двѣ касательныя TM, TM′ и точки прикосновенія M и M′. Проводимъ хорду MM′; средину I соединяемъ съ точкою T; средина A′ прямой TI′ будетъ точка кривой, а касательная въ этой точкѣ будетъ параллельна MM′. Съ помощію касательной A′T′, которая касается кривой въ точкѣ A′, и каждой изъ данныхъ касательныхъ опредѣлимъ двѣ но-

выя касательныя съ ихъ точками прикосновенія, и такимъ образомъ далѣе. Этотъ способъ часто употребляется тогда, когда двѣ прямыя надобно соединить дугою параболы, если нельзя употребить дугу круга, т. е. когда разстоянія TM и TM' не равны.

Площадь параболическаго сегмента.

214. Опредѣлимъ площадь S треугольника A'IM (*фиг.* 118). Если эту площадь будемъ разсматривать, какъ функцію абсциссы точки M, то производная S' опредѣлится изъ формулы

$$S' = y \sin\theta = \sqrt{2p'x}.\sin\theta = \sqrt{2p'}.\sin\theta\, x^{\frac{1}{2}}.$$

Отсюда

$$S' = \frac{2}{3}\sqrt{2p'}.\sin\theta.\, x^{\frac{3}{2}} + C.$$

Постоянное C равно нулю, потому что, при $x = 0$, площадь равна нулю. Такимъ образомъ получимъ

$$S = \frac{2}{3}\sqrt{2p'}\, x \sin\theta = \frac{3}{2}\, xy \sin\theta.$$

Площадь S равна двумъ третямъ параллелограмма A'IMN, и, слѣдовательно, площадь треугольника A'NM есть треть того же параллелограмма.

ПРИМѢРЫ.

1-й. Найти геометрическое мѣсто вершины угла, описаннаго около параболы и притомъ такого, чтобы площадь треугольника, образуемаго сторонами угла и дугою параболы, была постоянная.

2-й. Найти геометрическое мѣсто точекъ, изъ которыхъ можно провести къ параболѣ двѣ взаимно перпендикулярныя нормали.

3-й. Сѣкущая обращается около неподвижной точки, взятой на оси параболы; черезъ точки, въ которыхъ она пересѣкаетъ параболу, проводимъ нормали; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія этихъ нормалей.

4-й. Парабола перемѣщается параллельно самой себѣ такимъ образомъ, что ея вершина описываетъ параболу въ ея начальномъ положеніи; изъ вершины неподвижной параболы проводимъ касательныя къ движущейся параболѣ; найти геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія.

5-й. Найти геометрическое мѣсто такой точки, чтобы сумма квадратовъ нормалей, проведенныхъ изъ этой точки къ данной параболѣ, была величина постоянная.

6-й. Дана кривая втораго порядка, вписанная въ уголъ; проводимъ къ этой кривой какую-нибудь касательную; найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія высотъ треугольника, образуемаго движущеюся касательною и сторонами треугольника; найти также геометрическое мѣсто центра круга, описаннаго около того же треугольника.

7-й. Данъ эллипсъ; черезъ неподвижную точку проводимъ двѣ какія-нибудь взаимно-перпендикулярныя прямыя, и въ точкѣ, гдѣ эти прямыя пересѣкаютъ эллипсъ, проводимъ касательныя къ этому эллипсу; найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченій этихъ касательныхъ.

8-й. Та же задача, когда взаимно-перпендикулярныя линіи замѣнимъ прямыми параллельными двумъ сопряженнымъ діаметрамъ другаго даннаго эллипса.

9-й. Уголъ постоянной величины обращается около своей вершины, помѣщенной на данной кривой втораго порядка; въ точкахъ, въ которыхъ стороны угла пересѣкаютъ кривую, проводимъ касательныя къ этой кривой. Найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія этихъ касательныхъ.

10-й. Найти геометрическое мѣсто центра равнобедреннаго треугольника, составленнаго изъ трехъ касательныхъ, или трехъ нормалей, проведенныхъ къ параболѣ.

11-й. Доказать, что площадь треугольника, вершины котораго суть точки прикосновенія трехъ касательныхъ къ параболѣ, равна двойной площади треугольника, образуемаго этими касательными, и выражается черезъ $\pm \frac{1}{4p}(y'-y'')(y''-y''')(y'''-y')$, означивъ черезъ y', y'', y''' перпендикуляры, опущенные изъ вершинъ треугольника на ось.

12-й. Проводимъ какую-нибудь касательную къ гиперболѣ; точки, въ которой она пересѣкаетъ соотвѣтствующія асимптоты, соединяемъ съ двумя неподвижными точками; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія двухъ прямыхъ.

13-й. Провести къ параболѣ такую нормаль, чтобы площадь, заключающаяся между этою нормалью и кривой, имѣла бы наименьшую величину.

ГЛАВА VII.

Фокусы и директрисы.

215. Предложимъ слѣдующій вопросъ. Даны точка F и прямая DE (*фиг.* 119); найти точку, разстоянія которой отъ данной точки и прямой находились бы между собою въ постоянномъ отношеніи. Возьмемъ на плоскости какія-нибудь прямоугольныя оси; назовемъ черезъ α и β координаты точки F, и пусть $mx+ny+h=0$ будетъ уравненіе прямой DE; разстоянія какой-нибудь точки M отъ точки F и прямой DE опредѣлятся изъ формулъ

Фиг. 119.

$$MF=\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2};\quad MP=\frac{\pm(mx+ny+h)}{\sqrt{m^2+n^2}};$$

если черезъ k означимъ постоянное отношеніе $\frac{MF}{MP}$, то геометрическое мѣсто точки выразится уравненіемъ

$$\sqrt{(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2}=\pm\frac{k(mx+ny+h)}{\sqrt{m^2+n^2}},$$

или

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=\frac{k^2(mx+ny+h)^2}{m^2+n^2}.$$

Это геометрическое мѣсто есть кривая втораго порядка. Такъ какъ величина B^2-4AC, по которой различается родъ кривой, равна $4(k^2-1)$, то кривая будетъ эллипсъ, парабола или гипербола, смотря по тому, будетъ ли отношеніе k меньше, равно или больше единицы.

216. Обратно, дана кривая втораго порядка; отыщемъ въ плоскости кривой такую неподвижную точку F и такую неподвижную прямую DE, чтобы отношеніе разстояній каждой точки кривой отъ точки F и отъ прямой DE было постоянное. Если найдемъ точку и прямую, имѣющія эти свойства, то точка будетъ называться *фокусомъ* кривой, а прямая *директрисой*.

Вопросъ можно изложить другимъ образомъ; возьмемъ какія-нибудь оси координатъ, составляющія между собой уголъ θ; положимъ, что мы нашли такую точку F, координаты которой суть α и β, и также прямую DE, уравненіе которой есть $mx+ny+h=0$, что отношеніе $\frac{MF}{MP}$ равно постоянной величинѣ k; такъ какъ разстояніе MP точки M кривой, координаты которой суть x и y, отъ директрисы DE, выражается черезъ $\frac{\pm(mx+ny+h)\sin\theta}{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\theta}}$, то получимъ

$$MF=\pm\frac{k(mx+ny+h)\sin\theta}{\sqrt{m^2+n^2-2mn\cos\theta}}.$$

Такимъ образомъ разстояніе какой-нибудь точки M кривой отъ фокуса F выражается функціею цѣлою и первой степени относительно координатъ x и y точки M.

Обратно, если извѣстная точка F имѣетъ то свойство, что ея разстояніе отъ какой-нибудь точки M кривой выражается функціею цѣлою и

первой степени относительно координатъ x и y точки M, то эта точка F будетъ фокусъ, т. е. существуетъ такая прямая DE, что отношеніе разстояній каждой точки кривой отъ точки F и отъ прямой DE будетъ постоянное. Дѣйствительно, положимъ, что имѣемъ

$$FM = \pm (mx + ny + h),$$

означая черезъ $mx + ny + h$ функцію цѣлую и первой степени относительно координатъ x и y точки M. Разсмотримъ прямую DE, уравненіе которой есть

$$mx + ny + h = 0.$$

Разстояніе точки M отъ этой прямой опредѣляется формулою

$$MP = \frac{\pm (mx + ny + h) \sin \theta}{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta}};$$

слѣдовательно получимъ

$$\frac{MF}{MP} = \frac{\sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta}}{\sin \theta}.$$

Такимъ образомъ отношеніе разстояній каждой точки кривой отъ опредѣленной точки F и опредѣленной прямой DE есть величина постоянная, слѣдовательно, точка F есть фокусъ кривой, а прямая DE есть соотвѣтствующая директриса. Означивъ черезъ k постоянное отношеніе, получимъ $k \sin \theta = \sqrt{m^2 + n^2 - 2mn \cos \theta}$.

Вотъ почему часто фокусъ кривой втораго порядка опредѣляютъ какъ такую опредѣленную точку F, разстояніе которой отъ какой-нибудь точки M кривой выражается функціею цѣлою и первой степени относительно координатъ точки M. Приравнявъ эту функцію нулю, получимъ уравненіе директрисы.

Очевидно a priori, что это алгебраическое свойство фокуса не зависитъ отъ положенія осей координатъ въ плоскости; потому что функція цѣлая и первой степени будетъ имѣть это же свойство и тогда, когда перемѣнимъ оси координатъ.

Если за ось y возьмемъ линію параллельную директрисѣ, а за ось x какую-нибудь линію, и такъ какъ уравненіе директрисы должно имѣть видъ $mx + h = 0$, то коеффиціентъ n будетъ нуль и разстояніе фокуса отъ какой-нибудь точки M кривой выразится функціею цѣлою и первой степени $\pm (mx + h)$ относительно абсциссы точки M,

Отсюда мы видимъ, что нахожденіе фокуса и директрисы въ кривыхъ втораго порядка приводится къ опредѣленію такой точки F, разстояніе которой отъ какой-нибудь точки M кривой выразилось бы функціею цѣлою и первой степени относительно координатъ точки M. Положимъ, что оси прямоугольныя и пусть

(1) $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

будетъ уравненіе данной кривой втораго порядка. Назовемъ черезъ α и β координаты искомаго фокуса; координаты каждой точки кривой должны удовлетворять уравненію

$$\sqrt{(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2} = \pm (mx + ny + h);$$

или

(2) $$(x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2 - (mx + ny + h)^2 = 0.$$

Такъ какъ оба уравненія (1) и (2) выражаютъ одну и ту же кривую, то онѣ тожественны, т. е. коеффиціенты соотвѣтствующихъ членовъ должны быть пропорціональны; такимъ образомъ для опредѣленія пяти неизвѣстныхъ α, β, m, n, h получимъ пять уравненій

(3) $$\frac{1-m^2}{A} = \frac{-2mn}{B} = \frac{1-n^2}{C} = \frac{-2(\alpha + mh)}{D} = \frac{-2(\beta + nh)}{E} = \frac{\alpha^2 + \beta^2 - h^2}{F}$$

Для простоты вычисленія, мы будемъ разсматривать отдѣльно три кривыя втораго порядка, отнесенныя къ прямоугольнымъ осямъ, которыя упростятъ ихъ уравненія.

Фокусы и директрисы эллипса.

217. Пусть

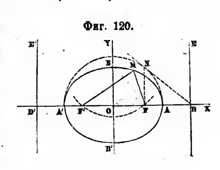
(4) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

будетъ уравненіе даннаго эллипса, отнесеннаго къ его осямъ. Такъ какъ это уравненіе не содержитъ члена xy, то надобно, чтобы коеффиціентъ $-2mn$ при этомъ членѣ въ уравненіи (2) былъ нуль; и для этого необходимо, чтобы $n = 0$ или $m = 0$. Положимъ прежде, что $n = 0$; такъ какъ коеффиціенты членовъ первой степени должны быть также равны нулю, то получимъ $\alpha + mh = 0$, $\beta = 0$, и уравненія (3) приведутся къ

$$a^2(1-m^2) = b^2 = h^2 - \alpha^2.$$

Отсюда находимъ $m^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$; такъ какъ всегда можно положить m положительнымъ, не перемѣняя знаковъ коеффиціентовъ при m, n, h въ уравненіи (2), то возьмемъ $m = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$. Если въ уравненіи, $a^2(1 - m^2) = h^2 - \alpha^2$ замѣнимъ h его величиною, найденною изъ уравненія $\alpha + mh = 0$, то получимъ $\alpha^2 = a^2 - b^2$, откуда $\alpha = \pm\sqrt{a^2 - b^2}$, $h = \mp a$.

Фиг. 120.



Такимъ образомъ получимъ два фокуса F и F′ (*фиг.* 120), находящіеся на большой оси на равномъ разстояніи въ обѣ стороны отъ центра. Чтобы опредѣлить ихъ, изъ вершины B малой оси, какъ центра, радіусомъ равнымъ a описываемъ кругъ; точки F и F′, въ которыхъ этотъ кругъ пересѣкаетъ большую ось, будутъ фокусы. Если для краткости положимъ $a^2 - b^2 = c^2$, то получимъ $\alpha = \pm c$, $m = \frac{c}{a}$, $h = \mp a$; верхніе знаки относятся къ фокусу F, нижніе къ фокусу F′. Уравненіе директрисы, какъ извѣстно, получимъ, приравнявъ нулю многочленъ $mx + ny + h$, это уравненіе приводится къ $\frac{c}{a}\, x \mp a = 0$ или $x = \pm\frac{a^2}{c}$. Такимъ образомъ получаемъ двѣ директрисы; фокусу F соотвѣтствуетъ директриса DE, уравненіе которой есть $x = \frac{a^2}{c}$; фокусу F′— директриса D′E′, уравненіе которой есть $x = -\frac{a^2}{c}$. Эти директрисы перпендикулярны къ большой оси и находятся на равномъ разстояніи отъ центра. Опредѣленіе точки D приводится къ нахожденію третьей пропорціональной линіи; мы ее построимъ слѣдующимъ образомъ. На большоі оси, какъ на діаметрѣ опишемъ кругъ; изъ фокуса F возставимъ перпендикуляръ къ этой оси, и въ точкѣ N, въ которой перпендикуляръ пересѣкаетъ кругъ, проведемъ касательную къ кругу; точка, въ которой эта касательная пересѣкаетъ большую ось, будетъ точка D.

Мы видѣли также, что постоянное отношеніе разстояній каждой точки кривой отъ фокуса и отъ соотвѣтствующей директрисы, равной $\sqrt{m^2 + n^2}$, относительно прямоугольныхъ координатъ; слѣдовательно, $k = m = \frac{c}{a}$. Отношеніе $\frac{c}{a}$ называется ***эксцентрицитетомъ*** эллипса.

218. Положимъ теперь, что $m = 0$; такъ какъ коэффиціенты членовъ первой степени должны быть нули, то получимъ $\alpha = 0$, $\beta + nh = 0$, и уравненіе (3) приводится къ

$$a^2 = b^2\ (1 - n^2) = h^2 - \beta^2.$$

Отсюда

$$n = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b},\quad \beta = \pm\sqrt{b^2 - a^2};\ h = \mp b.$$

Чтобы получить эти новыя рѣшенія, надобно во-первыхъ перемѣнить a и b, m и n, α и β. Такъ какъ мы предполагали a болѣе b, то эти два рѣшенія будутъ мнимыя. Такимъ образомъ постояннымъ можно дать четыре системы величинъ, которыя дѣлаютъ тожественными уравненія (2) и (4); но только двѣ системы даютъ дѣйствительные фокусы и директрисы.

Теорема I.

219. *Сумма разстояній каждой точки эллипса отъ двухъ фокусовъ есть величина постоянная.*

Разстояніе фокуса отъ какой-нибудь точки M кривой выражается формулой $\pm(mx + ny + h)$, т. е. $\pm\left(\frac{cx}{a} \mp a\right)$. Знакъ —, находящійся въ скобкахъ, относится къ фокусу F; знакъ + къ фокусу F′; знакъ, находящійся передъ скобками, выбираютъ такъ, чтобы было положительное количество.

Такъ какъ для эллипса отношеніе $\frac{c}{a}$ менѣе единицы, а абсцисса x менѣе абсолютной величины a, то членъ $\frac{cx}{a}$ менѣе абсолютной величины a, слѣдовательно, выраженіе въ скобкахъ имѣетъ знакъ втораго члена. Для фокуса F беремъ передъ скобками знакъ — и для фокуса F′ знакъ +; такимъ образомъ получимъ

$$\mathrm{FM} = a - \frac{cx}{a},\quad \mathrm{MF'} = a + \frac{cx}{a},$$

откуда

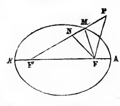
$$\mathrm{MF} + \mathrm{MF'} = 2a.$$

220. *Примѣчаніе I. Сумма разстояній точки, находящейся вну-*

три эллипса, отъ двухъ фокусовъ менѣе большой оси; сумма разстояній внѣшней точки больше большой оси.

Разсмотримъ прежде точку N (*фиг.* 121), находящуюся внутри эллипса. Соединимъ эту точку съ двумя фокусами и продолжимъ прямую F′N до пересѣченія ея съ эллипсомъ въ точкѣ M. Такъ какъ точка M принадлежитъ эллипсу, то сумма двухъ радіусовъ векторовъ $MF + MF'$ равна большей оси AA'; прибавивъ къ обѣимъ частямъ одну и ту же величину F′N, увидимъ, что линія $F'N + NF$ менѣе $F'M + MF$, т. е. менѣе AA'.

Фиг. 121.



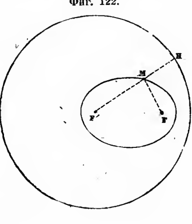
Разсмотримъ теперь точку P, находящуюся внѣ эллипса. Прямая PF′ пересѣкаетъ эллипсъ въ точкѣ M. Ломаная линія $MP + PF$ болѣе прямой MF; прибавивъ къ обѣимъ частямъ величину F′M, увидимъ, что линія $F'P + PF$ болѣе $F'M + MF$, т. е. болѣе AA'.

Очевидно также, что обратныя предложенія справедливы. Если сумма разстояній точки плоскости отъ двухъ фокусовъ менѣе большей оси, то эта точка находится внутри эллипса. Если сумма болѣе большой оси, точка лежитъ внѣ эллипса.

Отсюда слѣдуетъ, что эллипсъ можно разсматривать, какъ геометрическое мѣсто точекъ, сумма разстояній которыхъ отъ двухъ фокусовъ равна $2a$. Такимъ образомъ въ элементарной геометріи опредѣляется эллипсъ; и на этомъ свойствѣ основывается построеніе эллипса по точкамъ, или непрерывнымъ движеніемъ, о которомъ было говорено въ началѣ (§§ 12 и 13).

221. *Примѣчаніе II. Эллипсъ есть геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ фокуса* F *и круга, описаннаго изъ другаго фокуса* F′, *какъ центра, радіусомъ равнымъ большой оси.*

Фиг. 122.



Если фокусы соединимъ съ какою-нибудь точкою M эллипса, и если радіусъ векторъ F′M продолжимъ на величину MH, равную MF, то получимъ постоянную величину F′H, равную большей оси; слѣдовательно, геометрическое мѣсто точки H будетъ кругъ, описанный изъ фокуса F′, какъ центра, радіусомъ, равнымъ большой оси. Такъ какъ часть MH радіуса есть

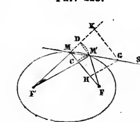
самое кратчайшее разстояніе точки M отъ окружности, то точка M эллипса равно отстоитъ отъ фокуса F и окружности. Этотъ кругъ называется *управляющимъ кругомъ.*

Теорема II.

222. *Касательная, проведенная къ эллипсу, образуетъ равные углы съ радіусами векторами, идущими отъ точки прикосновенія къ двумъ фокусамъ.*

Возьмемъ на эллипсѣ двѣ сосѣднія точки M и M′ (*фиг.* 123); изъ фокуса F, какъ центра, радіусомъ равнымъ FM′ опишемъ дугу круга, которая пересѣчетъ радіусъ векторъ FM въ точкѣ C; тогда линія MC будетъ выражать разность двухъ радіусовъ векторовъ FM и FM′, или величину, на которую уменьшится радіусъ векторъ FM, когда переходимъ отъ точки M къ сосѣдней точкѣ M′. Точно также, если изъ фокуса F′, какъ центра, радіусомъ, равнымъ F′M′, опишемъ дугу круга, которая пересѣчетъ продолженіе радіуса вектора въ точкѣ D, то линія MD выразитъ разность двухъ радіусовъ векторовъ F′M и F′M′ или приращеніе, которое получитъ радіусъ векторъ F′M, при переходѣ отъ точки M къ точкѣ M′. Такимъ образомъ, при переходѣ отъ точки M къ точкѣ M′, радіусъ векторъ FM уменьшается на MC, между тѣмъ какъ другой радіусъ векторъ FM получаетъ приращеніе MD. Такъ какъ сумма двухъ радіусовъ векторовъ FM + F′M остается постоянною, то приращеніе одного равно уменьшенію другаго, а слѣдовательно обѣ линіи MC и MD равны.

Фиг. 123.



Проведемъ черезъ обѣ точки M и M′ сѣкущую MS; въ двухъ кругахъ, разсматриваемыхъ выше, проведемъ хорды M′C и M′D. На сѣкущей MS отложимъ произвольную, но постоянную линію MG, и черезъ точку G проведемъ линію GH параллельно M′C, GK параллельно M′D. Изъ параллельности этихъ линій находимъ

$$\frac{MC}{MH}=\frac{MM'}{MG}=\frac{MD}{MK};$$

такъ какъ двѣ линіи MC и MD равны, то отсюда слѣдуетъ, что линіи MH и MK также равны.

Положимъ теперь, что точка M′ неопредѣленно приближается къ точкѣ M; тогда сѣкущая MS будетъ приближаться къ предѣльному положенію MT (*фиг.* 124), которое будетъ касательная къ эллипсу. Въ то же время точки C и D приближаются къ точкѣ M; тогда продолженныя хорды M′C и M′D приближаются къ касательнымъ кругамъ, описаннымъ изъ точекъ F и F′, какъ центровъ, радіусами FM и F′M, и слѣдовательно сдѣлаются перпендикулярными къ радіусамъ FM и F′M; линіи GH и GK, которыя имъ параллельны, сдѣлаются также перпендикулярными къ этимъ же радіусамъ, и, слѣдовательно, углы H и K сдѣлаются прямыми.

Предѣлы двухъ треугольниковъ MGH, MGK (*фиг.* 123) суть два прямоугольные треугольника MGH, MGK (*фиг.* 124); эти два треугольника равны, потому что имѣютъ общую гипотенузу MG, а двѣ стороны MH и MK у нихъ равны, какъ предѣлы равныхъ линій; изъ равенства этихъ треугольниковъ заключаемъ, что углы GMH, GMK равны. Отсюда слѣдуетъ, что касательная MT, проведенная къ эллипсу, дѣлитъ пополамъ уголъ FMK, образуемый однимъ изъ радіусовъ векторовъ MF съ продолженіемъ F′M другаго радіуса.

Фиг. 124.

Такъ какъ углы F′MT′ и GMK равны, какъ вертикальные, то очевидно, что касательная TT′ составляетъ съ двумя радіусами векторами, идущими къ точкѣ прикосновенія, равные углы FMT, F′MT′.

223. *Примѣчаніе I.* Проведя изъ точки M (*фиг.* 125) перпендикуляръ MN къ касательной TT′, мы получимъ нормаль къ эллипсу. Углы FMN, F′MN равны, какъ дополнительные равныхъ угловъ FMT, F′MT′; такимъ образомъ *нормаль, проведенная къ эллипсу въ точкѣ* M, *дѣлитъ пополамъ уголъ* FMF′ *между радіусами векторами, идущими отъ этой точки къ двумъ фокусамъ.*

Фиг. 125.



224. *Примѣчаніе II.* Положимъ, что источникъ свѣта помѣщенъ въ фокусѣ F (*фиг.* 126); лучи свѣта, выходя изъ точки F, отражаются на эллипсѣ, составляя уголъ отраженія, равный углу паденія. Пусть FM будетъ одинъ изъ этихъ лучей; проведемъ въ этой точкѣ касательную TT′ къ эллипсу. Такъ какъ отраженный лучъ долженъ съ MT′ составлять уголъ, равный FMT, то онъ будетъ имѣть направленіе по MF′. Такимъ обра-

Фиг. 126.





зомъ всѣ отраженные лучи соберутся въ другомъ фокусѣ F′, гдѣ они дадутъ очень блестящее изображеніе источника свѣта, помѣщеннаго въ первомъ фокусѣ F. Отсюда и происходитъ названіе *фокусъ*.

225. *Примѣчаніе III*. Обратно, эллипсъ есть единственная кривая, которая имѣетъ то свойство, что ея касательная образуетъ съ радіусами векторами, идущими отъ точки прикосновенія къ двумъ опредѣленнымъ точкамъ F и F′, равные углы. Дѣйствительно, найдемъ уравненіе кривой въ биполярныхъ координатахъ (§ 4) и означимъ черезъ u и v два радіуса вектора MF, MF′ (*фиг.* 123). Когда отъ точки M кривой переходимъ къ сосѣдней точкѣ M′, оба радіуса вектора u и a получитъ приращеніе

$$\Delta u = -\mathrm{MC},\ \Delta v = +\mathrm{MD},$$

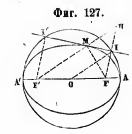
и мы получимъ

$$\frac{\Delta v}{\Delta u} = -\frac{\mathrm{MD}}{\mathrm{MC}} = -\frac{\mathrm{MK}}{\mathrm{MH}}.$$

Если точка M′ будетъ неопредѣленно приближаться къ точкѣ M, то прямая MM′ обратится въ касательную, и оба угла H и K, какъ мы сказали, сдѣлаются прямыми. Сверхъ того мы предположили, что два угла GMH, GMK (*фиг.* 124) равны между собою; слѣдовательно, два прямоугольные треугольника GMH, GMK равны, а слѣд., MH = MK отношеніе $\frac{\Delta v}{\Delta u}$ приближается къ предѣлу, равному -1. Если v будемъ разсматривать какъ функцію отъ u, то увидимъ, что производная этой функціи равна -1; переходя къ первоначальной функціи, получимъ $v = -u + C$, и слѣдовательно $u + v = C$. Такимъ образомъ кривая есть эллипсъ.

226. *Примѣчаніе IV*. *Геометрическое мѣсто проекцій фокусовъ на касательныя къ эллипсу есть кругъ, описанный на большой оси, какъ на діаметрѣ*. Продолжимъ радіусъ векторъ F′M на величину MH, равную MF. Такъ какъ касательная дѣлитъ пополамъ уголъ FMH, то она перпендикулярна къ срединѣ I прямой FH (*фиг.* 126). Эту точку соединимъ съ центромъ O эллипса. Прямая OI, которая дѣлитъ пополамъ стороны F′F, FH треугольника F′FH, параллельна третьей сторонѣ F′H и равна половинѣ ея; такъ какъ линія F′H равна большой оси AA′, то разстояніе OI есть величина постоянная и равна OA. Слѣдовательно, геометрическое мѣсто точки I есть окружность круга, описаннаго изъ точки O, какъ центра, радіусомъ OA.

Фиг. 127.



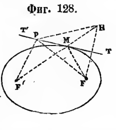
Задача I.

227. *Провести касательную къ эллипсу въ точкѣ* M, *данной на эллипсѣ.*

Эту задачу, точно такъ, какъ и послѣдующія, мы уже рѣшили, разсматривая эллипсъ какъ проекцію круга. Эти вопросы мы рѣшимъ другимъ способомъ, который можетъ быть приложенъ къ гиперболѣ и параболѣ.

Продолжимъ радіусъ векторъ F′M (*фиг.* 122) на величину MH, равную другому радіусу вектору MF; черезъ точку M проведемъ прямую TT′, перпендикулярную къ FH, и мы получимъ искомую касательную. Въ самомъ дѣлѣ въ равнобедренномъ треугольникѣ FMH прямая MF, которая есть перпендикуляръ, опущенный изъ вершины на основаніе FH, дѣлитъ уголъ при вершинѣ пополамъ. Такъ какъ эта прямая дѣлитъ пополамъ уголъ FMA, образуемый однимъ изъ радіусовъ векторовъ съ продолженіемъ другаго, то она совпадаетъ съ касательной къ эллипсу.

Фиг. 128.



228. *Замѣчаніе II.* Замѣтимъ, что всѣ точки касательной, исключая точки прикосновенія M, находятся внѣ эллипса. Пусть P будетъ какая-нибудь точка касательной; соединимъ эту точку съ двумя фокусами и точкою H. Такъ какъ касательная перпендикулярна къ срединѣ FH, то разстояніе PF равно PH, и, слѣдовательно, ломаная линія F′P + PF равна ломаной F′P + PH; но эта послѣдняя болѣе прямой F′H, которая равна большой оси эллипса, потому что радіусъ векторъ F′M мы продолжили на величину MH, равную ME. Такъ какъ сумма разстояній точки P отъ двухъ фокусовъ больше большей оси, то эта точка находится внѣ эллипса.

Ломаная линія F′M + MF есть кратчайшее разстояніе между точками F′ и F и точкой касательной.

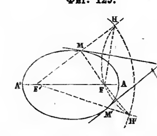
Ломаную линію называютъ *выпуклою* тогда, когда она вся расположена съ одной стороны относительно каждой ея стороны неопредѣленно продолженной. Точно также говорятъ, что кривая выпукла, когда она вся расположена съ одной стороны относительно каждой ея касательной, продолженной неопредѣленно. Отсюда ясно, что эллипсъ есть кривая сомкнутая выпуклая.

Задача II.

229. *Провести касательную къ эллипсу черезъ внѣшнюю точку* P.

Положимъ, что задача рѣшена, и пусть PM (*фиг.* 129) будетъ касательная, проходящая черезъ точку P. Если продолжимъ радіусъ векторъ F′M и отложимъ на его продолженіи линію MH, равную FM, то, какъ извѣстно, касательная PM будетъ перпендикулярна къ срединѣ прямой FH; слѣдовательно, вопросъ приводится къ опредѣленію точки H. Такъ какъ прямая F′H равна большой оси AA′, то точка H находится на окружности, описанной изъ фокуса F′, какъ центра, радіусомъ AA′. Съ другой стороны, такъ какъ разстояніе PH равно PF, то точка H находится на окружности, описанной изъ точки P, какъ центра, радіусомъ PF; слѣдовательно, точка H есть пересѣченіе этихъ двухъ касательныхъ. Отсюда находимъ слѣдующій способъ строить касательную.

Фиг. 129.



Изъ фокуса F′, какъ центра, радіусомъ, равнымъ большей оси, описываемъ кругъ. Изъ точки P, какъ центра, радіусомъ, равнымъ разстоянію PF этой точки отъ другаго фокуса, описываемъ другой кругъ, который пересѣчетъ первый въ точкѣ H. Проведемъ линію FH и изъ точки P проведемъ перпендикуляръ къ линіи FH, который будетъ искомою касательною. Точка прикосновенія M опредѣлится пересѣченіемъ касательной съ прямою F′H.

Оба круга пересѣкаются въ другой точкѣ H′; проведя точно также изъ точки P перпендикуляръ къ FH′, получимъ вторую касательную PM′, точку прикосновенія которой M′ опредѣлимъ помощію прямой F′H′.

Замѣтимъ, что эти построенія можно сдѣлать также тогда, когда эллипсъ не начерченъ. Достаточно знать фокусы и большую ось.

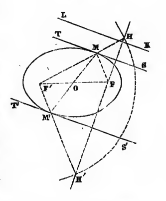
Задача III.

230. *Провести къ эллипсу касательную параллельно данной прямой* KL.

Положимъ, что задача рѣшена, и пусть ST будетъ касательная па-

раллельная KL (*фиг.* 130). Если линію F′M продолжимъ на величину MH, равную MF, то, какъ извѣстно, касательная будетъ перпендикулярна къ срединѣ FH. Отсюда находимъ слѣдующій способъ строить касательную.

Фиг. 130.



Изъ фокуса F′, какъ центра, радіусомъ, равнымъ большой оси, описываемъ кругъ; изъ другаго фокуса F проводимъ прямую FH перпендикулярно къ данной прямой KL; эта прямая пересѣчетъ окружность въ точкѣ H; изъ средины FH возставимъ перпендикуляръ ST, который будетъ искомая касательная. Точка прикосновенія опредѣлится пересѣченіемъ касательной съ прямой F′H.

Продолженіе прямой FH пересѣкаетъ окружность во второй точкѣ H′; возставивъ перпендикуляръ къ срединѣ FH′, получимъ вторую касательную S′T′, точка прикосновенія которой M′ опредѣлится прямой F′H′.

Задача IV.

231. *Эллипсъ опредѣляется его фокусами и большею осью; найти точки, въ которыхъ онъ пересѣкается данною прямою* MM′.

Пусть M будетъ одна изъ точекъ, въ которой данная прямая пересѣкаетъ эллипсъ (*фиг.* 131); эту точку соединимъ съ двумя фокусами и радіусъ векторъ F′M продолжимъ на величину MH, равную MF: точка H принадлежитъ управляющему кругу, описанному изъ фокуса F′, какъ центра. Если изъ точки M, какъ центра, радіусомъ, равнымъ MF, опишемъ кругъ, то этотъ кругъ будетъ касаться управляющаго круга въ точкѣ H. Опустивъ изъ фокуса F перпендикуляръ на данную прямую и продолживъ этотъ перпендикуляръ на величину, равную этому перпендикуляру, получимъ вторую точку F_1, которая будетъ принадлежать этому же кругу. Такимъ образомъ, вопросъ приводится къ отысканію центра M круга, проходящаго черезъ двѣ данныя точки

Фиг. 131.

F и F_1 и касающагося управляющаго круга. Для этого черезъ двѣ точки F и F_1 проводимъ какой-нибудь кругъ, который пересѣчетъ управляющій кругъ въ двухъ точкахъ K и K'; изъ точки I_1 пересѣченія двухъ прямыхъ FF_1 и KK' проводимъ къ управляющему кругу касательную IH; точка M, въ которой прямая $F'H$ пересѣкаетъ данную прямую, будетъ искомою точкою.

Дѣйствительно, мы имѣемъ

$$IH^2 = IK.\ IK' = IF.\ IF_1,$$

слѣдовательно, кругъ, который проходитъ черезъ три точки F, F_1, H, касается управляющаго круга въ точкѣ H. Такъ какъ изъ точки I можно провести двѣ касательныя къ управляющему кругу, то получимъ двѣ точки M и M'.

Когда точка F_1, симметричная фокусу F, относительно данной прямой, находится внутри управляющаго круга, тогда дѣйствительно существуетъ два рѣшенія. Если точка F_1 будетъ находиться на кругѣ, то прямая будетъ касательная къ эллипсу. Наконецъ, если точка F_1 находится внѣ круга, то прямая не пересѣкаетъ эллипса.

Фокусы и директрисы гиперболы.

232. Пусть

$$(5) \qquad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

будетъ уравненіе данной гиперболы, отнесенной къ ея осямъ. Вычисленіе будетъ то же, какъ для эллипса, надобно только b^2 замѣнить черезъ $-b^2$. Такимъ образомъ получимъ два дѣйствительныя рѣшенія (§ 217):

$$\beta = 0,\ \alpha = \pm\sqrt{a^2 + b^2},\ m = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{a},\ n = 0,\ h = \pm a$$

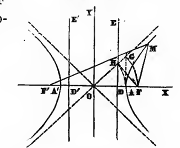
и два мнимыя рѣшенія

$$\alpha = 0,\ \beta = \pm\sqrt{a^2 - b^2},\ m = 0,\ n = \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{b},\ h = \pm bi.$$

Первыя два рѣшенія опредѣляютъ два дѣйствительные фокуса F и F', находящіеся на поперечной оси на равномъ разстояніи отъ центра

(*фиг.* 132). Мы получимъ ихъ, проведя черезъ вершину A перпендикуляръ AG къ поперечной оси до пересѣченія съ асимптотою, и отложивъ на поперечной оси линіи OF и OF′ равныя OG. Если для краткости положимъ $a^2 + b^2 = c^2$, то получимъ

Фиг. 132.



$$\alpha = \pm\, c,\ m = \frac{c^2}{a}.$$

Уравненія директрисъ будутъ

$$\frac{c}{a}x \mp a = 0 \text{ или } x = \pm\frac{a^2}{c}.$$

Фокусу D соотвѣтствуетъ директриса DE; фокусу F′ — директриса D′E′. Изъ точки O, какъ центра, радіусомъ OA опишемъ дугу круга, которая пересѣчетъ асимптоту въ точкѣ H; эта точка принадлежитъ директрисѣ. Дѣйствительно треугольники OAG, OHF равны, потому что уголъ O у нихъ есть общій, стороны OA=OH и OF=OG, и уголъ OHF естъ прямой. Если изъ точки H опустить перпендикуляръ HD на ось OA, то получимъ OH^2=OF, OD и слѣдовательно $OD = \frac{a^2}{c}$. Такимъ образомъ прямая DH директриса.

Постоянное отношеніе $k = \sqrt{m^2 + n^2}$ равно m, или отношенію $\frac{c}{a}$, которое называется *эксцентрицицетомъ* гиперболы.

Теорема III.

233. *Разность разстояній каждой точки гиперболы отъ фокусовъ есть величина постоянная и равна поперечной оси.*

Разстояніе фокуса отъ какой-нибудь точки M кривой выражается черезъ $\pm\left(\frac{cx}{a} \mp a\right)$; верхній знакъ, находящійся въ скобкахъ, относится къ фокусу F, нижній къ фокусу F′. Передъ скобками надобно выбирать знакъ такъ, чтобы получить положительныя величины. Такъ какъ для гиперболы отношеніе $\frac{c}{a}$ болѣе единицы, а x болѣе абсолютной величины a, то первый членъ $\frac{cx}{a}$ въ абсолютной величинѣ болѣе a. Слѣдовательно, передъ скобками должно взять знаки + или —, смотря по тому, будетъ ли точка

M находиться на правой или на лѣвой вѣтвы. Въ первомъ случаѣ получимъ

$$MF = \frac{cx}{a} - a,\quad MF' = \frac{cx}{a} + a;$$

откуда

$$MF' - MF = 2a.$$

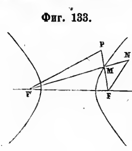
Во второмъ случаѣ

$$MF = -\left(\frac{cx}{a} - a\right),\ MF' = -\left(\frac{cx}{a} + a\right);$$

откуда
$$MF - MF' = 2a.$$

234. *Примѣчаніе. Разность разстояній точки, находящейся между двумя вѣтвями гиперболы, отъ двухъ фокусовъ менье поперечной оси; если точка будетъ находиться въ двухъ другихъ частяхъ плоскости, то разность будетъ болѣе поперечной оси.*

Фиг. 133.



Пусть P будетъ точка, находящаяся между двумя вѣтвями кривой (*фиг.* 133); прямая PF пересѣкаетъ гиперболу въ точкѣ M. Мы имѣемъ

$$PF' - PM < MF';$$

если изъ обѣихъ частей вычтемъ MF, то получимъ

$$PF' - PF < MF' - MF;$$

такъ какъ послѣдняя разность равна $2a$, то первое меньше $2a$.

Разсмотримъ теперь точку N, находящуюся справа первой вѣтви гиперболы; прямая NF' пересѣкаетъ эту вѣтвь въ точкѣ M, и мы получимъ

$$NF < NM + MF,$$

и, прибавивъ къ обѣимъ частямъ MF', найдемъ

$$NF + MF' < NF' + MF,\ \text{откуда}\ NF' - NF > MF' - MF.$$

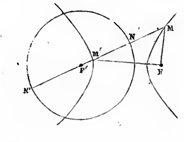
Такъ какъ вторая разность равна $2a$, то первая болѣе $2a$.

Отсюда слѣдуетъ, что гиперболу можно разсматривать, какъ геометрическое мѣсто точекъ, разность разстояній которыхъ отъ двухъ фокусовъ

равна $2a$. На этомъ свойствѣ основывается построеніе гиперболы по точкамъ или помощію непрерывнаго движенія, о которомъ мы говорили вначалѣ (§§ 20 и 21).

235. *Примѣчаніе II. Разстояніе какой-нибудь точки гиперболы отъ фокуса* F *равно нормали, проведенной изъ этой точки къ кругу, описанному изъ другаго фокуса* F′, *какъ центра, радіусомъ, равнымъ поперечной оси*.

Для точки M первой вѣтви (*фиг.* 134) получимъ



Фиг. 134.

$$MF' - MF = 2a = F'N,$$

и слѣдовательно,

$$MF = MF' - F'N = MN.$$

Для точки M′ второй вѣтви получимъ

$$M'F - M'F' = 2a = F'N',$$

и слѣдовательно

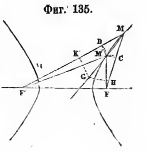
$$M'F = M'H' + F'N' = M'N'.$$

Въ первомъ случаѣ отрѣзокъ MN нормали есть разстояніе точки M отъ круга, и первая вѣтвь гиперболы есть геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ фокуса F и управляющаго круга.

Теорема IV.

236. *Касательная, проведенная къ гиперболѣ, дѣлитъ пополамъ уголъ между радіусами векторами, идущими отъ точки прикосновенія къ двумъ фокусамъ*.

Возьмемъ на гиперболѣ двѣ сосѣднія точки M и M′ (*фиг.* 135). Изъ фокуса F, какъ центра, радіусомъ, равнымъ FM′, опишемъ дугу круга, который пересѣчетъ радіусъ векторъ FM въ точкѣ C; изъ фокуса F′, какъ центра, радіусомъ, равнымъ F′M′, опишемъ дугу круга, который пересѣчетъ радіусъ векторъ F′M въ точкѣ D. При перемѣщеніи точки M къ точкѣ M′, радіусы векторы FM, F′M уменьшаются на величины, равныя MC и MD; такъ



Фиг. 135.

какъ разность между радіусами есть величина постоянная, то эти двѣ величины равны между собой.

На сѣкущей MM′ возьмемъ произвольную линію MG и черезъ точку G проведемъ линію GH параллельно хордѣ MC и GK параллельно хордѣ MD. Изъ параллельности этихъ линій находимъ

$$\frac{MC}{MH} = \frac{MM'}{MG} = \frac{MD}{MK};$$

такъ какъ линіи MC и MD равны, то отсюда слѣдуетъ, что линіи MH и MK также равны. Если точка M′ будетъ неопредѣленно приближаться къ точкѣ M, сѣкущая MM′ будетъ приближаться къ предѣльному положенію, которое есть касательная къ гиперболѣ въ точкѣ M; въ то же время хорды M′C и M′D сдѣлаются касательными къ кругамъ, описаннымъ изъ фокусовъ, какъ центровъ, и, слѣдовательно, будутъ перпендикулярны къ FM и FM′. Параллельныя имъ линіи GH, GK будутъ также перпендикулярны къ этимъ же радіусамъ, а углы H и K сдѣлаются прямыми. Слѣдовательно, два треугольника MGH, MGK, въ которыхъ сторона MG общая и сторона MH = MK будутъ прямоугольными и слѣдовательно будутъ равны; отсюда слѣдуетъ, что углы GMH и GMK равны; такимъ образомъ касательная, проведенная къ гиперболѣ въ точкѣ M, дѣлитъ уголъ FMF′ пополамъ.

237. *Примѣчаніе I.* Гипербола есть единственная кривая, которая имѣетъ это свойство. Дѣйствительно, назвавъ черезъ u и v радіусы MF и MF′, черезъ Δu и Δv ихъ приращенія, получимъ

$$\frac{\Delta v}{\Delta u} = \frac{MD}{MC} = \frac{MK}{MH}.$$

Если мы положимъ, что при неопредѣленномъ приближеніи точки M′ къ точкѣ M, углы GMH, GMK дѣлаются равными, то треугольники MGH, MGK равны, а слѣдовательно и стороны MH и MK будутъ также равны; отсюда находимъ

$$\lim \frac{\Delta v}{\Delta u} = 1.$$

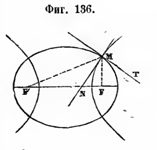
Переходя къ первоначальной функціи, получимъ

$$v = u + C, \text{ откуда } v - u = C.$$

238. *Примѣчаніе II. Однофокусные эллипсъ и гипербола пересѣкаются подъ прямыми углами.* Однофокусными кривыми втораго порядка называются

такія двѣ кривыя, фокусы которыхъ совпадаютъ; угломъ двухъ кривыхъ называется уголъ, образуемый ихъ касательными въ точкѣ пересѣченія. Пусть M будетъ точка пересѣченія эллипса и гиперболы, которыя имѣютъ общіе фокусы F и F′ (*фиг.* 136). Линія MN, которая дѣлитъ уголъ FMF′ пополамъ, есть, съ одной стороны, нормаль къ эллипсу, съ другой—касательная къ гиперболѣ; слѣдовательно, касательныя MT, MN, проведенныя къ двумъ кривымъ, перпендикулярны между собою.

Фиг. 136.



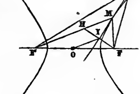
Задача V.

239. *Провести къ гиперболѣ касательную черезъ точку* M, *данную на гиперболѣ.*

На радіусѣ векторѣ MF′ отложимъ линію, MH, равную другому радіусу вектору MF, и черезъ точку M проведемъ прямую MP перпендикулярную къ FH; тогда мы получимъ искомую касательную (*фиг.* 137).

Замѣчаніе. Замѣтимъ, что касательная вся расположена между двумя вѣтвями гиперболы. Пусть P будетъ какая-нибудь точка этой касательной, тогда получимъ

Фиг. 137.



$$P'F - PH < F'H,$$

слѣдовательно,

$$PF' - PF < 2a;$$

такимъ образомъ, точка P находится между двумя вѣтвями гиперболы. Такъ какъ вѣтвь гиперболы расположена по одной сторонѣ каждой ея касательной, то она есть кривая выпуклая.

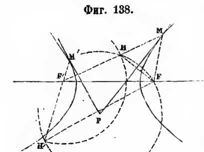
Такъ какъ касательная перпендикулярна къ срединѣ I линіи FH, то точка есть проекція фокуса F на касательную. Прямая OI, которая параллельна F′H, и равна половинѣ F′H, есть величина постоянная; отсюда слѣдуетъ, что геометрическое мѣсто проекцій фокусовъ на касательныя есть кругъ, описанный на поперечной оси, какъ на діаметрѣ.

Задача VI.

240. *Провести касательную къ гиперболѣ черезъ данную точку* P, *находящуюся между двумя вѣтвями гиперболы.*

Пусть PM будетъ касательная, проходящая черезъ точку P (*фиг.* 138). Если изъ радіуса вектора MF′ вычтемъ MH = MF, то, какъ извѣстно, касательная, будетъ перпендикулярна къ срединѣ FH. Такимъ образомъ вопросъ приводится къ опредѣленію точки H; эта точка находится на пересѣченіи круга, описаннаго изъ фокуса F′, какъ центра, радіусомъ равнымъ $2a$, и круга, описаннаго изъ точки P, какъ центра радіусомъ равнымъ PF. Касательную мы получимъ, возставивъ изъ средины FH перпендикуляръ, а точку прикосновенія M опредѣлитъ радіусъ векторъ H′H.

Фиг. 138.



Оба круга пересѣкаются въ другой точкѣ H′; проведя изъ точки P перпендикуляръ къ FH′, получимъ вторую касательную PM′, точки прикосновенія которой опредѣлимъ помощію прямой F′H.

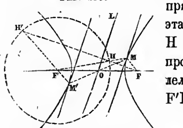
Когда точка P находится на одной изъ асимптотъ, тогда одна изъ касательныхъ, проведенныхъ черезъ точку P, совпадаетъ съ этою асимптотою, и точка прикосновенія удаляется въ безконечность.

Задача VII.

241. *Провести въ гиперболѣ касательную параллельно данной прямой* OL.

Изъ фокуса F′, какъ центра, радіусомъ равнымъ $2a$ опишемъ управляющій кругъ; изъ фокуса F проводимъ прямую перпендикулярно къ OL (*фиг.* 139); эта прямая пересѣчетъ кругъ въ двухъ точкахъ H и H′; черезъ средины прямыхъ FH и FH′ проведемъ линіи параллельныя OL; эти параллельныя будутъ искомыя касательныя. Прямыя F′H, F′H′ опредѣлятъ точки прикосновенія M и M′.

Фиг. 139.



Чтобы задача была возможна, надобно, чтобы данная прямая OL, которая, положимъ, проведена черезъ центръ, не пересѣкала гиперболу; тогда перпендикуляръ FH′, проведенный изъ фокуса F, пересѣчетъ управляющій кругъ въ двухъ точкахъ.

Задача VIII.

242. *Найти точки пересѣченія прямой съ гиперболой, опредѣляемой по ея фокусамъ и ея поперечной оси.*

Построеніе совершенно то же, какъ и въ эллипсѣ.

Фокусы и директрисы параболы.

243. Пусть

(6) $$y^2 - 2px = 0$$

будетъ уравненіе данной параболы, отнесенной къ ея оси и къ касательной, проведенной къ вершинѣ. Такъ какъ это уравненіе не содержитъ члена xy, ни члена x^2, то надобно, чтобы $mn = 0$, $1 - m^2 = 0$; откуда $n = 0$, $m = 1$. Коеффиціентъ при y и постоянный членъ должны также равняться нулю; поэтому $\beta = 0$, $\alpha^2 - h^2 = 0$. Сверхъ того уравненіе (3) (§ 216) приводится къ $1 = \frac{\alpha + h}{p}$; откуда $\alpha + h = p$. Уравненіе $\alpha^2 - h^2 = 0$ или $(\alpha + h)(\alpha - h) = 0$ будетъ $p(\alpha - h) = 0$, т. е. $\alpha - h = 0$; отсюда $\alpha = h = \frac{p}{2}$. Здѣсь мы имѣемъ только одно рѣшеніе. Такимъ образомъ парабола имѣетъ только одинъ фокусъ F, находящійся на его оси на разстояніи, равномъ половинѣ параметра отъ вершины A (*фиг.* 140). Такъ какъ разстояніе FM равно $x + \frac{p}{2}$; то этому фокусу соотвѣтствуетъ директриса ED; выражаемая уравненіемъ $x = -\frac{p}{2}$; эта директриса перпендикулярна къ оси и находится отъ вершины на разстояніи AD, равномъ AF.

Фиг. 140.

Постоянное отношеніе $k = \sqrt{m^2 + n^2}$ приводится въ этомъ случаѣ въ единицѣ; такимъ образомъ каждая точка параболы находится на равномъ разстояніи отъ фокуса и директрисы.

Теорема V.

244. *Всякая внутренняя точка параболы находится ближе къ фокусу, чѣмъ къ директрисѣ; всякая внѣшняя точка, наоборотъ, ближе къ директрисѣ, чѣмъ къ фокусу.*

Разсмотримъ прежде точку N, находящуюся внутри параболы; соединимъ ее съ фокусомъ и изъ этой точки опустимъ на директрису перпендикуляръ NE. Этотъ перпендикуляръ пересѣчетъ кривую въ точкѣ M, которую соединимъ съ фокусомъ. Такъ какъ точка M принадлежитъ къ параболѣ, то разстоянія MF и ME равны, но прямая NF короче ломаной NM + MF; если MF замѣнимъ равною ей ME, то увидимъ, что разстояніе NF менѣе NE. И такъ внутренняя точка N находится ближе къ фокусу, чѣмъ къ директрисѣ.

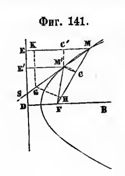
Разсмотримъ теперь внѣшнюю точку P, находящуюся между кривой и директрисой. Соединимъ ее съ фокусомъ и на директрису опустимъ перпендикуляръ PE, который продолжимъ до пересѣченія съ кривой въ точкѣ M. Такъ какъ точка M принадлежитъ къ параболѣ, то разстоянія MF и ME равны; прямая MF или равная ей ME короче ломаной MP + PE; если отъ обѣихъ частей отнимемъ MP, то увидимъ, что PE короче PF. Такимъ образомъ внѣшняя точка P находится ближе къ директрисѣ, чѣмъ къ фокусу. Если точка P будетъ находиться слѣва директрисы, то, очевидно, она будетъ ближе къ директрисѣ, чѣмъ къ фокусу.

Отсюда слѣдуетъ, что параболу можно разсматривать, какъ геометрическое мѣсто точекъ, равно отстоящихъ отъ фокуса и директрисы. Такимъ образомъ опредѣляется парабола въ элементарной геометріи, и на этомъ свойствѣ основывается построеніе параболы по точкамъ или помощію непрерывнаго движенія, о которомъ было говорено вначалѣ (§§ 24 и 25).

Теорема VI.

245. *Касательная, проведенная къ параболѣ, образуетъ равныя углы съ линіею параллельною оси, и радіусомъ векторомъ, проведеннымъ черезъ точку прикосновенія.*

Фиг. 141.



Возьмемъ на параболѣ двѣ сосѣднія точки M и M′ (*фиг.* 141), которыя соединимъ съ фокусомъ, и опустимъ изъ нихъ на директрису перпендикуляры ME, M′E′. Изъ фокуса F, какъ центра, радіусомъ FM′ опишемъ дугу круга M′C, и черезъ точку M′ проведемъ линію M′C′ параллельно директрисѣ. Линія MC равна разности двухъ радіусовъ векторовъ FM и FM′; это есть величина, на которую уменьшается радіусъ векторъ FM, когда точка M перейдетъ въ точку M′. Точно также линія MC′ равна

разности двухъ перпендикуляровъ ME и M′E′; это есть величина, на которую уменьшается перпендикуляръ ME, когда точка M переходитъ къ точкѣ M′. Такъ какъ радіусъ векторъ FM постоянно равенъ перпендикуляру EM, то отсюда слѣдуетъ, что величины MC и MC′ равны между собой.

Проведемъ сѣкущую MS черезъ двѣ точки M и M′ и проведемъ хорду M′C въ кругѣ, описанномъ изъ фокуса, какъ изъ центра. На сѣкущей возьмемъ произвольную линію MG и черезъ точку G проведемъ GH параллельно M′C и GK параллельно M′C′. Изъ параллельности этихъ линій находимъ $\frac{MC}{MH}=\frac{MM'}{MG}=\frac{MC'}{MK}$; такъ какъ линіи MC и MC′ равны, то линіи MH и MK, имъ пропорціональныя, также равны.

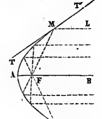
Положимъ теперь, что точка M′ неопредѣленно приближается къ точкѣ M; тогда сѣкущая MS будетъ приближаться къ касательной MT параболы; продолженная хорда M′C приближается также къ касательной круга и слѣдовательно сдѣлается перпендикулярною къ радіусу FM; параллельная GH будетъ также перпендикулярна къ FM. Отсюда видимъ, что два треугольника MGH, MGK предѣлами имѣютъ два прямоугольные треугольника MGH, MGK (*фиг.* 142); эти прямоугольные треугольники равны, потому что имѣютъ общую гипотенузу MG, а стороны MH и MK равны между собой, какъ предѣлы равныхъ величинъ; отсюда заключаемъ, что углы GMH, GMK равны. Такимъ образомъ касательная MT, проведенная къ параболѣ, дѣлитъ пополамъ уголъ FME, образуемый радіусомъ FM и перпендикуляромъ ME, опущеннымъ къ точкѣ прикосновенія на директрису. Если линію EM продолжимъ по направленію ML, то углы GMK, T′ML будутъ равны, какъ вертикальные, и отсюда видимъ, что углы TMF, T′ML, образуемые касательною съ радіусомъ векторомъ и линіею ML, параллельною оси, равны.

Фиг. 142.

246. *Примѣчаніе I.* Положимъ, что источникъ свѣта помѣщенъ въ фокусѣ F (*фиг.* 143) параболы; лучи свѣта, выходя изъ фокуса F, отражаются на параболѣ, образуя уголъ отраженія, равный углу паденія. Пусть FM будетъ одинъ изъ этихъ лучей; проведемъ касательную TT′ къ параболѣ въ этой точкѣ; такъ какъ отраженный лучъ дол-

женъ составлять уголъ LMT', равный FMT, то онъ будетъ параллеленъ оси AB параболы. Такимъ образомъ всѣ отраженные лучи будутъ параллельны оси.

Фиг. 143.



На этомъ свойствѣ основывается устройство рефлекторовъ, употребляемыхъ въ фонаряхъ. Внутренняя поверхность, сдѣланная изъ полированнаго металла, образуется параболою, обращающеюся около ея оси; свѣча помѣщается въ фокусѣ; лучи свѣта, послѣ ихъ отраженія, дѣлаются параллельными оси; рефлекторъ отражаетъ пукъ параллельныхъ лучей, которые распространяются, не разсѣваясь, и освѣщаютъ большое разстояніе.

Примѣчаніе II. Положимъ, наоборотъ, что лучи свѣта, параллельные оси, падаютъ на параболическое зеркало; тогда послѣ отраженія они соберутся въ фокусѣ.

Параболическія зеркала употребляются въ телескопахъ; ось зеркала направляется къ звѣздѣ; лучи свѣта, идущіе отъ звѣзды, отражаются на зеркалѣ и образуютъ въ фокусѣ очень блестящее изображеніе звѣзды.

Параболическій видъ употребляется также въ построеніи рупоровъ и слуховыхъ трубъ.

247. *Примѣчаніе III.* Обратно, парабола есть единственная кривая, которая имѣетъ то свойство, что касательная, проведенная въ каждой ея точкѣ, составляетъ равные углы съ линіею, параллельною опредѣленной прямой, и радіусомъ векторомъ, проведеннымъ изъ опредѣленной точки въ точку прикосновенія. Представимъ, что каждая точка M плоскости опредѣляется ея разстояніемъ MF отъ неподвижной точки F и ея разстояніемъ ME отъ прямой DE, перпендикулярной къ опредѣленной прямой FB (*фиг.* 141). Означимъ черезъ u и v двѣ ея координаты. При перемѣщеніи точки M кривой къ сосѣдней точкѣ M', эти двѣ координаты получаютъ приращенія $\Delta u = -MC$, $\Delta v = -MC'$, и мы получимъ

$$\frac{\Delta v}{\Delta u} = \frac{MC'}{MC} = \frac{MK}{MH}.$$

Когда точка M' неопредѣленно приближается къ точкѣ M, прямая MM' обращается въ касательную, и уголъ H будетъ прямой. Два прямоугольные треугольника GMH, GMK (*фиг.* 142) равны, потому что имѣютъ

общую гипотенузу, и уголъ GMH равенъ GMK по предположенію. Слѣдовательно, получимъ

$$\lim \frac{\Delta v}{\Delta u} = 1,$$

и переходя къ первоначальной функціи, найдемъ $v = u + C$. Перемѣстивъ прямую DE на величину, равную постоянной C, получимъ $v = u$.

Задача IX.

248. *Провести касательную черезъ точку* M, *данную на параболѣ.*

Первый способъ. Пусть T (*фиг.* 144) будетъ точка, въ которой касательная пересѣкаетъ продолженіе оси; ME перпендикуляръ, опущенный изъ точки M на директрису. Извѣстно, что касательная дѣлитъ уголъ FME пополамъ; уголъ FTM равенъ углу TME, какъ внутренніе накрестъ лежащіе, а слѣдовательно равенъ углу FMT; отсюда слѣдуетъ, что треугольникъ TFM равнобедренный, а обѣ стороны FM и FT равны между собою.

Фиг. 144.

Такимъ образомъ, чтобы построить касательную въ точкѣ M, надобно на оси отложить линію FT, равную радіусу вектору FM, и точку T соединить съ M.

Этотъ способъ не употребляется, когда точка M находится близко къ вершинѣ A параболы, потому что тогда двѣ точки M и T, будучи очень близки другъ къ другу, не опредѣляютъ касательной съ достаточною точностію. Въ этомъ случаѣ употребляютъ слѣдующій способъ.

Второй способъ. Касательная MT, раздѣляющая уголъ при вершинѣ M равнобедреннаго треугольника FME пополамъ, перпендикулярна къ срединѣ основанія FE.

Такимъ образомъ, чтобы построить касательную, надобно опустить изъ точки M перпендикуляръ ME на директрису, и изъ точки M провести перпендикуляръ на прямую FE.

Изъ этого построенія слѣдуетъ, что касательная, проведенная къ вершинѣ A параболы, перпендикулярна къ оси параболы.

Замѣчаніе. Замѣтимъ, что всѣ точки касательной, исключая точки

прикосновенія M, лежатъ внѣ параболы. Пусть P будетъ какая-нибудь точка касательной; такъ какъ касательная перпендикулярна къ срединѣ FE, то разстоянія PF, PD равны; но наклонная PE болѣе перпендикуляра PK; слѣдовательно, разстояніе PF болѣе PK, а потому точка P лежитъ внѣ параболы. Отсюда слѣдуетъ, что парабола есть кривая выпуклая.

249. *Примѣчаніе. Геометрическое мѣсто проекцій фокуса на касательную, проведенную къ параболѣ, есть касательная, проведенная къ вершинѣ.* Очевидно, что точка I средина FE и проекція фокуса на касательную находятся на линіи, параллельной директрисѣ, проведенной черезъ точку A, средину FD, т. е. на касательной, проведенной къ вершинѣ A.

Задача X.

250. *Провести касательную къ параболѣ черезъ внѣшнюю точку* P. Положимъ, что задача рѣшена, и пусть PM (*фиг.* 145) будетъ касательная, проходящая черезъ точку P. Если изъ точки M опустимъ перпендикуляръ ME на директрису и если точку F соединимъ съ E, то, какъ извѣстно, касательная PM будетъ перпендикулярна къ срединѣ FE; слѣдовательно, разстояніе PE равно PF; отсюда выводимъ слѣдующій способъ строить касательную.

Фиг. 145.

Изъ точки P, какъ центра, радіусомъ, равнымъ разстоянію PF этой точки отъ фокуса, описываемъ кругъ, который пересѣчетъ директрису въ точкѣ E. Точки F и E соединимъ и изъ точки P проведемъ перпендикуляръ на прямую FE, тогда получимъ искомую касательную. Точка прикосновенія M опредѣлится пересѣченіемъ касательной съ линіею, параллельною оси, проведенною изъ точки E.

Кругъ пересѣкаетъ директрису въ другой точкѣ E′. Проводя изъ точки P перпендикуляръ на EE′, получимъ вторую касательную PM.

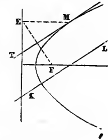
Эти построенія можно сдѣлать, хотя бы парабола не была начерчена. Надобно, чтобы былъ извѣстенъ фокусъ и директриса.

Задача XI.

251. *Провести къ параболѣ касательную параллельно данной прямой* KL.

Положимъ, что задача рѣшена, и пусть MT будетъ искомая касательная (*фиг.* 146). Если изъ точки прикосновенія M опустимъ перпендикуляръ ME на директрису, и если соединимъ точку F съ E, то, извѣстно, касательная будетъ перпендикулярна къ срединѣ FE. Отсюда находимъ слѣдующій способъ строить касательную.

Фиг. 146.

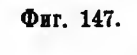


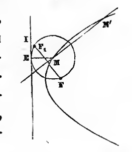
Изъ фокуса F опускаемъ перпендикуляръ на данную прямую KL, и продолжаемъ до пересѣченія ея съ директрисой въ точкѣ E, и изъ средины FE возставляемъ перпендикуляръ MT, и мы получимъ искомую касательную. Точку прикосновенія M опредѣлимъ, проведя черезъ точку E линію EM, параллельную оси.

Задача XII.

252. *Найти точки пересѣченія данной прямой и параболы, опредѣляемой ея фокусомъ и директрисою.*

Возьмемъ точку F_1, симметричную фокусу F, относительно данной прямой (*фиг.* 147). Такъ какъ точка M находится на равномъ разстояніи отъ точекъ F, F_1 и директрисы, то она есть центръ круга, который проходитъ черезъ эти двѣ точки и касается директрисы. Чтобы найти точку прикосновенія E_1, откладываемъ на директрисѣ по обѣ стороны точки I, въ которой прямая FF_1 пересѣкаетъ директрису, линію IE, среднюю пропорціональную между двумя линіями IF, IF_1; такимъ образомъ получимъ двѣ точки пересѣченія M и M′.


Фиг. 147.



Если точка F_1, симметричная фокусу относительно данной прямой, будетъ находиться справа директрисы, то получимъ два рѣшенія. Если точка F_1 будетъ лежать на директрисѣ, то прямая будетъ касательною къ параболѣ. Наконецъ, если точка F_1 будетъ лежать слѣва директрисы, то прямая не пересѣчетъ параболы.

Теорема VII.

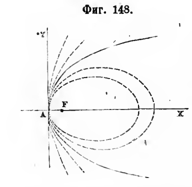
253. *Предѣлъ эллипса или гиперболы, параметръ которой имѣетъ конечную величину, а большая или поперечная ось неопредѣленно увеличивается, есть парабола.*

Въ параболѣ ордината фокуса равна параметру p; по аналогіи *параметромъ* эллипса или гиперболы называется ордината фокуса, которая равна $\frac{b^2}{a}$ и этотъ параметръ означаютъ черезъ p. Такимъ образомъ уравненіе эллипса, отнесеннаго къ его большей оси и къ касательной, проведенной къ вершинѣ (*фиг.* 148), будетъ

$$y^2 = \frac{2b^2}{a}x - \frac{b^2}{a^2}x^2, \quad \text{или} \quad y^2 = 2px - \frac{p}{a}x^2.$$

Положимъ теперь, что вершина A остается неподвижною, и параметръ p сохраняетъ конечную величину, и будемъ увеличивать неопредѣленно большую ось $2a$; тогда уравненіе эллипса приведется къ уравненію $y^2 = 2px$, которое выражаетъ параболу. Если будемъ разсматривать точки, соотвѣтствующія одной и той же величинѣ x, то увидимъ, что каждая точка параболы есть предѣльное положеніе, къ которому, при неопредѣленномъ возрастаніи a, приближается соотвѣтствующая точка эллипса; такимъ образомъ видимъ, что парабола есть предѣлъ эллипса.

Фиг. 148.



Точно также уравненіе гиперболы, отнесенной къ ея поперечной оси и къ касательной, проведенной къ вершинѣ A, будетъ

$$y^2 = 2px + \frac{p}{a}x^2;$$

если a будетъ неопредѣленно увеличиваться, а параметръ p сохраняетъ конечную величину, то это уравненіе приведется также къ уравненію

$$y^2 = 2px.$$

Такимъ образомъ парабола есть предѣлъ той вѣтви гиперболы, къ кото-

рой принадлежитъ вершина A; другая вѣтвь ноопредѣленно удаляется влѣво.

Въ предъидущемъ мы предполагали, что параметръ эллипса или гиперболы сохраняетъ конечную величину. Мы придемъ къ тому же заключенію, предполагая, что разстояніе AF вершины A отъ сосѣдняго фокуса F сохраняетъ конечную величину. Дѣйствительно, назвавъ черезъ α это разстояніе, получимъ для эллипса $c = a - \alpha$, и слѣдовательно,

$$p = \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - c^2}{a} = \frac{(a-c)(a+c)}{a} = \alpha\left(2 - \frac{\alpha}{a}\right);$$

такъ какъ параметръ p имѣетъ предѣломъ конечную величину 2α, то уравненіе эллипса приведется къ $y^2 = 4\alpha x$. То же самое получимъ для гиперболы.

254. *Замѣчаніе*. Это преобразованіе эллипса въ параболу имѣетъ большую важность. Основываясь на немъ, можно изъ свойства эллипса вывести свойства параболы, какъ частные случаи. Такъ, напримѣръ, въ эллипсѣ діаметръ, или геометрическое мѣсто срединъ параллельныхъ хордъ есть прямая, проходящая черезъ центръ; если положимъ, что центръ удаляется въ безконечность, то эллипсъ измѣнится въ параболу, а діаметры будутъ параллельны оси.

Эллипсъ есть геометрическое мѣсто точекъ, равно удаленныхъ отъ фокуса F и управляющаго круга, описаннаго изъ фокуса F′, какъ центра (§ 221). Если точка F′ будетъ удаляться въ безконечность, то управляющій кругъ обратится въ директрису параболы.

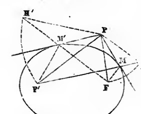
Касательная, проведенная къ эллипсу, образуетъ равные углы съ радіусами векторами, идущими отъ точки прикосновенія M къ двумъ фокусамъ (§ 222); если фокусъ F′ будетъ удаляться въ безконечность, то радіусъ векторъ MF′ будетъ параллеленъ оси.

Теорема VIII.

255. *Если проведемъ двѣ касательныя къ кривой втораго порядка, то прямая* FP, *соединяющая фокусъ* F *съ точкою пересѣченія* P *двухъ касательныхъ, раздѣлитъ пополамъ уголъ радіусовъ векторовъ* FM, FM′, *которые идутъ отъ этого фокуса къ точкамъ прикосновенія двухъ касательныхъ, или раздѣлитъ внѣшній уголъ, смотря по тому, будутъ ли касаться обѣ касательныя одной и той же вѣтви кривой, или двухъ вѣтвей.*

Разсмотримъ двѣ касательныя PM, PM′, проведенныя къ эллипсу (*фиг.* 149); продолжимъ радіусъ векторъ F′M на величину MH, равную MF, и точно также FM′ на величину M′H′, равную M′F′; такъ какъ касательныя перпендикулярны къ срединамъ FH и F′H′, то получимъ

Фиг. 149.



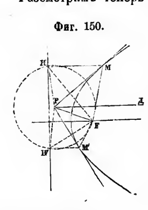
$$PH = PF \text{ и } PH' = PF',$$

треугольники F′PH, H′PF равны, потому что имѣютъ три равныя стороны $F'H = FH' = 2a$, $PH = PF$, $PF' = PH'$; отсюда заключаемъ, что углы PHM, PFM′ равны; но уголъ PHM равенъ PFM, слѣдовательно, углы PFM, PFM′ равны, и прямая FP дѣлитъ уголъ MFM′ пополамъ.

То же самое найдемъ для гиперболы, когда обѣ касательныя касаются одной и той же вѣтви; но если касательныя будутъ касаться двухъ различныхъ вѣтвей, то прямая FP раздѣлитъ пополамъ уголъ, образуемый однимъ изъ радіусовъ векторовъ FM съ продолженіемъ другаго.

Разсмотримъ теперь параболу (*фиг.* 150). Изъ точекъ прикосновенія опустимъ перпендикуляры MH, M′H′ на директрису; такъ какъ касательныя перпендикулярны къ срединамъ прямыхъ FH, FH′, то углы PFM, PFM′ соотвѣтственно равны угламъ PHM, PH′M′. Прямыя PH и PH′, равныя прямой PF, равны между собой, и треугольникъ HPH′ будетъ равнобедренный. Такъ какъ PHM, PH′M′ равны между собой, какъ дополнительные равнымъ угламъ равнобедреннаго треугольника, углы PFM, PFM′ равны. Это можно бы было видѣть прямо, разсматривая параболу, какъ предѣлъ эллипса.

Фиг. 150.



Теорема IX.

256. *Касательныя, проведенныя изъ внѣшней точки* P *къ эллипсу или гиперболѣ, образуютъ съ прямыми, соединяющими эти точки съ двумя фокусами, равные углы.*

Въ двухъ равныхъ треугольникахъ F'PH, H'PF (*фиг.* 149), углы F'PH, H'PF равны; отнявъ общую часть F'PF, получимъ FPH = F'PH', и взявъ половину, найдемъ FPM = F'PM'.

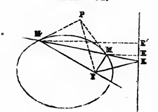
То же свойство имѣетъ парабола, которая есть предѣлъ эллипса; надобно радіусъ векторъ PF' замѣнить прямою PI, параллельною оси (*фиг.* 150). Впрочемъ, это свойство легко доказать прямо. Если изъ точки P, какъ центра, радіусомъ, равнымъ PF, опишемъ кругъ, то онъ пройдетъ черезъ точки H и H'; углы MPI, FHH' равны, потому что стороны ихъ соотвѣтственно перпендикулярны; но вписанный уголъ FHH' равенъ половинѣ угла при центрѣ FPH' и, слѣдовательно, равенъ углу FPM'; слѣдовательно углы MPI, M'PF равны.

Теорема X.

257. *Прямая* FK, *соединяющая фокусъ кривой втораго порядка съ точкою, въ которой какая-нибудь сѣкущая пересѣкаетъ директрису, дѣлитъ пополамъ внѣшній уголъ радіусовъ векторовъ, идущихъ отъ фокуса къ точкамъ, въ которыхъ сѣкущая пересѣкаетъ кривую, или дѣлитъ самый уголъ радіусовъ векторовъ, смотря по тому, находятся ли обѣ точки пересѣченія* M *и* M' *на одной вѣтви кривой, или на двухъ различныхъ.*

Опустивъ изъ точекъ M и M' перпендикуляры на директрису (*фиг.* 151), получимъ

Фиг. 151.



$$\frac{MF}{ME} = \frac{M'F}{M'E'},$$

и слѣдовательно,

$$\frac{MF}{M'F} = \frac{ME}{M'E'} = \frac{MK}{M'K}.$$

Если обѣ точки M и M' будутъ принадлежать одной вѣтви кривой, то такъ какъ точка K лежитъ на продолженіи хорды MM', прямая FK дѣлитъ внѣшній уголъ треугольника MFM' пополамъ. Если точки M и M' находятся на двухъ разныхъ вѣтвяхъ, то, такъ какъ точка K лежитъ между точками M и M', прямая FK дѣлитъ уголъ MFM' пополамъ.

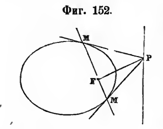
Примѣчаніе. Если проведемъ касательныя къ кривой въ точкахъ M и M' и если фокусъ F соединимъ съ точкою пересѣченія P двухъ ка-

сательныхъ, то прямыя FK, FP, которыя дѣлятъ пополамъ два дополнительные угла, будутъ перпендикулярны между собой.

Теорема XI.

258. *Если черезъ точку* P, *взятую на директрисъ, проведемъ касательныя къ кривой втораго порядка, то прямая прикосновеній* MM′ *пройдетъ черезъ соотвѣтствующій фокусъ* F *и будетъ перпендикулярна къ прямой* FP, *которая соединяетъ точку* P *съ фокусомъ* (фиг. 152).

Фиг. 152.



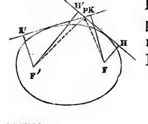
Представимъ, что касательная PM есть предѣлъ сѣкущей, двѣ точки пересѣченія которой слились въ одну. Въ слѣдствіе предъидущей теоремы, прямая FP перпендикулярна къ FM; она точно также перпендикулярна къ FM′; слѣдовательно, линія MFM′ есть прямая и перпендикулярная къ FP.

Теорема XII.

259. *Произведеніе разстояній двухъ фокусовъ отъ какой-нибудь касательной, проведенной къ эллипсу или гиперболѣ, есть величина постоянная.*

Пусть FH, F′H′ будутъ перпендикуляры, опущенные изъ фокусовъ на первую касательную (*фиг.* 153); FK, F′K′ перпендикуляры, опущенные на вторую касательную; P точка пересѣченія двухъ касательныхъ. По теоремѣ IX прямоугольные треугольники FPH, F′PK′ подобны; точно также подобны и треугольники FPK, F′PH′; поэтому мы получимъ

Фиг. 153.



$$\frac{FH}{F'K'}=\frac{FP}{F'P}=\frac{FK}{F'H'};$$

откуда

$$FH.\,F'H'=FK.\,F'K'.$$

Если кривая будетъ эллипсъ, то, проведя касательную параллельно большей оси, увидимъ, что постоянное произведеніе равно b^2. Если кри-

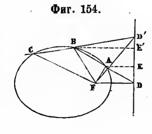
вая будетъ гипербола, то, разсматривая асимптоту, какъ предѣлъ касательной, увидимъ, что произведеніе также равно b^2.

Задача XIII.

260. *Построить кривую втораго порядка, зная фокусъ* F *и три точки* A, B, C.

Положимъ, что задача рѣшена и что три точки принадлежатъ одной вѣтви; точка D, въ которой сѣкущая AB пересѣкаетъ линію, раздѣляющую внѣшній уголъ треугольника AFB пополамъ, принадлежитъ директрисѣ (§ 257). Точно также сѣкущая BC дастъ другую точку D′ директрисы. Фокусъ F, директриса DD′ и точка A опредѣляютъ кривую втораго порядка и притомъ одну; это будетъ эллипсъ, парабола или гипербола, смотря по тому, будетъ ли разстояніе AF менѣе, равно или больше разстоянія AE точки A отъ директрисы. Очевидно, что эта кривая пройдетъ черезъ двѣ точки B и C; дѣйствительно, мы имѣемъ

Фиг. 154.



$$\frac{AF}{BF}=\frac{AD}{BD}=\frac{AE}{BE'},$$

откуда

$$\frac{AF}{AE}=\frac{BF}{BE'};$$

слѣдовательно, кривая проходитъ черезъ точку B. Точно также докажемъ, что она проходитъ черезъ точку C. Такимъ образомъ получаемъ первое рѣшеніе.

Можно положить, что три точки не находятся на одной вѣтви; если, напримѣръ, двѣ точки A и B лежатъ на одной вѣтви, а точка C на другой вѣтви гиперболы, то линіи, раздѣляющія углы AFC, BFC пополамъ, дадутъ двѣ точки директрисы. Три рѣшенія, полученныя такимъ образомъ, будутъ гиперболы. Слѣдовательно, всѣхъ рѣшеній мы имѣемъ четыре; изъ четырехъ кривыхъ втораго порядка, которыя имѣютъ данный фокусъ и проходятъ черезъ три данныя точки, три всегда будутъ гиперболы, четвертая будетъ эллипсъ, гипербола или парабола, смотря по расположенію точекъ.

261. Вычисленіе приводитъ къ тому же заключенію. Пусть α и β

будутъ координаты фокуса, x' и y' x'' и y'', x''' и y''' координаты трехъ данныхъ точекъ, δ, δ' δ'', разстоянія ихъ отъ фокуса; уравненіе кривой можно представить въ видѣ

$$(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2-(mx+ny+h)^2=0,$$

и тогда уравненіе директрисы будетъ $mx+ny+h=0$. Три постоянныя m, n, h опредѣлятся изъ уравненій первой степени:

$$\begin{aligned}\delta' &= \pm(mx'+ny'+h),\\ \delta'' &= \pm(mx''+ny''+h),\\ \delta''' &= \pm(mx'''+ny'''+h).\end{aligned}$$

Всякое сочетаніе знаковъ даетъ систему уравненій; мы имѣемъ восемь сочетаній; но замѣтимъ, что если въ трехъ уравненіяхъ перемѣнимъ знаки, то величины m, n, h перемѣнятъ знаки, и кривая останется та же; слѣдовательно, мы имѣемъ только четыре рѣшенія.

Разстояніе точки отъ прямой выражается формулою, имѣющею двойной знакъ; для всѣхъ точекъ, лежащихъ по одну сторону прямой, надобно брать одинъ и тотъ же знакъ; другой знакъ для точекъ, лежащихъ по другую сторону. Мы знаемъ, что эллипсъ весь расположенъ съ одной стороны относительно каждой его директрисы; парабола также расположена съ одной стороны ея директрисы, между тѣмъ какъ каждая директриса гиперболы проходитъ между двумя вѣтвями кривой. Такимъ образомъ взять одинъ и тотъ же знакъ значитъ предположить, что три точки принадлежатъ одной вѣтви; взять разные знаки значитъ предположить, что двѣ точки лежатъ на одной вѣтви, а третья на другой.

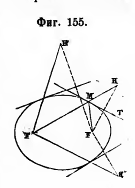
Задача XIV.

262. *Построить кривую втораго порядка, зная фокусъ и три касательныя.*

Положимъ, что задача рѣшена. Если изъ фокуса F опустимъ перпендикуляры на три касательныя и продолжимъ каждый изъ нихъ на величину, равную имъ самимъ, то получимъ три точки H, H′, H″, принадлежащія управляющему кругу (*фиг.* 155), центръ котораго будетъ второй фокусъ F′; радіусъ F′H этого круга равенъ оси $2a$, проходящей черезъ оба фокуса. Оба фокуса E и F′ и длина $2a$ опредѣляютъ кривую

втораго порядка и притомъ одну. Очевидно, что эта кривая касается трехъ данныхъ прямыхъ; дѣйствительно, пусть M будетъ точка, въ которой радіусъ F'H пересѣкаетъ прямую MT; такъ какъ сумма или разность радіусовъ векторовъ MF' и MF равна F'H или $2a$, то точка M принадлежитъ кривой; кромѣ того прямая MT, будучи перпендикулярна къ срединѣ FH, есть касательная къ кривой въ точкѣ M; такимъ образомъ задача допускаетъ только одно рѣшеніе.

Фиг. 155.

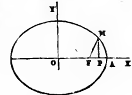


Если три точки H, H', H'' лежитъ на прямой линіи, то искомая кривая будетъ парабола, директриса которой есть эта прямая.

Уравненіе кривыхъ втораго порядка въ полярныхъ координатахъ.

263. Возьмемъ за полюсъ фокусъ F, а за полярную ось прямую, идущую отъ этого фокуса къ смежной вершинѣ A кривой.

Фиг. 156.



Разсмотримъ сперва эллипсъ; фокусъ F возьмемъ за полюсъ, а за полярную ось линію FA (*фиг.* 156). Мы нашли (§ 219) выраженіе разстоянія фокуса отъ какой-нибудь точки M кривой

$$\rho = a - \frac{c}{a}x,$$

отнесенной къ ея осямъ; если будемъ проектировать ломаную линію OFM на большую ось, то получимъ $x = c + \rho\cos\omega$; замѣнивъ x въ предъидущемъ уравненіи этою величиною и означивъ черезъ e эксцентрицитетъ $\frac{c}{a}$, получимъ

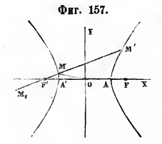
$$(1) \qquad \rho = \frac{p}{1 + e\cos\omega}.$$

Положимъ теперь, что кривая будетъ гипербола. Фокусъ F' возьмемъ за полюсъ, а линію F'A' (*фиг.* 157) за полярную ось. Мы видѣли (§ 233), что разстояніе фокуса F' отъ какой-нибудь точки кривой выражается формулою

$$\rho = \pm\left(\frac{cx}{a} + a\right),$$

въ которой знакъ — соотвѣтствуетъ лѣвой вѣтви, а знакъ $+$ правой вѣтви.

Фиг. 157.



Проектируемъ на поперечную ось OX ломаную линію $O'FM$; тогда получимъ $x = -c + \rho \cos \omega$.

Отсюда слѣдуетъ, что первая вѣтвь гиперболы выражается уравненіемъ

(1) $$\rho = \frac{p}{1 + e \cos \omega},$$

вторая уравненіемъ

(2) $$\rho = \frac{-p}{+e \cos \omega}.$$

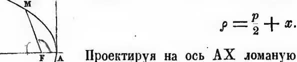
Но если условимся отрицательные радіусы векторы откладывать по направленію, обратному направленію, показанному угломъ ω, то увидимъ, что уравненіе (1) выражаетъ обѣ вѣтви гиперболы. Пусть M' будетъ какая-нибудь точка второй вѣтви; ω' соотвѣтствующій уголъ $A'F'M'$, ρ' радіусъ векторъ $F'M'$; по уравненію (2) получимъ $\rho' = \frac{-p}{1 + e \cos \omega}$. Въ уравненіи (1) дадимъ углу ω величину $\omega' + \pi$; тогда получимъ

$$\rho = \frac{p}{1 - e \cos \omega'} = -\rho';$$

такимъ образомъ для ρ получаемъ отрицательную величину $-\rho'$; но величина $\omega' + \pi$, данная ω, опредѣляетъ направленіе $F'M_1$, противоположное $F'M'$. Если ρ будетъ величина положительная, то ее надобно отложить по направленію $F'M_1'$; если ρ будетъ величина отрицательная $-\rho'$, то абсолютную величину ρ' надобно откладывать въ обратномъ направленіи, т. е. по направленію $F'M'$, что даетъ точку M'. Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (1) выражаетъ обѣ вѣтви гиперболы; первая вѣтвь выражается положительными величинами ρ, вторая — отрицательными.

Разсмотримъ, наконецъ, параболу; фокусъ F возьмемъ за полюсъ, а прямую FA по направленію къ вершинѣ (*фиг.* 158) за полярную ось. Тогда получимъ (§ 243)

Фиг. 158.



$$\rho = \frac{p}{2} + x.$$

Проектируя на ось AX ломаную линію AFM, получимъ какъ прежде

$$x = \frac{p}{2} + \rho \cos (\pi - \omega) = \frac{p}{2} - \rho \cos \omega;$$

откуда

(3) $$\rho = \frac{p}{1+\cos\omega}.$$

Изъ всего предъидущаго видно, что уравненіе (1) выражаетъ три кривыя втораго порядка; кривая будетъ эллипсъ, парабола или гипербола, смотря по тому, будетъ ли эксцентрицитетъ e менѣе, равенъ или болѣе единицы.

ПРИМѢРЫ.

1. M и M′ суть двѣ точки параболы, P точки пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ въ этихъ двухъ точкахъ, и F фокусъ; доказать, что $\frac{PM^2}{MF} = \frac{PM'^2}{M'F}$.

2. Въ кривой втораго порядка перпендикуляръ, опущенный изъ фокуса на кривую, и діаметръ, сопряженный хордѣ, пересѣкаются на директрисѣ.

3. Доказать, что полудіаметръ эллипса или гиперболы есть средній пропорціональный между прямыми, которыя соединяютъ фокусы съ концами діаметра, сопряженнаго первому.

4. Доказать, что въ равносторонней гиперболѣ разстояніе какой-нибудь точки кривой отъ центра есть среднее пропорціональное между разстояніями этой точки отъ фокусовъ.

5. Найти въ плоскости эллипса такой кругъ, чтобы длина касательной, проведенной къ кругу изъ каждой точки эллипса, была функція раціональная, цѣлая и первой степени относительно координатъ этой точки.

Доказать, что сумма или разность касательныхъ, проведенныхъ изъ каждой точки эллипса къ двумъ кругамъ, имѣющимъ предъидущее свойство, есть величина постоянная.

6. Найти геометрическое мѣсто вершины постояннаго угла, описаннаго около параболы.

7. Черезъ фокусъ параболы проводимъ хорду и на хордѣ, какъ на діаметрѣ, описываемъ кругъ, потомъ проводимъ къ кругу касательныя, параллельныя данной прямой; найти геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія.

8. Постоянный уголъ обращается около фокуса кривой втораго порядка; въ точкахъ, въ которыхъ стороны угла пересѣкаютъ кривую, проводимъ касательныя къ этой кривой; найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія этихъ касательныхъ.

9. Данъ эллипсъ; въ какой-нибудь точкѣ M проводимъ касательную, которую продолжимъ до точекъ пересѣченія P и Q съ касательными, проведенными къ концамъ большой оси; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія N прямыхъ F′P и FQ, и точки пересѣченія N′ прямыхъ FP и F′Q. Доказать, что обѣ точки N и N′ лежитъ на нормали къ точкѣ M.

10. Дана кривая втораго порядка; сѣкущая обращается около неподвижной точки P; соединяемъ фокусъ F съ точками M и M′, въ которыхъ онъ пересѣкаетъ кривую; доказать, что произведеніе $\operatorname{tg}\frac{PFM}{2}\operatorname{tg}\frac{PFM'}{2}$ есть величина постоянная.

11. Уголъ, подъ которымъ отъ фокуса кривой втораго порядка видимъ отрѣзокъ движущейся касательной, заключающейся между двумя неподвижными касательными, есть величина постоянная.

12. Около параболы описанъ треугольникъ, точка пересѣченія высотъ лежитъ на директрисѣ, а кругъ, описанный около треугольника, проходитъ черезъ фокусъ.

13. Если въ какой-нибудь точкѣ M эллипса проведемъ нормаль, то отрѣзокъ этой нормали, заключающійся между точкою M и малою осью, имѣетъ проекціею на радіусахъ векторахъ, проведенныхъ изъ точки M къ двумъ фокусамъ, длину, равную половинѣ большой оси.

14. Отрѣзокъ нормали, заключающейся между точкою M и большой осью, имѣетъ проекціею на радіусахъ векторахъ длину, равную параметру эллипса.

15. Двѣ кривыя втораго порядка имѣютъ общій фокусъ; если изъ этого фокуса проведемъ радіусы векторы къ концамъ какого-нибудь діаметра одной изъ этихъ кривыхъ, то сумма или разность отношеній этихъ радіусовъ къ радіусамъ второй кривой, которая имѣетъ то же направленіе, есть величина постоянная.

1. Продолжаемъ радіусы векторы, которые идутъ отъ какой-нибудь точки M эллипса къ двумъ фокусамъ F и F′, до точекъ нхъ пересѣченія P и Q съ кривой; доказать, что сумма $\frac{MF}{PF}+\frac{MF'}{F'Q}$ есть величина постоянная.

17. Картушка компаса, составленная изъ m радіусовъ, обращается около его центра, помѣщеннаго въ фокусѣ эллипса; доказать, что сумма длинъ, отсчитываемыхъ на каждомъ радіусѣ отъ фокуса до точки, гдѣ она пересѣкаетъ эллипсъ, есть величина постоянная.

18. Изъ какой-нибудь точки P, находящейся въ плоскости эллипса, проводимъ касательныя къ этому эллипсу; изъ точки P опускаемъ на хорду прикосновенія AB перпендикуляръ PC; прямая PC и AB пересѣкаютъ малую ось въ D и E; доказать, что кругъ, описаный на DE, какъ на діаметрѣ, пройдетъ черезъ два фокуса.

19. Даны два однофокусные эллипса; черезъ точку P проводимъ къ одному изъ нихъ касательныя, которыя пересѣкаютъ второй: первая въ A и B, вторая въ C и D′; доказать, что получимъ

$$\frac{1}{PA}\pm\frac{1}{PB}=\frac{1}{PC}\pm\frac{1}{PD}.$$

20. Описываемъ кругъ на большой оси эллипса, какъ на діаметрѣ; ордината какой-нибудь точки M эллипса пересѣкаетъ кругъ въ точкѣ N; если черезъ ω назовемъ уголъ, образуемый большею осью съ радіусомъ векторомъ FM, и черезъ u уголъ, образуемый большею осью съ радіусомъ ON круга, то получимъ

$$\varrho = a(1 - e\cos u),\quad \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}=\sqrt{\frac{1+e}{1-e}}\operatorname{tg}\frac{u}{2}.$$

Означивъ черезъ S площадь эллиптическаго сектора AFM, получимъ также

$$S=\frac{ab}{2}(u-e\sin u).$$

21. Равносторонняя гипербола, однофокусная съ эллипсомъ, пересѣкаетъ эллипсъ на сторонахъ прямаго угла, описаннаго около эллипса двумя равными хордами.

22. Треугольникъ вписанъ въ параболу; если черезъ R назовемъ радіусъ круга, вписаннаго въ треугольникъ, черезъ c, c', c'' хорды, проведенныя изъ фокуса парал-

лельно сторонамъ; черезъ θ, θ', θ'' углы, образуемые сторонами съ осью, то получимъ

$$R \sin \theta . \sin \theta' . \sin \theta'' = p, \quad 8pR^2 = cc'c''.$$

23. Пусть A будетъ вершина, F фокусъ параболы, (ϱ, ω) (ϱ', ω'') координаты двухъ точекъ M и M' кривой; θ уголъ MFM'; S площадь сектора AFM; A площадь сектора MFM'; l длина хорды MM'; доказать слѣдующія употребляемыя въ астрономіи формулы:

$$p = \frac{2\varrho\varrho' \sin^2 \frac{\theta}{2}}{\varrho + \varrho' - 2\sqrt{\varrho\varrho^2} \cos \frac{\theta}{2}}; \quad 2\sqrt{\varrho\varrho'} \cos \frac{\theta}{2} = \sqrt{(\varrho + \varrho')^2 - l^2},$$

$$S = \frac{1}{6}(p + \varrho)\sqrt{p(2\varrho - p)} = \frac{p^2}{12} \operatorname{tg} \frac{\omega}{2} \left(3 + \operatorname{tg}^2 \frac{\omega}{2}\right),$$

$$A = \frac{1}{2}\sqrt{\varrho\varrho'} \sin \frac{\theta}{2} \left(\varrho + \varrho' + \sqrt{\varrho\varrho'} \cos \frac{\theta}{2}\right),$$

$$= \frac{1}{6}\left(\varrho + \varrho' + \sqrt{\varrho\varrho'} \cos \frac{\theta}{2}\right) \sqrt{2p\left(\varrho + \varrho' - 2\sqrt{\varrho\varrho'} \cos \frac{\theta}{2}\right)}$$

$$= \frac{\sqrt{2p}}{6} \left[\left(\frac{\varrho + \varrho' + l}{2}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{\varrho + \varrho' - l}{2}\right)\right].$$

ГЛАВА VIII.

Коническія сѣченія.

Теорема I.

264. *Сѣченіе прямаго круговаго цилиндра какою-нибудь плоскостію, наклонною къ основанію, есть эллипсъ.*

Черезъ ось CC' цилиндра (*фиг.* 159) проведемъ плоскость, перпендикулярную къ сѣкущей плоскости; эту плоскость мы возьмемъ за плоскость фигуры. Эта плоскость пересѣкаетъ цилиндръ по двумъ противоположнымъ, образующимъ GG', HH', а сѣкущую плоскость на прямой AA'. Опишемъ въ плоскости фигуры два круга C и C', касательные къ прямой AA' и двумъ образующимъ GG', HH' цилиндра; для этого надобно раздѣлить углы A и A' пополамъ и продолжить эти линіи до пересѣченія ихъ въ C и C' съ осью цилиндра. Если изъ точки C,

Фиг. 159.

какъ центра, радіусомъ цилиндра опишемъ кругъ, то этотъ кругъ коснется образующихъ въ точкахъ G и H, а прямой въ точкѣ F; кругъ описанный изъ точки C′, какъ центра, будетъ касаться этихъ же образующихъ въ точкахъ G′ и H′, и прямой AA′ въ точкѣ F′. Представимъ теперь, что фигура обращается около оси CC′; тогда образующая GG′ опишетъ поверхность цилиндра, а два круга опишутъ два шара, вписанные въ цилиндръ и касающіеся его внутри: первый прикасается по окружности большаго круга GLH, второй по окружности большаго круга G′L′H′. Кромѣ того оба шара касаются данной плоскости; первой въ точкѣ F, второй въ точкѣ F′. Дѣйствительно, плоскость фигуры и данная плоскость перпендикулярны между собой; прямая CF, которая проведена въ первой плоскости перпендикулярно къ ихъ пересѣченію AA′, перпендикулярна ко второй плоскости; плоскость AMA′, будучи перпендикулярна къ концу радіуса CF, есть касательная къ шару C въ точкѣ F. Точно также увидимъ, что эта плоскость касается шара C′ въ точкѣ F′.

Пусть AMA′ будетъ кривая, по направленію которой сѣкущая плоскость пересѣкаетъ цилиндръ; мы докажемъ, что эта кривая есть эллипсъ, фокусы котораго суть точки F и F′. Соединимъ какую-нибудь точку M этой кривой съ двумя точками F и F′; черезъ точку M проходитъ образующая LL′ цилиндра; эта образующая касается верхняго шара въ точкѣ L, нижняго — въ точкѣ L′. Двѣ прямыя MF, ML, касательныя, проведенныя изъ одной и той же точки M къ шару, равны; точно также двѣ прямыя MF′, ML′ касательныя, проведенныя изъ точки M къ нижнему шару, равны. Такимъ образомъ сумма радіусовъ векторовъ MF + MF′, равна ML + ML′, т. е. отрѣзку LL′ образующей, заключающемуся между двумя кругами прикосновенія; этотъ отрѣзокъ есть величина постоянная, потому что при вращательномъ движеніи около CC′ образующая GG′ совпадаетъ съ LL′. Отсюда видно, что сумма разстояній каждой точки кривой отъ двухъ неподвижныхъ точекъ F и F′ есть величина постоянная и равна GG′; изъ этого заключаемъ, что кривая есть эллипсъ, фокусы котораго суть F и F′.

265. *Примѣчаніе*. Прямыя DE, D′E′, пересѣченія сѣкущей плоскости съ плоскостями круговъ GH, G′H′, по направленію которыхъ вписанные шары касаются цилиндра, суть директрисы эллипса. Дѣйствительно, проведемъ черезъ точку M плоскость, перпендикулярную къ оси цилиндра; эта плоскость пересѣчетъ цилиндръ по кругу NMN′. Прямая DE, пересѣченіе двухъ плоскостей, перпендикулярныхъ къ плоскости фигуры, пер-

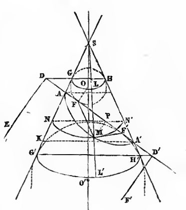
пендикулярна къ этой плоскости и, слѣдовательно, къ прямой AA′; то же самое скажемъ и о прямой MP, пересѣченіи плоскости круга съ сѣкущей плоскостью. Такъ какъ радіусъ векторъ MF равенъ ML или NG, а перпендикуляръ, опущенный на директрису DE изъ точки M, равенъ PD, то отношеніе разстояній точки M отъ фокуса и отъ директрисы равно $\frac{NG}{PD}$; но такъ какъ PN и GD параллельны, то это отношеніе равно отношенію AG къ AD, которое есть величина постоянная, потому что эти двѣ послѣднія величины постоянны. Фокусу F соотвѣтствуетъ директриса DE; фокусу F′ директриса D′E′.

Теорема II.

266. *Сѣченіе прямаго круговаго конуса плоскостью есть кривая втораго порядка.*

Черезъ ось конуса проведемъ плоскость, перпендикулярную къ сѣкущей плоскости; эта плоскость пересѣкаетъ конусъ по двумъ образующимъ SG, SH, а сѣкущая плоскость по прямой AA′.

Фиг. 160.



1. Разсмотримъ прежде случай, когда прямая AA′ пересѣкаетъ двѣ образующія SG, SH по одну сторону вершины S (*фиг.* 160). Опишемъ два круга O и O′ касающіеся прямой AA′ и двухъ реберъ SG′, SH′. Если фигуру повернемъ около оси SO′, то ребро SG′ опишетъ конусъ, а два круга опишутъ два шара, касающіеся конуса по направленію круговъ прикосновенія GH, G′H′. Сѣкущая плоскость будетъ касаться одного изъ шаровъ въ точкѣ F, потому что она перпендикулярна къ концу радіуса OF; она будетъ также касаться другаго шара въ точкѣ F′.

Пусть M будетъ какая-нибудь точка кривой пересѣченія; образующая SM, проходящая черезъ эту точку, касается шаровъ въ точкахъ L и L′; соединимъ точки M съ F и M съ F′. Прямыя MF и ML равны, какъ касательныя, проведенныя изъ одной и той же точки M къ шару O;

прямыя MF′ и ML′ равны, какъ касательныя, проведенныя изъ точки M къ шару O′; слѣдовательно, получимъ

$$MF + MF' = ML + ML' = LL'.$$

Но отрѣзокъ LL′ образующей, заключающійся между параллельными кругами GH, G′H′, есть величина постоянная и равенъ GG′; слѣдовательно, сумма разстояній каждой точки кривой отъ двухъ неподвижныхъ точекъ F и F′ есть величина постоянная, и, слѣдовательно, эта кривая есть эллипсъ, точки котораго F и F′ суть фокусы.

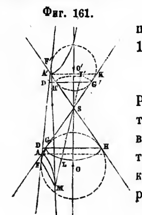
Постоянная сумма GG′ равна большей оси AA′. Если черезъ точку A проведемъ линію A′K параллельно GH, то на образующей опредѣлимъ отрѣзокъ AK, который будетъ равенъ фокусному разстоянію FF′, потому что если отъ равныхъ величинъ GG′ и AA′ отнимемъ съ одной стороны AG и KG′, съ другой стороны равныя величины AF и F′A′, то получимъ двѣ равныя величины AK, FF′.

Разсмотримъ прямыя DE, D′E′, по направленію которыхъ сѣкущая плоскость пересѣкается плоскостію круговъ прикосновенія GH, G′H′. Если изъ точки M опустимъ перпендикуляръ MP на большую ось, то разстояніе точки M отъ прямой DE будетъ равно PD. Пусть NMN′ будетъ параллельный кругъ, который проходитъ черезъ точку M; длина MF или ML равна GN. Такъ какъ DG и PN параллельны, то получимъ

$$\frac{GN}{DP} = \frac{AG}{AD} = \frac{AK}{AA'}.$$

Такимъ образомъ разстоянія каждой точки эллипса отъ фокуса F и отъ прямой DE относятся между собою, какъ разстояніе фокусовъ къ большой оси. Эта прямая DE есть одна *директриса* эллипса; прямая D′E′ есть вторая директриса.

Фиг. 161.



2. Если прямая AA′ пересѣкаетъ обѣ образующія SG и SH по обѣимъ сторонамъ вершины (*фиг.* 161), то получимъ

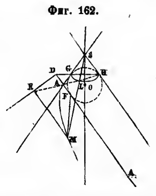
$$MF' - MF = ML' - ML = LL' = GG.$$

Разность разстояній каждой точки кривой отъ двухъ точекъ F и F′ есть величина постоянная; эта кривая есть гипербола, которая фокусами имѣетъ двѣ точки F и F′. Прямыя пересѣченія сѣкущей плоскости съ плоскостями прикосновенія суть также директрисы гиперболы.

3. Положимъ, наконецъ, что прямая AA′ парал-

льна ребру SH (*фиг.* 162); опишемъ шаръ, касающейся конуса по направленію круга GH и сѣкущей плоскости въ F. Пусть DE будетъ пересѣченіе сѣкущей плоскости съ плоскостью круга прикосновенія GH. Черезъ точку M сѣченія проведемъ прямую ME перпендикулярно къ DE и образующую SM, которая пересѣкаетъ кривую прикосновенія въ точкѣ L; прямая ME будетъ параллельна AA′ и SH; слѣдовательно, три прямыя ME, SM, SH находятся въ одной плоскости, а три точки H, L, E лежатъ на прямой пересѣченія плоскости прикосновенія съ предъидущей плоскостью. Треугольники MLE, HSL подобны, и такъ какъ SL равно SH, то ML = ME; но ML = MF, какъ касательныя, проведенныя изъ точки M къ шару; слѣдовательно, MF = ME. Такимъ образомъ, кривая есть парабола, точка F которой есть фокусъ, а DE — директриса.

Фиг. 162.



Этотъ прекрасный способъ находить свойства фокусовъ и директрисъ въ кривыхъ втораго порядка принадлежитъ *Данделену*.

267. *Помѣстить кривую втораго порядка на данномъ конусѣ.*

1. Кривая есть эллипсъ. Въ треугольникѣ AA′K (*фиг.* 160) извѣстны двѣ стороны AA′, AK, изъ которыхъ одна есть большая ось, а другая разстояніе фокусовъ; уголъ, противолежащій AA′, есть дополненіе половины угла при вершинѣ конуса. Такъ какъ большая ось больше фокуснаго разстоянія, то всегда можно построить этотъ треугольникъ; перпендикуляръ, возставленный изъ средины A′K, опредѣляетъ точку S, и, слѣдовательно, все, чѣмъ опредѣляется положеніе сѣкущей плоскости.

2. Кривая есть гипербола. Въ треугольникѣ AA′K (*фиг.* 161) извѣстны также двѣ стороны и уголъ, противоположный одной изъ нихъ; но такъ какъ сторона, противолежащая данному углу, есть самая меньшая, то построеніе треугольника не всегда возможно. Для этого надобно, чтобы $a > c \cos\gamma$ (гдѣ $2a$ есть поперечная ось, $2c$ разстояніе фокусовъ гиперболы, 2γ уголъ при вершинѣ конуса); откуда $\cos\gamma < \frac{a}{c}$, и слѣдовательно $\cos\gamma < \cos\theta$, называя черезъ θ уголъ асимптоты съ большою осью; слѣдовательно, уголъ асимптотъ долженъ быть менѣе угла конуса.

3. Данная кривая есть парабола. Соединивъ центръ O шара съ точкою G, составимъ прямоугольный треугольникъ OGA (*фиг.* 162), въ

которомъ извѣстна сторона AG, равная половинѣ параметра параболы, и OAG дополнительный γ. Построивъ этотъ треугольникъ, возставляемъ перпендикуляръ OS на OA и продолжаемъ до пересѣченія съ AG; зная разстояніе SA, задача будетъ рѣшена.

Итакъ на данномъ конусѣ можно помѣстить всѣ эллипсы, параболы и всѣ гиперболы, въ которыхъ уголъ асимптотъ менѣе угла конуса.

268. *Замѣчаніе*. Положимъ, что шары, которые мы употребляли прежде, всегда будутъ вписанными въ конусъ, но будутъ пересѣкать сѣкущую плоскость; для этого необходимо, чтобы образующіе круга касались двухъ линій SA, SA′ и пересѣкали AA′; пересѣченія шаровъ сѣкущею плоскостью суть круги, и мы видимъ, что въ эллипсѣ или въ гиперболѣ сумма или разность касательныхъ, проведенныхъ къ этимъ кругамъ изъ какой-нибудь точки кривой, есть величина постоянная; въ параболѣ, касательная, проведенная къ кругу изъ какой-нибудь точки кривой, равна разстоянію этой точки отъ опредѣленной прямой.

Греческіе геометры знали о кривыхъ втораго порядка, какъ о сѣченіяхъ конуса съ круговымъ основаніемъ плоскостью. Аполлонъ (умершій за 247 лѣтъ до Р. X.) написалъ восемь томовъ о коническихъ сѣченіяхъ, въ которыхъ онъ излагаетъ все, что было найдено до него. Сочиненіе Аполлона заключаетъ главныя свойства коническихъ сѣченій; мы изложили двѣ теоремы о сопряженныхъ діаметрахъ (§§ 162, 163 и 193), свойство асимптотъ гиперболы, элементарныя свойства фокусовъ.

ГЛАВА IX.

Опредѣленіе коническихъ сѣченій.

269. Общее уравненіе втораго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

содержитъ шесть коеффиціентовъ; но такъ какъ всѣ члены можно раздѣлить на одинъ изъ коеффиціентовъ, лишь бы только этотъ коеффиціентъ не былъ равенъ нулю, то увидимъ, что уравненіе будетъ содержать только пять произвольныхъ параметровъ, именно отношенія пяти коеффиціентовъ къ шестому. Чтобы опредѣлить кривую втораго порядка, надобно имѣть

величины пяти параметровъ или пять соотношеній между этими пятью параметрами; но въ этомъ случаѣ необходимо изслѣдовать, допускаютъ ли пять условныхъ уравненій систему дѣйствительныхъ рѣшеній и, кромѣ того, выражаетъ ли соотвѣтствующее уравненіе второй степени кривую; сколько пять условныхъ уравненій будутъ имѣть дѣйствительныхъ рѣшеній, имѣющихъ это свойство, — столько будетъ кривыхъ втораго порядка, удовлетворяющихъ даннымъ условіямъ.

Вообще соотношенія между параметрами происходятъ изъ геометрическихъ условій, которымъ должна удовлетворять кривая. Такимъ образомъ можно требовать, чтобы кривая проходила черезъ данныя точки, чтобы она была касательная къ даннымъ прямымъ, и т. д. Если кривая проходитъ черезъ данную точку, то это условіе выразимъ, написавъ, что координаты точки удовлетворяютъ уравненію кривой; откуда получимъ соотношеніе между коеффиціентами. Если кривая касается данной прямой, то это условіе выразимъ, написавъ, что уравненіе, опредѣляющее абсциссы точекъ пересѣченія кривой съ прямою, имѣетъ два равные корня; откуда получимъ также соотношеніе между коеффиціентами. Геометрическое условіе, которое выражается однимъ соотношеніемъ между коеффиціентами, разсматривается какъ простое условіе. Геометрическое условіе, которое выражается двумя соотношеніями, разсматривается какъ двойное; если, напримѣръ, требуется, чтобы кривая касалась данной прямой въ данной точкѣ, то уравненіе, опредѣляющее абсциссы точекъ пересѣченія, должно допускать данный двойной корень; отсюда найдемъ два соотношенія между коеффиціентами; слѣдовательно, изложенное геометрическое условіе должно считать за два простыя условія. Поэтому говорятъ, что для опредѣленія кривой втораго порядка надобно пять геометрическихъ условій.

Если желаемъ, чтобы кривая была парабола, то коеффиціенты должны удовлетворять уравненіе $B^2 - 4AC = 0$; такъ какъ уравненіе содержитъ только четыре произвольные параметра, то парабола опредѣлится четырьмя условіями.

Точно также, если желаемъ, чтобы кривая была равносторонняя гипербола, то надобно, чтобы двѣ прямыя, которыя выражаются уравненіемъ $Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 0$ и которыя параллельны асимптотамъ (§ 130), были перпендикулярны между собою; отсюда находимъ соотношеніе между коеффиціентами. Если оси координатъ будутъ прямоугольны, то это соотношеніе будетъ $A + C = 0$. Слѣдовательно, для опредѣленія равносторонней гиперболы достаточно четырехъ условій.

Прежде, нежели идти далѣе, обобщимъ опредѣленія, чтобы избѣжать ограничивающихъ условій при изложеніи теоремъ о мнимыхъ рѣшеніяхъ.

Мнимыя точки и прямыя.

270. Дѣйствительныя величины x и y опредѣляютъ точку плоскости; по аналогіи мы будемъ называть *мнимою точкою* мнимыя величины x и y. Если двѣ системы мнимыхъ величинъ будутъ всегда $x = a + bi$, $y = c + di$ и $x = a - bi$, $y = c - di$, то мы будемъ говорить, что двѣ мнимыя точки суть сопряженныя точки.

Уравненіе первой степени $Ax + By + C = 0$ съ дѣйствительными коеффиціентами удовлетворяется координатами безконечнаго числа дѣйствительныхъ точекъ, геометрическое мѣсто которыхъ есть прямая линія; но оно удовлетворяется такъ же безконечнымъ числомъ системъ мнимыхъ величинъ, даваемыхъ для x и y. Дѣйствительно, если x дадимъ какую-нибудь мнимую величину, то для y найдемъ соотвѣтствующую мнимую величину. Если для x дадимъ двѣ сопряженныя мнимыя величины, то двѣ соотвѣтствующія величины y будутъ также сопряженныя.

По аналогіи мы будемъ называть *мнимою линіею* совокупность рѣшеній уравненія первой степени съ мнимыми коеффиціентами. Замѣтимъ, что мнимая прямая проходитъ черезъ дѣйствительную точку. Дѣйствительно, пусть

$$(A' + A''i)\,x + (B' + B''i)\,y + (C' + C''i) = 0$$

или

$$(A'x + B'y + C') + i\,(A''x + B''y + C'') = 0.$$

будетъ мнимая прямая. Это уравненіе будетъ удовлетворяться координатами точки пересѣченія двухъ дѣйствительныхъ прямыхъ

$$A'x + B'y + C' = 0, \quad A''x + B''y + C'' = 0.$$

Такъ какъ общее уравненіе первой степени содержитъ три коеффиціента, а слѣдовательно, два произвольные параметра, двѣ точки дѣйствительныя или мнимыя, то оно опредѣляетъ прямую. Если черезъ x', y', x'', y'' назовемъ координаты двухъ данныхъ точекъ, то уравненіе прямой, проходящей черезъ эти двѣ точки, будетъ

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'}.$$

Прямая, проходящая черезъ двѣ мнимыя сопряженныя точки, есть дѣйствительная прямая. Въ самомъ дѣлѣ, пусть $x' = a + bi$, $y' = a + di$, $x'' = a - bi$, $y'' = c - di$; тогда уравненіе прямой будетъ

$$\frac{x - a}{b} = \frac{y - c}{d}.$$

Точка, координаты которой суть

$$x_1 = \frac{x' - x''}{2}, \quad y_1 = \frac{y' - y''}{2},$$

называется срединою прямой, соединяющей двѣ данныя точки; если обѣ точки будутъ сопряженныя мнимыя, то средина будетъ дѣйствительная точка.

Алгебраическое уравненіе $f(x, y) = 0$ съ дѣйствительными коеффиціентами удовлетворяется вообще координатами безконечнаго числа дѣйствительныхъ точекъ, образующихъ кривую; оно удовлетворяется также координатами безконечнаго числа мнимыхъ точекъ, сопряженныхъ попарно. Если коеффиціенты будутъ мнимые, то уравненіе всегда допускаетъ безконечное число мнимыхъ рѣшеній, но дѣйствительныхъ рѣшеній только ограниченное число.

Два уравненія, изъ которыхъ одно первой степени, а другое второй степени относительно x и y, допускаютъ двѣ системы рѣшеній. Поэтому говорятъ, что прямая пересѣкаетъ кривую втораго порядка въ двухъ дѣйствительныхъ или мнимыхъ точкахъ.

Дѣйствительная прямая пересѣкаетъ дѣйствительную кривую втораго порядка въ двухъ точкахъ, которыя будутъ дѣйствительныя или сопряженныя мнимыя. Это позволяетъ намъ объяснить случай, который представлялся уже нѣсколько разъ. Если, напримѣръ, ищемъ геометрическое мѣсто срединъ параллельныхъ хордъ въ эллипсѣ, то вычисленіемъ найдемъ неопредѣленную прямую; между тѣмъ какъ геометрическое мѣсто, по геометрическому опредѣленію, состоитъ только изъ части внутренняго діаметра эллипса; внѣшнія сѣкущія пересѣкаютъ эллипсъ въ двухъ сопряженныхъ мнимыхъ точкахъ, средина хорды будетъ также дѣйствительная точка, а діаметръ продолжается такимъ образомъ внѣ кривой.

Пересѣченіе двухъ кривыхъ втораго порядка.

271. Замѣтимъ прежде, что если двѣ кривыя сливаются, т. е. если оба уравненія удовлетворяются однѣми и тѣми же системами величинъ перемѣнныхъ x и y, то коэффиціенты будутъ пропорціональны. Дѣйствительно, такъ какъ уравненія, расположенныя относительно y

(1) $$Cy^2 + (Bx + E)\,y + (Ax^2 + Dx + F) = 0,$$

(2) $$C'y^2 + (B'x + E')\,y + (A'x^2 + D'x + F') = 0.$$

имѣютъ одни и тѣ же корни при одной и той же величинѣ x, то получимъ

$$\frac{C}{C'} = \frac{Bx + E}{B'x + E'} = \frac{Ax^2 + Dx + F}{A'x^2 + D'x + F'},$$

и такъ какъ это должно имѣть мѣсто при всякой величинѣ x, то заключаемъ, что

$$\frac{C}{C'} = \frac{B}{B'} = \frac{E}{E'} = \frac{A}{A'} = \frac{D}{D'} = \frac{F}{F'}.$$

Обратное заключеніе также справедливо; въ самомъ дѣлѣ, если коэффиціенты пропорціональны, то оба уравненія, очевидно, тожественны, и обѣ кривыя сливаются.

Во всемъ послѣдующемъ мы будемъ предполагать, что кривыя различны, т. е. что коэффиціенты не пропорціональны. Разсмотримъ прежде случай, когда коэффиціенты C и C' не равны нулю. Если умножимъ уравненія соотвѣтственно на C' и C, то, исключивъ y^2, получимъ уравненіе вида

(3) $$(B_1x + E_1)\,y + (A_1x^2 + D_1x + F_1) = 0,$$

которое съ уравненіемъ (1) составляетъ систему одинаковую съ системою двухъ данныхъ уравненій (1) и (2). Пять коэффиціентовъ B_1, E_1, A_1, D_1, F_1 не могутъ въ одно время равняться нулю, потому что если бы они были равны нулю, то коэффиціенты уравненій (1) и (2) были бы пропорціональны. Если два коэффиціента B_1 и A_1 будутъ равны нулю, то уравненіе (3) обратится въ $A_1x^2 + D_1x + F_1 = 0$; оно даетъ для x двѣ величины; каждой изъ нихъ по уравненію (1) будутъ соотвѣтствовать двѣ величины y; и слѣдовательно всѣхъ рѣшеній будетъ четыре. Положимъ, что два коэффиціента B_1 и E_1 не равны нулю, въ одно время; тогда вообще величина $x = -\frac{E_1}{B_1}$, которая обращаетъ въ нуль коэффиціентъ при y въ уравненіи (3), не будетъ обращать въ нуль многочленъ $A_1x^2 + D_1x + F_1$; такъ какъ величина $B_1x + E_1$ при всѣхъ рѣшеніяхъ

уравненія (3) не равна нулю, то въ этомъ случаѣ это уравненіе можно представить въ видѣ

$$y = -\frac{A_1x^2 + D_1x + F_1}{B_1x + E_1};$$

внеся эту величину y въ уравненіи (1), получимъ уравненіе четвертой степени

(4) $$a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4 = 0,$$

которое, въ соединеніи съ уравненіемъ (3), составляетъ систему, тожественную системѣ двухъ уравненій (1) и (3), и, слѣдовательно, данной системѣ. Пять коэффиціентовъ уравненія (4) не могутъ въ одно время равняться нулю, потому что, если бы они были равны нулю, то оба данныя уравненія были бы тожественны, потому что уравненіе (4) обращается въ тожество. Уравненіе (4) даетъ для x четыре величины; каждой изъ нихъ, по уравненію (3), соотвѣтствуетъ одна величина y; такимъ образомъ для данной системы получимъ *четыре* рѣшенія.

Если бы величина $x = -\frac{E_1}{B_1}$ обращала въ нуль многочленъ $A_1 x^2 + D_1 x + F_1$, то уравненіе (3) было бы вида

$$(B_1 x + E_1)(y + m x + n) = 0$$

и разложилось бы на два различныя уравненія $B_1 x + E_1 = 0$, $y + mx + n = 0$; первое даетъ величину $x = -\frac{E_1}{B_1}$, которой, по уравненію (1), соотвѣтствуютъ двѣ величины x; изъ втораго находимъ $y = -mx - n$; а замѣнивъ въ уравненіи (1) y этой величиною, получимъ уравненіе второй степени относительно x, которое даетъ два новыя рѣшенія; такимъ образомъ всѣхъ рѣшеній будетъ четыре. Но можетъ случиться, что это послѣднее уравненіе второй степени относительно x обратится въ тожество; въ этомъ случаѣ координаты всѣхъ точекъ прямой $y + mx + n = 0$ удовлетворяютъ двумъ даннымъ уравненіямъ, которыя тогда будутъ выражать пары прямыхъ, изъ которыхъ двѣ совпадаютъ.

Если бы одинъ изъ коэффиціентовъ C или C′ былъ равенъ нулю, то одно изъ данныхъ уравненій было бы вида (3), и тогда мы повторили бы все то, что было сказано.

Разсмотримъ теперь случай, когда оба коэффиціента C и C′ равны нулю. Если величина $x = -\frac{E'}{B'}$, которая обращаетъ въ нуль коэффиціентъ при

y въ уравненіи (2), не обращаетъ въ нуль многочлена $A'x^2 + D'x + F'$, то изъ этого уравненія получимъ

$$y = -\frac{A'x^2 + D'x + F'}{B'x + E'},$$

и, внеся въ уравненіе (1), получимъ уравненіе третьей степени относительно x, которое даетъ *три* рѣшенія. Если величина $x = -\frac{E'}{B'}$ обращаетъ въ нуль многочленъ $A'x^2 + D'x + F'$, то уравненіе (2) представится въ видѣ

$$(B'x + E')\,(y + mx + n) = 0,$$

и выразитъ двѣ прямыя $B'x + E' = 0$, $y = mx + n = 0$, пересѣкающія кривую (1), изъ которыхъ первая пересѣкаетъ въ одной точкѣ, вторая въ двухъ точкахъ. Можетъ случиться, что одна изъ этихъ прямыхъ будетъ принадлежать линіи (1); въ этомъ случаѣ данныя уравненія выразятъ пары прямыхъ, изъ которыхъ двѣ совпадаютъ. Изъ всего предъидущаго заключаемъ, что двѣ линіи втораго порядка не могутъ имѣть болѣе четырехъ общихъ точекъ, если только эти линіи не будутъ парами прямыхъ, изъ которыхъ двѣ совпадаютъ. Если коеффиціенты двухъ данныхъ уравненій будутъ дѣйствительные, то четыре общія точки будутъ дѣйствительныя или сопряженныя мнимыя.

272. Легко составить уравненіе (4), которое опредѣляетъ абсциссы четырехъ точекъ, общихъ двумъ кривымъ втораго порядка. Пусть $A_0y^2 + A_1y + A_2 = 0$, $A'_0y^2 + A'_1y + A'_2 = 0$ будутъ два данныя уравненія, въ которыхъ A_0 и A'_0 означаютъ постоянныя, A_1 и A'_1 многочлены первой степени, относительно x; A_2 и A'_2 многочлены второй степени. Умноживъ эти уравненія, соотвѣтственно на A'_0 и A_0, и вычтя ихъ, получимъ

$$(A_0A'_1 - A'_0A_1)\,y + (A_0A'_2 - A'_0A_2) = 0.$$

Умноживъ на A_2 и A'_2, вычтя и сокративъ множитель y, получимъ точно также

$$(A_0A'_2 - A'_0A_2)\,y + (A_1A'_2 - A'_1A_2) = 0.$$

Исключивъ изъ этихъ двухъ уравненій y, получимъ уравненіе четвертой степени

$$(A_0A'_1 - A'_0A_1)\,(A_1A'_2 - A'_1A_2) - (A_0A'_2 - A'_0A_2)^2 = 0.$$

273. *Примѣчаніе.* Уравненіе второй степени съ мнимыми коеффиціентами не можетъ имѣть болѣе четырехъ дѣйствительныхъ рѣшеній. Дѣйствительно, первая часть уравненія имѣетъ видъ $S + S_i$, гдѣ S и S_1 означаютъ дѣйствительные многочлены второй степени. Если уравненіе удовлетворяется дѣйствительными величинами x и y, то получимъ отдѣльно $S = 0$, $S_1 = 0$; дѣйствительныя точки геометрическаго мѣста будутъ точки, общія двумъ дѣйствительнымъ кривымъ $S = 0$, $S_1 = 0$.

Теорема I.

274. *Черезъ данныя пять точекъ можно провести кривую втораго порядка, и притомъ только одну.*

Пусть $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ будетъ общее уравненіе кривыхъ втораго порядка; если черезъ x' и y' означимъ координаты одной изъ точекъ, то получимъ пять соотношеній вида

$$Ax'^2 + Bx'y' + Cy'^2 + Dx' + Ey' + F = 0,$$

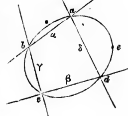
между отношеніями пяти коеффиціентовъ къ шестому. Уравненія, будучи первой степени, имѣютъ вообще одно рѣшеніе; однако же надобно изслѣдовать, не будетъ ли невозможныхъ случаевъ. Способъ, которому мы послѣдуемъ, позволитъ намъ избѣжать этого сложнаго изслѣдованія.

Положимъ прежде, что изъ пяти данныхъ точекъ a, b, c, d, e три не лежатъ на одной прямой (*фиг.* 163). Первыя четыре точки суть вершины четыреугольника $abcd$. Означимъ для краткости черезъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$ уравненія двухъ противоположныхъ сторонъ ab и cd; черезъ $\gamma = 0$, $\delta = 0$ уравненія двухъ другихъ противоположныхъ сторонъ bc и da. Разсмотримъ уравненіе

$$(5) \qquad \alpha\beta - k\gamma\delta = 0,$$

которое содержитъ произвольный параметръ k. Такъ какъ буквы α, β, γ, δ означаютъ многочлены первой степени относительно x и y, то уравненіе будетъ второй степени; координаты точки a, въ которой пересѣкаются прямыя ab и ad, обращаютъ въ нуль оба многочлена α и δ, а слѣдовательно удовлетворяютъ уравненію (5); то же самое найдемъ для трехъ другихъ точекъ b, c, d. Такимъ образомъ кривая, выражаемая уравненіемъ (5), проходитъ черезъ четыре точки a, b, c, d. Параметръ k можно опредѣлить такъ, чтобы кривая

Фиг. 163.



проходила черезъ пятую точку e. Означимъ черезъ α', β', γ', δ' величины многочленовъ α, β, γ, δ, когда въ нихъ x и y замѣнимъ координатами x' и y' точки e; тогда получимъ $\alpha'\beta' - k\gamma'\delta' = 0$; откуда $k = \frac{\alpha'\beta'}{\gamma'\delta'}$. Взявъ для k эту величину, получимъ кривую втораго порядка, проходящую черезъ данныя пять точекъ.

Мы нашли кривую второй степени, проходящую черезъ данныя пять точекъ. Другой кривой не будетъ; дѣйствительно, такъ какъ изъ пяти данныхъ точекъ три не лежатъ на прямой линіи, то линія втораго порядка, проходящая черезъ эти пять точекъ, не можетъ обратиться въ двѣ прямыя; но мы видѣли, что двѣ кривыя втораго порядка, которыя не состоятъ изъ прямыхъ линій, по большей мѣрѣ имѣютъ четыре общія точки.

Положимъ, что изъ пяти данныхъ точекъ три c, d, e лежатъ на прямой линіи; тогда прямая cde, имѣя три общія точки съ геометрическимъ мѣстомъ, будетъ принадлежать геометрическому мѣсту, которое будетъ состоять тогда изъ прямой cde, и второй прямой, проходящей черезъ двѣ другія точки a и b. Уравненіе геометрическаго мѣста будетъ $\alpha\beta = 0$, которое получимъ изъ предъидущаго уравненія, положивъ въ немъ $k = 0$.

Если изъ пяти данныхъ точекъ четыре будутъ лежать на одной прямой, то мы получимъ неопредѣленность. Въ этомъ случаѣ геометрическое мѣсто будетъ состоять изъ этой прямой и какой-нибудь прямой, проходящей черезъ пятую точку.

275. *Примѣчаніе I.* Уравненіе $\alpha\beta - k\gamma\delta = 0$, въ которомъ k означаетъ произвольный параметръ, выражаетъ всѣ кривыя втораго порядка, проходящія черезъ четыре точки a, b, c, d; потому что пятая точка опредѣлитъ кривую, и параметру k можно всегда дать такую величину, чтобы кривая проходила черезъ эту пятую точку.

Такъ какъ можно положить, что буквы α, β, γ, δ означаютъ разстоянія какой-нибудь точки, имѣющей координатами x и y, отъ сторонъ четыреугольника, то уравненіе $\frac{\alpha\beta}{\gamma\delta} = k$ выражаетъ, *что произведеніе разстояній какой-нибудь точки коническаго сѣченія отъ двухъ противоположныхъ сторонъ вписаннаго четыреугольника, находится въ постоянномъ отношеніи съ произведеніемъ разстояній этой же точки отъ двухъ другихъ сторонъ.*

Вообще, если черезъ $S = 0$ и $S_1 = 0$ означимъ уравненія двухъ кривыхъ втораго порядка, то уравненіе $S - kS_1 = 0$, въ которомъ k

есть произвольный параметръ, выразить всѣ кривыя втораго порядка, проходящія черезъ четыре точки, общія съ двумя первыми кривыми.

276. *Примѣчаніе II.* Опредѣлимъ теперь параболу, проходящую черезъ четыре данныя точки a, b, c, d. Если эти точки соединимъ попарно прямыми ab, cd, которыя пересѣкаются, и если эти прямыя возьмемъ за оси координатъ, то общее уравненіе кривыхъ втораго порядка, проходящихъ черезъ четыре точки, будетъ

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{c}-1\right)\left(\frac{x}{b}+\frac{y}{d}-1\right)-kxy=0,$$

въ которомъ a и b суть абсциссы точекъ a и b, c и d ординаты точекъ c и d. Чтобы геометрическое мѣсто было парабола, необходимо, чтобы параметръ k удовлетворялъ условію

$$\left(k-\frac{1}{ad}-\frac{1}{bc}\right)^2-\frac{4}{abcd}=0.$$

Если произведеніе $abcd$ будетъ отрицательное, то для k получимъ двѣ мнимыя величины, и это покажетъ, что черезъ четыре точки невозможно провести дѣйствительную параболу. Если произведеніе будетъ положительное, т. е. если можно составить выпуклый четыреугольникъ, имѣющій вершинами четыре точки, то для k получимъ двѣ дѣйствительныя различныя величины, и, слѣдовательно, двѣ дѣйствительныя линіи изъ рода параболы, проходящія черезъ четыре точки. Если можно будетъ соединить каждыя двѣ точки прямыми параллельными, то каждая пара прямыхъ параллельныхъ будетъ выражать рѣшеніе.

277. *Примѣчаніе III.* Легко составить общее уравненіе кривыхъ втораго порядка, проходящихъ черезъ три данныя точки a, b, c.

Если черезъ $\alpha=0$, $\beta=0$, $\gamma=0$ означимъ уравненія трехъ прямыхъ bc, ca, ab, то увидимъ, что уравненіе

$$a\beta\gamma+b\gamma\alpha+c\alpha\beta=0 \tag{6}$$

выражаетъ кривую втораго порядка, проходящую черезъ три данныя точки. Это уравненіе содержитъ два произвольные параметра, т. е. отношенія двухъ изъ коеффиціентовъ a, b, c къ третьему, и эти два параметра можно выбрать такъ, чтобы кривая проходила черезъ двѣ другія точки, взятыя произвольно на плоскости.

Теорема II.

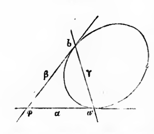
278. *Можно провести кривую втораго порядка, касающуюся двухъ данныхъ прямыхъ въ двухъ данныхъ точкахъ и проходящую черезъ другую данную точку.*

Пусть $\alpha = 0$, $\beta = 0$ будутъ уравненія двухъ касательныхъ pa, pb, $\gamma = 0$ уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ точки прикосновенія a и b (*фиг.* 164). Разсмотримъ уравненіе

(7) $$\alpha\beta - k\gamma^2 = 0,$$

въ которомъ k есть произвольный параметръ.

Фиг. 164.



Положивъ въ немъ $\alpha = 0$, получимъ $\gamma^2 = 0$; отсюда заключаемъ, что прямая pa пересѣкаетъ кривую въ двухъ точкахъ, которыя сливаются, и, слѣдовательно, эта прямая есть касательная въ точкѣ a. Точно также прямая pb есть касательная въ точкѣ b.

Потомъ опредѣлимъ параметръ k такъ, чтобы кривая проходила черезъ другую данную точку. Существуетъ только одна кривая втораго порядка, удовлетворяющая этимъ условіямъ; дѣйствительно, если двѣ кривыя втораго порядка имѣютъ однѣ и тѣ же касательныя въ двухъ точкахъ a и b, то уравненіе (4), которое опредѣляетъ абсциссы общихъ точекъ, будетъ имѣть два двойные корня; слѣдовательно, двѣ кривыя не могутъ имѣть другой общей точки.

279. *Примѣчаніе*. Уравненіе (7) есть общее уравненіе кривыхъ втораго порядка, касающихся двухъ данныхъ прямыхъ въ двухъ данныхъ точкахъ; оно выражаетъ, *что произведеніе разстояній какой-нибудь точки коническаго сѣченія отъ двухъ касательныхъ находится въ постоянномъ отношеніи къ квадрату разстоянія этой точки отъ хорды прикосновеній.*

Вообще, если черезъ $S = 0$ означимъ уравненіе кривой втораго порядка, то уравненіе $S - k\gamma^2 = 0$ выразитъ всѣ кривыя втораго порядка, касающіяся первой въ двухъ точкахъ, лежащихъ на прямой $\gamma = 0$.

280. Параметръ k можно опредѣлить изъ условія, чтобы кривая была парабола. Если обѣ касательныя возьмемъ за оси координатъ, то уравненіе (7) обратится въ

$$\left(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1\right)^2-2kxy=0.$$

Чтобы кривая была парабола, надобно, чтобы удовлетворялось условіе $\left(k-\frac{1}{ab}\right)^2-\frac{1}{a^2b^2}=0$; откуда находимъ два рѣшенія $k=0$, $k=\frac{2}{ab}$; первому соотвѣтствуетъ прямая ab, второму парабола, уравненіе которой можно представить въ видѣ

$$\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}-1=0.$$

Сложныя условія.

281. Разсмотримъ геометрическія условія, по которымъ можно опредѣлить кривую втораго порядка. До сихъ поръ мы говорили только о простыхъ условіяхъ, какъ, напримѣръ, о точкахъ, о касательныхъ. Центръ замѣняетъ два условія; дѣйствительно, если центръ возьмемъ за начало координатъ, то уравненіе второй степени, не заключая членовъ первой степени, будетъ содержать только три произвольные параметра; такимъ образомъ, кривая опредѣляется по ея центру и тремъ точкамъ.

Діаметръ вмѣстѣ съ направленіемъ хордъ замѣняетъ три условія; дѣйствительно, если діаметръ возьмемъ за ось x, а линію, параллельную хордамъ, за ось y, то уравненіе, не заключая членовъ первой степени относительно y, будетъ содержать только три произвольные параметра.

Система сопряженныхъ діаметровъ замѣняетъ три условія; дѣйствительно, если возьмемъ ихъ за оси координатъ, то уравненіе, которое должно быть вида $ax^2+by^2+c=0$, будетъ содержать только два произвольные параметра.

Вообще, пусть $\alpha=0$, $\beta=0$ будутъ уравненія двухъ сопряженныхъ діаметровъ; такъ какъ разстоянія α и β каждой точки отъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ, пропорціональны координатамъ этой точки относительно этихъ діаметровъ, то кривая выразится уравненіемъ

$$a\alpha^2+b\beta^2+c=0, \tag{8}$$

съ двумя произвольными параметрами. Уравненіе

$$\alpha^2+a\beta=0, \tag{9}$$

есть общее уравненіе параболъ, діаметръ которыхъ есть прямая $\alpha = 0$, а касательная, проведенная къ концу этого діаметра, есть прямая $\beta = 0$.

Извѣстно, что гипербола, отнесенная къ двумъ ея асимптотамъ, выражается уравненіемъ $xy = k$. Вообще, пусть $\alpha = 0$, $\beta = 0$ будутъ уравненія двухъ асимптотъ; тогда гипербола выразится уравненіемъ вида

$$\alpha\beta - k = 0, \tag{10}$$

которое содержитъ только одинъ произвольный параметръ k. Такимъ образомъ двѣ асимптоты замѣняютъ четыре условія, и кривая опредѣляется по двумъ асимптотамъ и одной точкѣ, или по касательной. Если будетъ дана только одна асимптота $\alpha = 0$, то уравненіе $\beta = 0$ второй асимптоты будетъ неопредѣленное, и уравненіе (10) будетъ содержать три произвольные параметра, такъ что одна асимптота замѣняетъ два условія.

Мы видѣли, что всякая кривая втораго порядка имѣетъ фокусъ и директрису; отсюда слѣдуетъ, что уравненіе

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 - (mx + ny + h)^2 = 0, \tag{11}$$

которое выражаетъ свойство фокуса и которое содержитъ пять произвольныхъ параметровъ a, b, m, n, h, выражаетъ всѣ кривыя втораго порядка. Фокусъ замѣняетъ два условія; дѣйствительно, если данъ фокусъ, т. е. если извѣстны его координаты a и b, то уравненіе (11) будетъ содержать только три произвольные параметра. Точно также директриса замѣняетъ два условія; дѣйствительно, если дано уравненіе директрисы, то опредѣлимъ отношенія двухъ изъ параметровъ m, n, h къ третьему.

Уравненіе перпендикуляра, опущеннаго изъ фокуса на директрису, есть $\frac{x-a}{m} = \frac{y-b}{n}$; это есть одна изъ осей кривой. Вершина, находящаяся на этой оси, замѣняетъ два условія; въ этомъ случаѣ выражаютъ, что обѣ координаты вершины удовлетворяютъ уравненію оси и уравненію кривой.

Результаты, которые мы получили, можно вывести другимъ способомъ.

Очевидно, что двѣ координаты какой-нибудь замѣчательной точки кривой втораго порядка, какъ напримѣръ центра, фокуса, вершины и т. д., можно выразить помощью коеффиціентовъ общаго уравненія второй степени; слѣдовательно, если будетъ дана подобная точка, то получимъ два соотношенія между коеффиціентами. Точно также два коеффиціента уравненія какой-нибудь замѣчательной прямой, какъ напримѣръ директрисы или оси и т. д., можно выразить посредствомъ коеффиціентовъ уравненія

второй степени; если эта прямая будетъ дана, то получимъ также два соотношенія между коэффиціентами.

282. Замѣтимъ, что предъидущіе виды, въ которыхъ мы представляли уравненіе второй степени, входятъ въ видѣ $\alpha\beta - k\gamma^2 = 0$, составленномъ изъ трехъ многочленовъ первой степени α, β, γ, изъ которыхъ первые два относятся къ касательнымъ, проведеннымъ изъ произвольной точки p плоскости, третій къ хордѣ прикосновенія. Когда точка p сливается съ центромъ гиперболы, тогда касательныя α и β будутъ асимптотами; такъ какъ при этомъ прямая прикосновеній удаляется въ безконечность, то многочленъ γ обратится въ постоянное, а уравненіе $\alpha\beta - k\gamma^2 = 0$ обратится въ $\alpha\beta - k = 0$.

Уравненіе (8), представленное въ видѣ

$$(\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{-b})(\alpha\sqrt{a} - \beta\sqrt{-b}) + c = 0,$$

приводится къ уравненію (10). Уравненіе (11), представленное въ видѣ

$$[(y-b) - i(x-a)]\,[(y-b) + i(x-a)] - (mx + ny + h)^2 = 0,$$

входитъ также въ уравненіе $\alpha\beta - k\gamma^2 = 0$; мнимыя касательныя, проведенныя изъ фокуса, угловыми коэффиціентами имѣютъ $\pm i$; директриса есть хорда прикосновеній. Оба мнимые фокуса эллипса или гиперболы имѣютъ это свойство, какъ оба дѣйствительные фокусы.

Нахожденіе сѣкущихъ общихъ двумъ кривымъ втораго порядка.

283. Мы видѣли, что двѣ кривыя втораго порядка $S = 0$, $S_1 = 0$, вообще имѣютъ четыре общія точки; черезъ эти четыре точки можно провести три пары прямыхъ. Если кривыя будутъ дѣйствительныя, то общія точки будутъ дѣйствительныя или мнимыя, сопряженныя попарно. Здѣсь надобно разсматривать три случая. 1-й, если четыре общія точки a, b, c, d будутъ дѣйствительныя, то три пары общихъ сѣкущихъ, очевидно, будутъ дѣйствительныя; 2-й, если двѣ точки a и b будутъ дѣйствительныя, а точки c и d будутъ мнимыя сопряженныя, то прямая ab будетъ дѣйствительна, точно также и прямая cd, которая проходитъ черезъ двѣ мнимыя сопряженныя; такимъ образомъ получимъ пару общихъ дѣйствительныхъ сѣкущихъ ab и cd. Другія четыре общія сѣкущія будутъ мнимыя; въ самомъ дѣлѣ, если напримѣръ сѣкущая ac была бы дѣйстви-

тельная, то точка пересѣченія c дѣйствительныхъ прямыхъ ac и cd была бы дѣйствительная; и 3-й, если двѣ точки a и b будутъ мнимыя сопряженныя, точно также точки cd, то прямыя ab и cd будутъ дѣйствительныя, а другія четыре будутъ мнимыя. Отсюда заключаемъ, *что двѣ дѣйствительныя кривыя втораго порядка имѣютъ по крайней мѣрѣ двѣ дѣйствительныя общія сѣкущія*.

Два послѣдніе случая можно различать слѣдующимъ образомъ; такъ какъ въ третьемъ случаѣ прямыя ac и bd суть мнимыя сопряженныя, то онѣ пересѣкаются въ одной дѣйствительной точкѣ, такъ же, какъ прямыя ad и bc; слѣдовательно, центры трехъ паръ общихъ сѣкущихъ будутъ дѣйствительны. Во второмъ случаѣ точка пересѣченія прямыхъ ac и bd есть мнимая точка; въ самомъ дѣлѣ, если эта точка была бы дѣйствительная, то каждая изъ прямыхъ ac и bd, проходящихъ черезъ двѣ дѣйствительныя точки (черезъ точку a или b и черезъ эту точку пересѣченія), была бы дѣйствительная; слѣдовательно, изъ трехъ центровъ одинъ есть дѣйствительный.

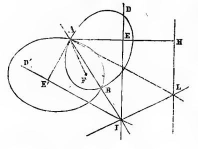
284. Приложимъ все предъидущее къ двумъ эллипсамъ, имѣющимъ общій фокусъ. Эти два эллипса могутъ пересѣкаться только въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ; потому что, какъ было сказано въ § 260, два эллипса, которые имѣютъ одинъ общій фокусъ и три общія точки, совпадаютъ; слѣдовательно, они имѣютъ только двѣ дѣйствительныя общія сѣкущія.

Пусть

$$(x-a)^2+(y-b)^2-k^2\gamma^2=0,$$
$$(x-a)^2+(y-b)^2-k'^2\gamma'^2=0;$$

будутъ уравненія двухъ эллипсовъ; двѣ дѣйствительныя общія сѣкущія $k\gamma=\pm k\gamma'$ проходятъ черезъ точку пересѣченія I директрисъ DI, D'I (*фиг.* 165), и эти сѣкущія легко найти геометрически. Положимъ, что два эллипса пересѣкаются въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ A и B, одна изъ дѣйствительныхъ общихъ сѣкущихъ есть прямая AB, проходящая черезъ эти двѣ точки; другая IL не пересѣкаетъ кривыхъ. Чтобы опредѣлить эту вторую прямую, соединимъ точку A съ фокусомъ и изъ этой точки опустимъ перпендикуляры AE, AE' на директрисы; тогда по-

Фиг. 165.



лучимъ $k=\frac{AF}{AE}$, $k'=\frac{AF}{AE'}$ и, слѣдовательно, $\frac{k'}{k}=\frac{AE'}{AE}$. Продолжимъ перпендикуляръ AE и отложимъ на продолженіи линію $EH=AE$; черезъ точку H проведемъ линію HL параллельно первой директрисѣ, и черезъ точку A линію AL параллельно второй директрисѣ; точка пересѣченія L этихъ двухъ параллельныхъ будетъ принадлежать второй дѣйствительной общей сѣкущей IL.

285. Нахожденіе точекъ пересѣченія двухъ кривыхъ втораго порядка зависитъ вообще отъ рѣшенія уравненія четвертой степени; но вопросъ можно привести къ рѣшенію уравненія третьей степени.

Такъ какъ уравненіе $S-kS_1=0$, въ которомъ k есть произвольный параметръ, выражаетъ всѣ линіи втораго порядка, проходящія черезъ точки, общія двумъ первымъ кривымъ, то параметръ k можно опредѣлить такъ, чтобы это уравненіе выражало двѣ прямыя; такъ какъ двѣ кривыя имѣютъ три пары общихъ сѣкущихъ, то величина k опредѣлится изъ уравненія третьей степени.

Пусть

$$Ax^2+Bxy+Cy^2+Dx+Ey+F=0,$$
$$A'x^2+B'xy+C'y^2+D'x+E'y+F'=0$$

будутъ уравненія двухъ данныхъ кривыхъ. Тогда новое уравненіе будетъ

$$(A-k\,A')\,x^2+(B-kB')\,xy+\ldots.=0;$$

для краткости представимъ его черезъ

$$ax^2+bxy+cy^2+dx+cy+f=0.$$

Рѣшивъ это уравненіе относительно y, получимъ

$$y=-\frac{bx+e}{2c}\pm\frac{1}{2c}\sqrt{(b^2-4ac)\,x^2+2\,(be-2cd)\,x+(e^2-4cf)}.$$

Чтобы это уравненіе выражало двѣ дѣйствительныя или мнимыя прямыя, необходимо, чтобы многочленъ, находящійся подъ знакомъ радикала, былъ точный квадратъ, а для этого необходимо, чтобы удовлетворялось условіе

$$(be-2cd)^2-(b^2-4ac)\,(e^2-4cf)=0.$$

Сокративъ это уравненіе на $4c$, получимъ

$$ae^2+cd^2-bde+(b^2-4ac)f=0;$$

если буквы a, b. . . замѣнимъ ихъ величинами $A - kA'$, $B - kB'$. . . то получимъ уравненіе третьей степени относительно k. Чтобы опредѣлить пару общихъ сѣкущихъ, надобно одинъ изъ корней этого уравненія вычислить съ извѣстнымъ приближеніемъ; потомъ, найдя точки пересѣченія каждой изъ этихъ прямыхъ и одной изъ данныхъ кривыхъ съ помощію уравненія второй степени, опредѣлимъ координаты четырехъ точекъ пересѣченія. Можно также вычесть два корня уравненія относительно k, чтобы опредѣлить двѣ пары прямыхъ, точки пересѣченія которыхъ мы ищемъ.

286. Дѣйствительный корень даетъ двѣ дѣйствительныя прямыя, если онъ величину $b^2 - 4ac$ обращаетъ въ количество положительное, и двѣ мнимыя сопряженныя прямыя, если онъ это количество обращаетъ въ отрицательное. Мнимый корень даетъ всегда двѣ прямыя мнимыя; дѣйствительно, если уравненіе $S - kS_1 = 0$, въ которомъ k есть мнимое, а многочлены S и S_1 дѣйствительные, выражало бы двѣ дѣйствительныя прямыя, то координаты каждой точки этихъ прямыхъ удовлетворяли бы отдѣльно двумъ уравненіямъ $S = 0$, $S_1 = 0$, которыя выразили бы такимъ образомъ одну и ту же систему прямыхъ, а уравненіе третьей степени относительно k обратилось бы въ тожество. Здѣсь надо разсматривать нѣсколько случаевъ. 1-й. Если три корня уравненія третьей степени относительно k будутъ дѣйствительные, и если два корня дѣлаютъ количество $B^2 - 4ac$ положительнымъ, то эти два корня опредѣлятъ двѣ пары дѣйствительныхъ прямыхъ, откуда найдемъ четыре дѣйствительныя рѣшенія; такъ какъ двѣ кривыя пересѣкаются въ четырехъ дѣйствительныхъ точкахъ и имѣютъ три пары дѣйствительныхъ сѣкущихъ, то третій корень также сдѣлаетъ положительнымъ количество $b^2 - 4ac$. 2-й. Если три корня уравненія третьей степени будутъ дѣйствительные, и если только одинъ корень дѣлаетъ положительнымъ количество $b^2 - 4ac$, то обѣ кривыя будутъ имѣть только одну пару дѣйствительныхъ сѣкущихъ. Двѣ сѣкущія, опредѣляемыя величиною k, выразятся уравненіями

$$y = -\frac{bx + e}{2C} \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2C}\left(x + \frac{be - 2cd}{b^2 - 4ac}\right).$$

Координаты точки пересѣченія ихъ будутъ

$$x = -\frac{be - 2cd}{b^2 - 4ac},\ y = -\frac{bx + e}{2c};$$

такъ какъ три величины k дѣйствительныя, то три центра также дѣй-

ствительные; отсюда заключаемъ, что двѣ кривыя пересѣкаются въ четырехъ мнимыхъ точкахъ. 3-й. Если уравненіе третьей степени имѣетъ только одинъ дѣйствительный корень, то этотъ корень необходимо сдѣлаетъ положительнымъ количество $b^2 - 4ac$ и опредѣлитъ двѣ дѣйствительныя прямыя; два сопряженные мнимые корня дадутъ двѣ пары мнимыхъ прямыхъ, изъ которыхъ двѣ прямыя одной изъ системъ будутъ соотвѣтственно сопряженными прямымъ другой системы; изъ четырехъ точекъ, въ которыхъ прямыя одной изъ системъ пересѣкутъ прямыя другой, двѣ будутъ дѣйствительныя; отсюда заключаемъ, что двѣ кривыя пересѣкаются въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ и въ двухъ сопряженныхъ мнимыхъ.

287. Если двѣ гиперболы имѣютъ одну асимптоту параллельную, то одна изъ точекъ пересѣченія удаляется въ безконечность, и уравненіе, происходящее отъ исключенія одной изъ координатъ изъ двухъ уравненій, будетъ третьей степени.

Возьмемъ, напримѣръ, двѣ гиперболы

$$xy - y^2 - x = 0,\ y^2 - x^2 - 1 = 0,$$

одна асимптота которыхъ параллельна прямой $y = x$; если во второе внесемъ величину x, найденную изъ перваго уравненія, то получимъ уравненіе третьей степени $y^3 - y + \frac{1}{2} = 0$, которое имѣетъ одинъ дѣйствительный корень и два мнимые. Двѣ гиперболы пересѣкаются только въ одной дѣйствительной точкѣ; поэтому онѣ имѣютъ двѣ дѣйствительныя общія сѣкущія, изъ которыхъ одна, проходящая черезъ эту точку и точку, находящуюся въ безконечности, параллельна прямой $y = x$, другая проходитъ черезъ двѣ мнимыя сопряженныя точки.

288. Положимъ, что въ двухъ уравненіяхъ коеффиціенты при членахъ второй степени пропорціональны, и поэтому можно предположить, что они равны. Если эти оба уравненія

$$\begin{gathered} Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0, \\ Ax^2 + Bxy + Cy^2 + D'x + E'y + F' = 0 \end{gathered}$$

вычтемъ почленно, то получимъ уравненіе первой степени

$$(D - D')\,x + (E - E')\,y + F - F' = 0,$$

и, исключивъ y, получимъ уравненіе второй степени относительно x. Двѣ кривыя пересѣкаются только **въ двухъ дѣйствительныхъ или** сопря-

женныхъ мнимыхъ точкахъ; двѣ другія точки находятся въ безконечности. Одна изъ дѣйствительныхъ общихъ сѣкущихъ проходитъ черезъ обѣ точки пересѣченія; другая удаляется въ безконечность. Это обстоятельство встрѣчается тогда, когда кривыя будутъ гиперболы, асимптоты которыхъ соотвѣтственно параллельны, и вообще, какъ мы увидимъ ниже, когда обѣ кривыя будутъ подобны и будутъ расположены подобно.

289. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ нахожденіе точекъ пересѣченія двухъ кривыхъ втораго порядка приводится къ уравненію второй степени или къ биквадратному уравненію.

1-й. Когда одинъ и тотъ же діаметръ дѣлитъ пополамъ въ двухъ кривыхъ параллельныя хорды. Въ этомъ случаѣ, если посредствомъ преобразованія координатъ отнесемъ кривыя къ этому общему діаметру, принимаемому за ось x-овъ, и къ линіи, параллельной хордамъ, принимаемой за ось y-овъ, оба уравненія будутъ содержать неизвѣстное y только во второй степени; исключивъ y^2, получимъ уравненіе второй степени относительно x.

2-й. Если эти двѣ кривыя будутъ гиперболы, имѣющія общую асимптоту, то, отнеся ихъ къ этой асимптотѣ принимаемой за ось x-овъ, и къ какой-нибудь прямой, принимаемой за ось y-овъ, получимъ два уравненія, въ которыхъ членъ xy будетъ содержать только одну букву x; исключивъ этотъ членъ, получимъ уравненіе второй степени относительно y.

3-й. Когда обѣ кривыя имѣютъ одинъ и тотъ же центръ, то, если отнести ихъ къ этому общему центру, принимаемому за начало координатъ, оба уравненія не будутъ содержать членовъ первой степени; исключивъ y, получимъ биквадратное уравненіе относительно x.

290. Кругъ пересѣкаетъ кривую втораго порядка въ четырехъ дѣйствительныхъ или мнимыхъ точкахъ. Пусть

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=0,$$

будетъ уравненіе круга; $\alpha=0$ и $\beta=0$ — уравненія пары общихъ дѣйствительныхъ сѣкущихъ; уравненіе кривой втораго порядка можно всегда представить въ видѣ

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=k\alpha\beta.$$

Первая часть выражаетъ квадратъ длины касательной, проведенной изъ какой-нибудь точки кривой къ кругу; отсюда проистекаетъ слѣдующая теорема: *кругъ помѣщенъ какъ-нибудь въ плоскости, кривой втораго*

порядка; касательная, проведенная изъ всякой точки кривой къ кругу, находится въ постоянномъ отношеніи къ средней пропорціональной линіи между разстояніями этой точки отъ двухъ дѣйствительныхъ общихъ сѣкущихъ.

Положимъ, что кругъ касается къ кривой въ двухъ дѣйствительныхъ или сопряженныхъ мнимыхъ точкахъ; тогда прямая прикосновеній будетъ дѣйствительная, и уравненіе кривой получитъ видъ

$$(x-a)^2+(y-b)^2-r^2=k\alpha^2.$$

Такимъ образомъ, *когда кругъ касается въ двухъ точкахъ кривой втораго порядка, касательная, проведенная изъ какой-нибудь точки кривой къ кругу, находится въ постоянномъ отношеніи съ разстояніемъ этой точки отъ хорды прикосновеній.*

Фокусъ кривой втораго порядка можно разсматривать какъ кругъ, радіусъ котораго равенъ нулю, и который съ кривой имѣетъ двойное мнимое прикосновеніе; директриса есть хорда прикосновеній.

291. Съ помощію предъидущей теоріи очень легко опредѣлить число нормалей, которыя можно провести изъ данной точки къ кривой втораго порядка. Возьмемъ, напримѣръ, эллипсъ, выражаемый уравненіемъ

$$(1) \qquad b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2,$$

пусть P будетъ точка, координаты которой суть x_1 и y_1 (*фиг.* 166). Означимъ черезъ x и y координаты подошвы M одной изъ нормалей; эти неизвѣстныя должны удовлетворять уравненію (1), а также уравненію

$$(2) \qquad y_1-y=\frac{a^2y}{b^2x}(x_1-x), \text{ или } c^2xy+b^2y_1x-a^2x_1y=0,$$

которое выражаетъ, что нормаль, проведенная въ точкѣ M, проходитъ черезъ точку P. Отсюда слѣдуетъ, что точка M опредѣляется пересѣченіемъ эллипса (1) и равносторонней гиперболы, опредѣляемой уравненіемъ (2); такъ какъ одна изъ вѣтвей гиперболы проходитъ черезъ центръ эллипса, то обѣ кривыя по крайней мѣрѣ имѣютъ двѣ дѣйствительныя общія точки. Уравненіе третьей степени, отъ котораго зависитъ нахожденіе общихъ сѣкущихъ двумъ кривымъ, есть

Фиг. 166.

$$(3) \qquad 4a^2b^2k^3+(a^2x_1^2+b^2y_1^2-c^4)\,k+c^2x_1y_1=0.$$

Если уравненіе (3) будетъ имѣть только одинъ дѣйствительный корень, то, какъ мы видѣли (§ 286), кривыя (1) и (2) будутъ имѣть только двѣ дѣйствительныя общія точки; если уравненіе (3) будетъ имѣть три дѣйствительные корня,

то кривыя (1) и (2), имѣя по крайней мѣрѣ двѣ дѣйствительныя общія точки, пересѣкутся въ четырехъ точкахъ. Въ первомъ случаѣ необходимо, чтобы

(4) $$(a^2x_1^2 + b^2y_1^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4x_1^2y_1^2 > 0,$$

а во второмъ случаѣ, чтобы

(5) $$(a^2x_1^2 + by_1^2 - c^4)^3 + 27\,a^2b^2c^4x_1^2y_1^2 < 0.$$

Если координаты x_1, y_1 будутъ удовлетворять уравненію

(6) $$(a^2x_1^2 + b^2y_1^2 - c^4)^3 + 27a^2b^2c^4x_1^2y_1^2 = 0,$$

то корни уравненія (3) будутъ также дѣйствительные, но одинъ корень будетъ двойной; такимъ образомъ изъ точки P можно провести только три различныя нормали. Точки P, которыя удовлетворяютъ этому условію, образуютъ кривую CDC'D', которую представляютъ четыре точки возврата C, C', D, D'. Уравненіе (6) принимаетъ болѣе простой видъ

$$a^{\frac{2}{3}}x_1^{\frac{2}{3}} + b^{\frac{2}{3}}y_1^{\frac{2}{3}} = c^{\frac{4}{3}};$$

ясно, что для всякой внутренней точки этой кривой уравненіе (5) удовлетворяется, т. е. черезъ эту точку можно провести четыре дѣйствительныя нормали; между тѣмъ какъ для всякой внѣшней точки къ той же кривой можно провести только двѣ дѣйствительныя нормали.

ПРИМѢРЫ.

1. По данной директрисѣ и по тремъ даннымъ точкамъ, построить кривую втораго порядка.

2. По данному фокусу и по двумъ даннымъ точкамъ, или по данной точкѣ и касательной, построить параболу.

3. По данной директрисѣ и по двумъ даннымъ точкамъ, построить параболу.

4. По тремъ даннымъ точкамъ и направленіямъ асимптотъ, построить гиперболу.

5. По данной асимптотѣ, вершинѣ и одной точкѣ построить гиперболу.

6. Найти геометрическое мѣсто вершины параболы, имѣющей данный фокусъ и касательную къ данной прямой.

7. Найти геометрическое мѣсто фокуса параболы, вершина которой находится въ данной точкѣ и которая касается данной прямой.

8. Найти геометрическое мѣсто фокусовъ кривыхъ втораго порядка, вписанныхъ въ данный параллелограмъ.

9. Кривая обращается около одного изъ фокусовъ втораго порядка; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія нормалей, проведенныхъ въ кривой черезъ оба ея конца.

10. Двѣ кривыя втораго порядка имѣютъ общій фокусъ; уголъ постоянной величины вращается около его вершины, находящейся въ общемъ фокусѣ; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ соотвѣтственно къ двумъ кривымъ въ точкахъ, въ которыхъ онѣ пересѣкаются сторонами угла.

11. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія прямыхъ, проведенныхъ параллельно двумъ даннымъ направленіямъ черезъ концы хорды данной длины, вписанной въ данную окружность.

12. Найти геометрическое мѣсто центра равносторонней гиперболы, описанной около даннаго треугольника.

13. Найти геометрическое мѣсто фокусовъ или вершинъ гиперболы, которая имѣетъ данную асимптоту и данную директрису.

14. Найти геометрическое мѣсто центровъ кривыхъ втораго порядка, проходящихъ черезъ четыре точки пересѣченія двухъ данныхъ коническихъ сѣченій. Доказать, что это геометрическое мѣсто не измѣняется, когда измѣняется каждое изъ коническихъ сѣченій, оставаясь подобнымъ и концентричнымъ самому себѣ.

15. Перемѣнный кругъ пересѣкаетъ данный эллипсъ въ двухъ данныхъ точкахъ A и B; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія касательныхъ, общихъ двумъ кривымъ.

Доказать, что геометрическое мѣсто будетъ то же самое, когда общая сѣкущая AB перемѣстится параллельно самой себѣ.

Даны два однофокусныя коническія сѣченія: доказать, что если черезъ двѣ точки одной проведемъ касательныя къ другой, то эти четыре прямыя будутъ касательныя къ одному и тому же кругу.

16. Найти геометрическое мѣсто центра гиперболы, которая имѣетъ данный фокусъ и которая пересѣкаетъ въ данной точкѣ данную прямую, параллельную одной изъ асимптотъ.

17. Найти геометрическое мѣсто фокуса параболы, которая касается двухъ данныхъ прямыхъ, одной въ постоянной точкѣ, другой въ перемѣнной точкѣ.

18. Найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія двухъ параболъ, которыя имѣютъ фокусомъ данную точку, касаются данной прямой и пересѣкаются подъ даннымъ угломъ.

19. Даны три точки A, B, C и неопредѣленная прямая; на этой прямой беремъ перемѣнный отрѣзокъ MN, видимый изъ точки A подъ постояннымъ угломъ; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія двухъ прямыхъ BM и CN.

20. Два угла постоянной величины вращаются около ихъ вершинъ, находящихся на концахъ большой оси эллипса; точка пересѣченія двухъ сторонъ описываетъ эллипсъ; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія двухъ другихъ сторонъ.

21. Найти геометрическое мѣсто вершинъ равносторонней гиперболы, проходящей черезъ данную точку, и которая асимптотою имѣетъ данную прямую.

22. Даны системы коническихъ сѣченій, которыя фокусами имѣютъ F и F′, и неподвижная прямая, проходящая черезъ фокусъ F; доказать, что касательныя, проведенныя къ этимъ различнымъ коническимъ сѣченіямъ въ точкахъ, въ которыхъ каждое изъ нихъ пересѣкается этою прямою, суть касательныя къ одной и той же параболѣ, которая имѣетъ точку фокусомъ F′, а сѣкущую директрисой.

Доказать, что отрѣзокъ каждой касательной, заключающейся между коническимъ сѣченіемъ и параболою, видѣнъ изъ фокуса F′ подъ прямымъ угломъ.

ГЛАВА X.

Теорія полюсовъ и поляръ.

Касательныя къ алгебраическимъ кривымъ.

292. Разсмотримъ алгебраическое уравненіе m-ой степени

(1) $$f(x, y) = 0,$$

представленное въ цѣломъ видѣ. Касательная, проведенная въ точкѣ, координаты которой суть x и y, выражается уравненіемъ

$$(X - x) f_x' + (Y - y) f_y' = 0,$$

или

$$Xf_x' + Yf_y' - (xf_x' + yf_y') = 0.$$

Это уравненіе содержитъ координаты точки прикосновенія также въ m-ой степени; но помощію уравненія (1) можно уничтожить члены m-ой степени. Это упрощеніе легко можно сдѣлать, съ помощію частнаго понятія, которое мы изложимъ. Положимъ, что въ уравненіи (1) x и y замѣнены черезъ $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$, и что всѣ члены умножены на z^m; тогда многочленъ $f(x, y)$ будетъ однороднымъ многочленомъ m-ой степени относительно трехъ буквъ x, y, z, который мы означимъ черезъ $f(x, y, z)$. Очевидно, что если въ этомъ многочленѣ сдѣлаемъ $z = 1$, то снова получимъ данный многочленъ $f(x, y)$. Извѣстно, что если функція $f(x, y, z)$ однородна и m-ой степени относительно трехъ буквъ x, y, z, то получимъ

$$xf_x' + yf_y' + zf_z' = mf(x, y, z).$$

Отсюда

$$xf_x' + yf_y' + mf(x, y, z) - zf_z'.$$

Положивъ въ немъ $z = 1$ увидимъ, что вторая часть равна величинѣ $xf_x' + yf_y'$, которая входитъ въ уравненіе касательной; но такъ какъ точка прикосновенія находится на кривой, то первая часть будетъ нуль; слѣдовательно, выраженіе $xf_x' + yf_y'$ равно величинѣ, которая равняется $-zf_z'$, при $z = 1$. Такимъ образомъ уравненіе касательной можно представить въ видѣ

$$Xf_x' + Yf_y' + zf_z' = 0.$$

Для большей симметріи пишутъ

(2) $$Xf_x' + Yf_y' + Zf_z' = 0.$$

Когда возьмемъ три частныя производныя отъ однородной функціи $f(x, y, z)$, то въ уравненіи (2) z и Z замѣнимъ единицею.

293. Постараемся теперь провести черезъ данную точку p, координаты которой суть x_1 и y_1, касательныя къ данной кривой. Назовемъ черезъ x и y координаты одной изъ точекъ прикосновенія; такъ какъ касательная въ этой точкѣ должна проходить черезъ точку p, то уравненіе (2) должно удовлетворяться координатами x_1 и y_1 точки p; такимъ образомъ получимъ соотношеніе

$$x_1f_x' + y_1f_y' + Zf_z' = 0,$$

которое для симметріи напишемъ въ видѣ

(3) $$x_1f_x' + y_1f_y' + z_1f_z' = 0,$$

условившись z и z_1 замѣнить единицею. Точки прикосновенія опредѣлятся изъ двухъ совмѣстныхъ уравненій (1) и (3). Такъ какъ одно изъ этихъ двухъ уравненій есть m-ой степени, другое $(m-1)$-ой степени, то число рѣшеній будетъ по большей мѣрѣ $m(m-1)$. Такимъ образомъ черезъ точку p къ кривой m-ой степени можно по большей мѣрѣ провести $m(m-1)$ дѣйствительныхъ или мнимыхъ касательныхъ.

Если кривая будетъ второй степени, то уравненіе (3) будетъ первой степени, и мы получимъ два рѣшенія дѣйствительныхъ или сопряженныхъ мнимыхъ. Если оба рѣшенія будутъ дѣйствительныя, то черезъ точку p къ кривой можно провести двѣ дѣйствительныя касательныя. Если два рѣшенія будутъ сопряженныя мнимыя, то обѣ касательныя будутъ сопряженныя мнимыя, но прямая прикосновеній (3) будетъ дѣйствительная.

Гармоническая пропорція.

294. Даны двѣ точки A и B; извѣстно, что на прямой AB существуютъ двѣ такія точки C и D, что отношеніе ихъ разстояній отъ двухъ точекъ A и B равно данному отношенію (*фиг.* 167). Эти двѣ точки C и D называются *сопряженными гармоническими* относительно двухъ точекъ A и B. Очевидно, что су-

Фиг. 167.

A O C B D

ществуетъ безконечное число системъ точекъ, сопряженныхъ гармонически двумъ даннымъ точкамъ; одну изъ точекъ можно взять произвольно. Если точка C будетъ приближаться къ срединѣ O прямой AB, то сопряженная точка D будетъ удаляться въ безконечность, и наоборотъ.

Если пути, пройденные въ одномъ направленіи, будемъ принимать за положительные, а пути, пройденные въ обратныхъ направленіяхъ, за отрицательные, то получимъ соотношеніе

$$(4) \qquad \frac{AC}{BC} = -\frac{AD}{BD}.$$

Такъ какъ это соотношеніе можно представить въ видѣ

$$\frac{CA}{DA} = -\frac{CB}{DB},$$

то, обратно, мы видимъ, что двѣ точки A и B суть сопряженныя гармоническія относительно двухъ точекъ C и D.

Если опредѣлимъ относительныя положенія четырехъ точекъ посредствомъ разстоянія одной изъ нихъ A отъ трехъ другихъ, то предъидущее соотношеніе обратится въ

$$(5) \qquad \frac{2}{AB} = \frac{1}{AC} + \frac{1}{AD}.$$

Считая разстоянія отъ точки O, средины AB, получимъ

$$(6) \qquad OC.\,OD = OB^2.$$

Теорема I.

295. *Дано коническое сѣченіе; если черезъ точку* p *плоскости проведемъ какую-нибудь сѣкущую* mm′ (*фиг.* 168), *то геометрическое мѣсто точки* p′ *сопряженной гармонической точкѣ* p *относительно двухъ точекъ пересѣченія* m *и* m′ *сѣкущей и кривой будетъ прямая линія.*

Точка p' на каждой сѣкущей опредѣляется уравненіемъ

$$\frac{2}{pp'} = \frac{1}{pm} + \frac{1}{pm'}.$$

Поэтому очевидно, что геометрическое мѣсто есть алгебраическое, и что на каждой сѣкущей находится только одна точка геометрическаго

мѣста; сверхъ того точка p не принадлежитъ геометрическому мѣсту, слѣдовательно искомое геометрическое мѣсто есть алгебраическая линія; которая только въ одной точкѣ пересѣкается каждою изъ прямыхъ, проведенныхъ черезъ точку p; слѣдовательно, это есть линія перваго порядка, т. е. прямая линія P. Эту прямую легко опредѣлить по двумъ ея точкамъ; черезъ точку p можно провести двѣ касательныя pa и pb; когда сѣкущая совпадаетъ съ касательною pa, то обѣ точки пересѣченія m и m' сливаются съ точкою прикосновенія a, и мы получимъ $\frac{2}{pp'} = \frac{2}{pa}$; откуда $pp' = pa$, и слѣдовательно, точка p' сама сливается съ точкою a, такимъ образомъ, обѣ точки прикосновенія a и b, принадлежатъ геометрискому мѣсту. Отсюда заключаемъ, что прямая P есть не что иное, какъ прямая прикосновеній относительно точки p. Эта прямая P называется *полярою* точки p, и наоборотъ точка p называется *полюсомъ* прямой P.

Найдемъ прямо изъ анализа уравненіе геометрическаго мѣста. Пусть

$$f(x_1,y), = Ax^2 + Bxy + Cx^2 + Dx + Ey + = 0$$

будетъ уравненіе кривой; x_1 и y_1 координаты точки p; какую-нибудь сѣкущую, проведенную черезъ точку p, можно выразить уравненіями

Фиг. 168.

$$(6) \qquad \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \varrho,$$

въ которомъ a и b означаютъ два постоянныя, а ϱ разстояніе точки p отъ какой-нибудь прямой; отсюда находимъ $x = x_1 + a\varrho$, $y = y_1 + b\varrho$. Внеся эти величины въ уравненіе кривой, получимъ уравненіе второй степени относительно ϱ

$$f(x_1 + a\varrho,\ y_1 + b\varrho) = \varrho_1$$

которое опредѣляетъ разстоянія точки p отъ двухъ точекъ m и m'. Развернувъ уравненіе, получимъ

$$(Aa^2 + Bab + Cb^2)\,\varrho^2 + (af'_{x_1} + bf'_{y_1})\,\varrho + f(x_1, y_1) = 0,$$

или, если $\frac{1}{\varrho}$ возьмемъ за неизвѣстное,

$$f(x_1, y_1)\frac{1}{\varrho} + (af'_{x_1} + bf'_{y_1})\frac{1}{\varrho} + (Aa^2 + Bab + Cb^2) = 0,$$

Назовемъ черезъ ϱ' и ϱ'' два корня этого уравненія, и черезъ ϱ разстояніе точки p_1 отъ сопряженной гармонической точки p'. По уравненію (5), мы должны имѣть $\frac{2}{\varrho_1} = \frac{1}{\varrho'} + \frac{1}{\varrho''}$.
Но мы имѣемъ

$$\frac{1}{\varrho'}+\frac{1}{\varrho''}=-\frac{af'_{x_1}+bf'_{y_1}}{f(x_1, y_1)};$$

откуда

$$\frac{2}{\varrho_1}=-\frac{af'_{x_1}+bf'_{y_1}}{f(x_1, y_1)};$$

или

$$a\varrho_1 f'_{x_1}+b\varrho_1 f'_{y_1}+2f(x_1, y_1)=0.$$

Такъ какъ точка p^1 принадлежитъ прямой pmm', то ея координаты x и y удовлетворяютъ уравненіямъ (7) этой прямой; т. е. мы получимъ $x-x_1=a\varrho_1$, $y-y_1=b_1$, замѣнивъ въ предъидущемъ уравненіи $a\varrho_1$ и $b\varrho_1$ этими величинами, исключимъ перемѣнные параметры a и b, и получимъ уравненіе геометрическаго мѣста

(8) $$(x-x_1)f'_{x_1}+(y-y_1)f'_{y}+2f(x_1, y_1)=0,$$

которое есть первой степени. Если выполнимъ вычисленія, то увидимъ, что постоянный членъ $2f(x_1, y)-x_1f'_{x_1}-y_1f'_{y_1}$ приводится къ Dx_1+Ey_1+2F, а предъидущее уравненіе обратится въ

$$xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+(Dx_1+Ey_1+2F)=0.$$

Но это приведеніе можно сдѣлать другимъ образомъ; представимъ себѣ, какъ прежде, что въ многочленѣ $f(x, y)$ x и y замѣнены черезъ $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$, и что всѣ члены умножены на z^2; тогда этотъ многочленъ обратится въ однородный многочленъ второй степени, который мы означимъ черезъ $f(x, y, z)$. Изъ свойства однородныхъ функцій, о которыхъ было сказано въ § 292, получимъ

$$xf'_x+yf'_y+zf'_z+2f(x, y, z);$$

откуда

$$2f(x, y, z)-xf'_x-yf'_y=z'f'_z$$

или, замѣнивъ x, y, z черезъ x_1, y_1, z_1,

$$2f(x_1, y_1, z_1)-x_1f'_x-y_1f'_y=z_1f'_z,$$

Слѣдовательно, уравненіе (8) можно написать въ видѣ

$$xf_{x_1}+yf_{y_1}+zf_{z_1},$$

или для симметріи

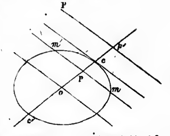
(9) $$xf'_{x_1}+yf'_{y_1}+zf'_{z_1}=0.$$

Если это уравненіе развернемъ, то увидимъ, что оно не измѣняется, когда въ немъ перемѣнимъ буквы x и x_1, y и y_1, z и z_1, и такимъ образомъ получимъ уравненіе (3) хорды прикосновеній.

296. Разсмотримъ относительныя положенія полюса и поляры. Черезъ точку p проведемъ сѣкущую mm' (*фиг.* 169) параллельно хордамъ, которая діаметръ, проходящій черезъ точку p, дѣлитъ пополамъ; такъ какъ

точка p есть средина линіи mm', то сопряженная гармоническая точка находится въ безконечности на этой сѣкущей; отсюда заключаемъ, что поляра P параллельна хордѣ mm', т. е. параллельна направленію сопряженнаго діаметра, проходящаго черезъ точку p.

Фиг. 169.



Пусть o будетъ центръ кривой и p' точка поляры, находящейся на діаметрѣ op, т. е. гармоническая точка, сопряженная точкѣ p относительно двухъ концовъ c и c' діаметра; тогда получимъ $op.\, op' = oc^2$. Если полюсъ p будемъ двигать по діаметру oc, то поляра P будетъ двигаться параллельно самой себѣ. Если полюсъ перемѣщается отъ o къ c, то поляра, находившаяся прежде въ безконечности, будетъ болѣе и болѣе приближаться къ кривой и сдѣлается касательною въ точкѣ c. Если полюсъ выходитъ изъ кривой и удаляется неопредѣленно, то поляра пересѣчетъ кривую въ двухъ дѣйствительныхъ точкахъ и будетъ все болѣе и болѣе приближаться къ центру.

Если кривая будетъ парабола, въ этомъ случаѣ точка c' находится въ безконечности, а точка c будетъ средина pp'.

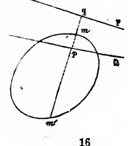
Изъ всего предъидущаго слѣдуетъ обратное заключеніе: всякая прямая имѣетъ полюсъ и притомъ одинъ. Если отнесемъ кривую къ какимъ-нибудь осямъ, то, для опредѣленія координатъ x_1 и y_1 полюса p данной прямой $mx + ny + p = 0$, надобно это уравненіе сдѣлать тожественнымъ съ уравненіемъ (9), которое выражаетъ поляру точки p; такимъ образомъ получимъ два соотношенія.

$$\frac{f'_{x_1}}{m} = \frac{f'_{y_1}}{n} = \frac{f'_{z_1}}{p}. \tag{10}$$

Теорема II.

297. *Поляры всѣхъ точекъ прямой проходятъ черезъ полюсъ этой прямой, и обратно полюсы всѣхъ прямыхъ, которыя проходятъ черезъ одну и ту же точку, находятся на полярѣ этой точки.*

Фиг. 170.



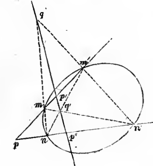
На прямой P, полюсъ которой есть p, возьмемъ какую-нибудь точку q (*фиг.* 170); прямая pq пересѣкаетъ коническое сѣченіе въ двухъ точкахъ m и m'; такъ какъ двѣ точки p и q суть сопряженныя гармоническія относительно двухъ точекъ m и m', то поляра точки q проходитъ черезъ точку p.

Обратно, пусть q будетъ полюсъ какой-нибудь прямой Q, проходящей черезъ точку p; такъ какъ двѣ точки q и p суть сопряженныя гармоническія точки относительно двухъ точекъ m и m', въ которыхъ прямая pq пересѣкаетъ коническое сѣченіе, то точка q принадлежитъ полярѣ P точки p.

Теорема III.

298. *Дано коническое сѣченіе; если черезъ точку* p *проведемъ двѣ какія-нибудь сѣкущія* pmm′, pnn′, *которыя пересѣкаютъ кривую въ точкахъ* m, m′, n, n′ (*фиг.* 171), *то точки пересѣченія* q и q′ *прямыхъ* mn, m′n′ *или* mn′, m′n *будутъ принадлежать полярѣ точки* p.

Фиг. 171.



Замѣтимъ прежде, что теорема I справедлива въ томъ случаѣ, когда геометрическое мѣсто втораго порядка приводится къ системѣ двухъ прямыхъ; но тогда поляра точки p проходитъ черезъ вершину угла; дѣйствительно, если будемъ разсматривать сѣкущую, которая проходитъ черезъ вершину, то обѣ точки m и m' сольются съ этою точкою, точно также и точка p', сопряженная гармоническая точка p.

Доказавъ это, разсмотримъ систему двухъ прямыхъ mn, $m'n'$, которыя пересѣкаются въ точкѣ q. Прямая pmm' пересѣкаетъ коническое сѣченіе и двѣ стороны угла mqm' въ однѣхъ и тѣхъ же точкахъ m и m'; точка p', сопряженная гармоническая точки p, будетъ одна и та же на сѣкущей pmm', когда эту сѣкущую будемъ разсматривать, какъ принадлежащую къ коническому сѣченію или углу. Точка p'' сопряженная гармоническая точки p, будетъ также одна и та же въ обоихъ случаяхъ на сѣкущей pnn'. Такъ какъ поляры точки p, относительно коническаго сѣченія и угла, имѣютъ двѣ общія точки p' и p'', то онѣ сливаются; но мы знаемъ, что поляра относительно угла проходитъ черезъ вершину q; слѣдовательно, точка q принадлежитъ полярѣ точки p относительно кривой. Точно также точка q' принадлежитъ этой же полярѣ.

Примѣчаніе. Когда кривая начерчена, то изъ этой теоремы мы выводимъ способъ строить поляру точки p. Черезъ точку p проводимъ двѣ

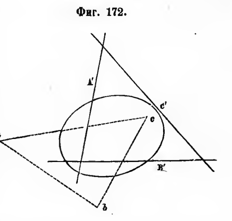
сѣкущія pmm', pnn', съ помощію которыхъ опредѣлимъ двѣ точки q и q' поляры.

Если точка p будетъ внѣшняя, то поляра пересѣчетъ кривую въ двухъ точкахъ, которыя будутъ точки прикосновенія касательныхъ, проведенныхъ изъ точки p.

Взаимныя полярныя фигуры.

299. Въ плоскости дана фигура, составленная изъ точекъ a, b, c,... и прямыхъ A, B, C,...; если возьмемъ поляры A′, B′, C′... точекъ, и полюсы a', b', c'... прямыхъ относительно опредѣленнаго коническаго сѣченія, то получимъ вторую фигуру, состоящую, какъ и первая, изъ прямыхъ и точекъ. Поступивъ точно такъ же со второй фигурой, т. е. взявъ полюсы прямыхъ и поляры точекъ, получимъ снова первую фигуру. Въ слѣдствіе этого эти двѣ фигуры называются *взаимными полярными* фигурами (*фиг.* 172).

Фиг. 172.

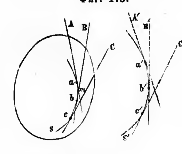


Прямая ab, которая соединяетъ двѣ точки a и b одной изъ фигуръ, имѣетъ полюсомъ точку пересѣченія прямыхъ A′ и B′ другой фигуры; и обратно, точка пересѣченія двухъ прямыхъ A′ и B′ одной изъ фигуръ имѣетъ *полярою* прямую ab другой фигуры. Если нѣсколько точекъ a, b, c... находятся на прямой линіи въ одной изъ фигуръ, то прямыя A′, B′, C′... другой фигуры проходятъ черезъ одну и ту же точку, которая есть полюсъ прямой; наоборотъ, если нѣсколько прямыхъ A, B, C проходятъ черезъ одну и ту же точку одной изъ фигуръ, то точки a', b', c'.... другой фигуры находятся на прямой линіи.

Дана плоская кривая S; проведемъ къ этой кривой касательную A и возьмемъ полюсъ a' этой касательной (*фиг.* 173). Если будетъ наматывать касательную A на кривую S, то полюсъ a' опишетъ другую кривую S′. Пусть A и B будутъ двѣ сосѣднія касательныя, проведенныя къ кривой S, a' и b' ихъ полюсы; точка пересѣченія m, двухъ прямыхъ A и B будетъ полюсъ прямой $a'b'$; если касательная B будетъ неопредѣленно приближаться къ касательной A, то точка m будетъ приближаться къ точкѣ прикосновенія a касательной A; въ то же время сѣкущая $a'b'$,

вращаясь около точки a', обратится въ касательную къ кривой S' въ точкѣ a'; точно также, наоборотъ, кривая S есть геометрическое мѣсто полюса a движущейся касательной A', проведенной къ кривой S'. Очевидно, что точки a и a' соотвѣтствуютъ другъ другу такимъ образомъ, что касательная, проведенная къ одной изъ этихъ точекъ, есть поляра другой. Обѣ кривыя S и S' называются взаимными полярами.

Фиг. 173.



300. Пусть

$$F(x, y) = 0 \tag{11}$$

будетъ уравненіе алгебраической кривой S m-ой степени; касательная A, проведенная въ точкѣ a, координаты которой суть x и y, выразится уравненіемъ

$$XF_x' + YF_y' + ZF_z' = 0. \tag{12}$$

Назовемъ черезъ x_1 и y_1 координаты полюса a' прямой A относительно управляющей кривой втораго порядка $f(x, y) = 0$; тогда уравненіе поляры точки a' будетъ

12) $$Xf'_{x_1} + Yf'_{y_1} + Zf'_{z_1} = 0.$$

Оба уравненія (12) и (13), которыя выражаютъ одну и ту же кривую, должны быть тожественны; такимъ образомъ мы получимъ соотношенія

$$\frac{f'_{x_1}}{F'_x} = \frac{f'_{y_1}}{F'_y} = \frac{f'_{z_1}}{F'_z}. \tag{14}$$

Если изъ трехъ уравненій (11) и (14) исключимъ x и y, то получимъ уравненіе кривой S', т. е. геометрическое мѣсто точки a'.

Отыщемъ, напримѣръ, взаимную полярную кривую коническаго сѣченія $Ax^2+By^2-1=0$, относительно управляющаго круга $x^2 + y^2 - 1 = 0$. Если x и y замѣнимъ черезъ $\frac{x}{z}$ и $\frac{y}{z}$, то эти оба уравненія будутъ однородны $Ax^2 + By^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, а уравненія (14) обратятся въ $\frac{x_1}{Ax} = \frac{y_1}{By} = \frac{z_1}{z}$; положивъ здѣсь $z = z_1 = 1$, получимъ $x = \frac{x_1}{A}$, $y = \frac{y_1}{B}$; внеся эти величины въ уравненіе данной кривой, получимъ уравненіе

$\frac{x_1^2}{A} + \frac{y_1^2}{B} - 1 = 0$. Такимъ образомъ взаимная полярная кривая есть новое коническое сѣченіе.

301. *Степенью или порядкомъ* алгебраической кривой мы называли степень уравненія, которое выражаетъ ее въ прямолинейныхъ координатахъ, или число дѣйствительныхъ или мнимыхъ точекъ, въ которыхъ кривая пересѣкается какою-нибудь прямою. Точно также *классомъ* кривой называется число дѣйствительныхъ или мнимыхъ касательныхъ, которыя можно провести къ кривой черезъ какую-нибудь точку плоскости. Извѣстно, что изъ какой-нибудь точки можно провести двѣ касательныя къ кривой втораго порядка; слѣдовательно, кривыя втораго порядка принадлежатъ ко второму классу.

Легко убѣдиться, что двѣ взаимныя полярныя кривыя S и S′ (*фиг.* 174) таковы, что порядокъ одной изъ нихъ равенъ классу другой. Какая-нибудь прямая P пересѣкаетъ кривую S въ m точкахъ a, b, c, ...; этимъ m точкамъ соотвѣтствуютъ m прямыхъ A′, B′, C′..., касающихся кривой S′ и проходящихъ черезъ точку p', которая есть полюсъ прямой P, и наоборотъ, каждой касательной A′, проведенной изъ точки p' къ кривой S′, соотвѣтствуетъ точка a, которая принадлежитъ кривой S и находится на прямой P; такимъ образомъ число касательныхъ, которыя можно провести изъ точки p' къ кривой S′, равно числу точекъ пересѣченія кривой S съ прямою P, и слѣдовательно, классъ кривой S′ равенъ порядку кривой S. Точно также порядокъ кривой S′ равенъ классу кривой S.

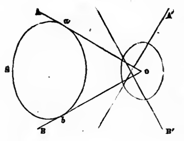
Фиг. 174.

Такъ какъ кривая втораго порядка есть втораго класса, то отсюда слѣдуетъ, что взаимная полярная кривая втораго порядка есть также втораго порядка.

Въ этомъ случаѣ точно также легко опредѣлить родъ кривой. Если центръ o управляющей кривой будетъ находиться внѣ кривой S, то изъ этой точки можно будетъ провести двѣ дѣйствительныя касательныя A и B къ кривой S (*фиг.* 176); такъ какъ полюсы этихъ касательныхъ удаляются въ безконечность, то заключаемъ, что кривая S′ имѣетъ безконечныя вѣтви по двумъ различнымъ направленіямъ; слѣдовательно, это есть гипер-

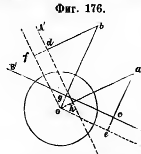
бола. Пусть a и b будутъ точки прикосновенія касательныхъ A и B; тогда поляры A′ и B′ этихъ двухъ точекъ будутъ касательныя къ кривой S′ въ точкахъ, находящихся въ безконечности; слѣдовательно, это есть асимптоты. Если центръ o управляющей кривой будетъ находиться на кривой S, то точки a и b сольются съ точкою o, поляра этой точки, или асимптота удаляется въ безконечность, и кривая S′ будетъ парабола. Наконецъ, если центръ o управляющей кривой будетъ находиться внутри кривой S, то кривая S′ будетъ эллипсъ.

Фиг. 175.



302. Способъ взаимныхъ поляръ имѣетъ большое значеніе при изученіи коническихъ сѣченій; съ помощію его, когда найдено свойство этихъ кривыхъ, можно вывести отсюда непосредственно соотносительное свойство. Напримѣръ, мы доказали въ § 274, что черезъ пять данныхъ точекъ можно провести коническое сѣченіе и притомъ только одно; отсюда заключаемъ, что *можно провести коническое сѣченіе касающееся пяти данныхъ прямыхъ* и притомъ *только одно*. Дѣйствительно, положимъ, что въ плоскости начерчено какое-нибудь коническое сѣченіе, которое возьмемъ за управляющую кривую, и что относительно этого коническаго сѣченія взяты полюсы a, b', c', d' e' пяти данныхъ прямыхъ A, B, C, D, E; черезъ пять точекъ a', b', c', d', e' можно провести коническое сѣченіе S′; взаимная полярная кривая кривой S′ будетъ коническое сѣченіе, S касающееся пяти данныхъ прямыхъ. Обратно, каждому коническому сѣченію, касающемуся пяти прямыхъ, соотвѣтствуетъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ пять точекъ; такъ какъ черезъ пять точекъ можно провести только одно коническое сѣченіе, то существуетъ только одно коническое сѣченіе, касающееся пяти прямыхъ.

Фиг. 176.



303. Разсмотримъ частный случай, когда управляющая кривая будетъ кругъ радіуса r; въ этомъ случаѣ поляра A′ точки a будетъ перпендикулярна къ oa и находиться отъ центра на разстояніи, равномъ $\frac{r^2}{oa}$. Прямыя, соединяющія центръ съ двумя точками a и b, образуютъ между собою уголъ aob, равный углу поляръ A′ и B′ этихъ точекъ (*фиг.* 176).

Черезъ центръ o проведемъ линіи, параллельныя прямымъ A′ и B′; изъ точекъ a и b опустимъ перпендикуляры на эти прямыя; изъ подобныхъ треугольниковъ oae, obf находимъ

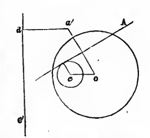
$$\frac{ao}{ob} = \frac{ae}{bf} = \frac{ac + ce}{bd + df} = \frac{ac + og}{bd + oh};$$

отсюда $oa\ (bd + oh) = ob\ (ac + og)$; но $oa.\ oh = ob.\ og = r^2$; слѣдовательно, $oa\ bd = ob\ ac$, или $\frac{oa}{ob} = \frac{ac}{bd}$.

Такимъ образомъ разстояніе двухъ точекъ отъ центра пропорціональны разстояніямъ каждой изъ нихъ отъ поляры другой.

Найдемъ взаимную полярную кривую круга радіуса r' относительно круга o. Пусть C' будетъ поляра центра c даннаго круга (*фиг.* 177); проведемъ къ этому кругу какую-нибудь касательную A и возьмемъ полюсъ a' этой прямой; изъ предъидущаго свойства получимъ $\frac{oa'}{oc} = \frac{a'd}{r'}$ или $\frac{oa'}{a'd} = \frac{oc}{r'}$; такъ какъ отношеніе разстояній каждой точки a' геометрическаго мѣста отъ точки o и отъ опредѣленной прямой C' есть постоянное, то это геометрическое мѣсто есть кривая втораго порядка, точка o которой есть одинъ изъ фокусовъ, а прямая C' соотвѣтствующая директриса.

Фиг. 177.



Съ помощію этого преобразованія можно непосредственно изъ свойствъ круга вывести большую часть свойствъ фокусовъ кривыхъ втораго порядка. Такъ напримѣръ, двѣ касательныя A и B, проведенныя къ кругу c, составляютъ равные углы съ хордою прикосновенія ab; прямымъ A и B соотвѣтствуютъ двѣ точки a' и b' коническаго сѣченія; двумъ точкамъ a и b круга соотвѣтствуютъ касательныя A' и B', проведенныя къ этому коническому сѣченію въ точкахъ a' и b'; прямой ab или M соотвѣтствуетъ точка пересѣченія m' прямыхъ A' и B'. Радіусы, проведенные изъ фокуса o къ точкамъ a', b', m' образуютъ между собою углы, равные угламъ ихъ поляръ A, B, M; отсюда заключаемъ, что прямая om' дѣлитъ уголъ a' o b' пополамъ (§§ 255).

Геометрическое мѣсто вершины m постояннаго угла, описаннаго около круга c, есть концентричный кругъ. Двумъ касательнымъ A и B, проведеннымъ изъ точки m къ кругу c, соотвѣтствуютъ двѣ точки a' и b' коническаго сѣченія, а точкѣ m прямая $a'b'$; такъ какъ уголъ $a'ob'$ равенъ углу прямыхъ A и B, то онъ также постоянный; такъ какъ точка m описываетъ кругъ, центръ котораго есть c, то ея поляра $a'b'$ огибаетъ коническое сѣченіе, точка o котораго есть одинъ изъ фокусовъ, а поляра центра c есть директриса. Такимъ образомъ *хорда, видимая изъ фокуса коническаго сѣченія подъ постояннымъ угломъ, огибаетъ коническое сѣченіе, которое имѣетъ тотъ же фокусъ и ту же директрису*. Хорда ab круга огибаетъ концентричный кругъ; слѣдовательно, точка пересѣченія касательныхъ, проведенныхъ къ коническому сѣченію въ точкахъ a' и b', описываетъ коническое сѣченіе, которое также имѣетъ тотъ же фокусъ и ту же директрису.

Огибающія кривыя.

304. Въ предъидущемъ намъ приходилось разсматривать кривыя, касающіяся прямыхъ; когда точка описываетъ кривую, поляра ея остается

касательною. къ другой кривой. Вообще огибающею движущейся линіи называютъ кривую, которой эта линія постоянно касается.

Пусть

(1) $$f(x, y, a) = 0,$$

будетъ уравненіе, содержащее перемѣнный параметръ a. Каждой величинѣ a соотвѣтствуетъ опредѣленная линія. Дадимъ параметру двѣ близкія величины a и $a + h$; тогда линія (1) и линія

(2) $$f(x, y, a + h) = 0,$$

пересѣкутся въ точкѣ M′ (*фиг.* 178), координаты которой удовлетворяютъ въ одно и то же время уравненіямъ (1) и (2). Оба эти уравненія можно замѣнить слѣдующимъ

$$f(x, y, a) = 0, \qquad \frac{f(x, y, a+h) - f(x, y, a)}{h} = 0,$$

которое, когда h приближается къ нулю, приводятся къ

(3) $$f(x, y, a) = 0, \; f'_a(x, y, a) = 0.$$

Но когда h приближается къ нулю, точка M′ перемѣщается на линіи (1) и приближается къ предѣльному положенію M; это есть предѣльная точка, которая выражается уравненіями (3). Каждая изъ линій (1) содержитъ предѣльную точку; геометрическое мѣсто этихъ точекъ, т. е. геометрическое мѣсто *послѣдовательныхъ пересѣченій* линій, выражаемыхъ уравненіемъ (1), получимъ, исключивъ a изъ уравненій (3).

Фиг. 178.

Разсмотримъ снова уравненія (1) и (2), въ которыхъ мы примемъ a за перемѣнное, а h за постоянное; эта система выражаетъ геометрическое мѣсто точекъ, въ которыхъ каждая линія (a) пересѣкается линіею $(a + h)$. Двѣ изъ этихъ точекъ находятся на линіи (a), именно точки пересѣченія M′ линіи (a) съ линіею $(a + h)$, и точка пересѣченія M″ линіи $(a - h)$ съ линіею (a). Когда h приближается къ нулю, обѣ точки M′ и M″ приближаются къ тому же предѣльному положенію M, и геометрическое мѣсто сдѣлается касательнымъ къ линіи (a) въ точкѣ M. Такимъ образомъ *геометрическое мѣсто послѣдовательныхъ пересѣченій линій, выражаемыхъ уравненіемъ* (1), *есть касательныя къ каждой изъ этихъ линій.*

Въ слѣдствіе этого говорятъ, что геометрическое мѣсто есть огибающая линій (1), которыя называются *огибаемыми*.

305. Положимъ теперь, что движущаяся линія выражается уравненіемъ

$$(4) \qquad f(x, y, a, b) = 0,$$

которое содержитъ два перемѣнные параметра a и b, имѣющіе между собой соотношеніе

$$(5) \qquad \varphi(a, b) = 0.$$

Если черезъ b' назовемъ производную отъ b, разсматриваемаго какъ функція отъ a, выражаемая уравненіемъ (5), то получимъ $\varphi'_a + \varphi'_b b' = 0$ откуда $b' = -\frac{\varphi'_a}{\varphi'_b}$. Но если приравняемъ нулю производную отъ функціи $f(x, y, a, b)$, взятую относительно a, разсматривая въ ней y, какъ функцію отъ a, то получимъ $f_a' + f_b' b' = 0$; отсюда находимъ соотношеніе

$$(6) \qquad \frac{\varphi'_a}{f'_a} = \frac{\varphi'_b}{f'_b},$$

и чтобы найти уравненіе огибающей, надобно изъ трехъ уравненій (4), (5), (6) исключить два параметра.

306. Для примѣра найдемъ огибающую нормалей, проведенныхъ къ параболѣ. Нормаль, проведенная къ параболѣ $y^2 - 2px - 0$ въ точкѣ M (*фиг.* 178), координаты которой суть x и y, выражается уравненіемъ $p(Y - y) + y(X - x) = 0$; замѣнивъ x его величиною $\frac{y^2}{2p}$, получимъ уравненіе

$$(7) \qquad pY + y(X - p) - \frac{y^3}{2p} = 0,$$

которое содержитъ произвольный параметръ y; теперь надобно взять производную относительно y

$$(8) \qquad X - p - \frac{3y^2}{2p} = 0,$$

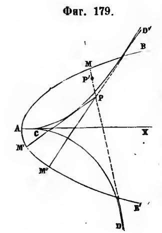
и исключить y изъ уравненій (7) и (8). Замѣнивъ въ уравненіи (7) y^2 его величиною изъ уравненія (8), получимъ $y = -\frac{3pY}{2(X - p)}$; внеся эту величину y въ уравненіе (8), получимъ уравненіе огибающей

$$Y^2 = \frac{8(X - p)^3}{27p}.$$

Эта кривая имѣетъ видъ, показанный на фигурѣ; она представляетъ точку возврата въ C; дѣйствительно, такъ какъ касательная въ этой точкѣ нормальна къ пара-

болѣ въ вершинѣ A, то она совпадаетъ съ осью AX. Когда точка M описываетъ вѣтвь AB параболы, нормаль наматывается на вѣтвь CD огибающей, и точно такъ же, когда точка M описываетъ вѣтвь AB′ параболы, нормаль наматывается на вѣтвь CD′ огибающей.

Фиг. 179.



Если желаемъ провести нормали къ параболѣ черезъ данную точку P, то въ уравненіи (7) надобно X и Y принимать за координаты точки P, а ординату y подошвы M нормали за неизвѣстное. Изъ точки P можно провести три нормали къ параболѣ или одну, смотря по тому, будетъ ли это уравненіе третьей степени относительно y имѣть три дѣйствительные корня или одинъ. Этотъ вопросъ, очевидно, приводится къ проведенію касательныхъ къ огибающей черезъ точку P; такимъ образомъ огибающая, которая есть третьей степени, есть также третьяго класса. Если точка P будетъ находиться между двухъ вѣтвей огибающей, то изъ этой точки можно провести три касательныя къ огибающей, и слѣдовательно, три нормали къ параболѣ; но когда точка лежитъ внѣ, въ точкѣ P′, тогда можно провести только одну касательную къ огибающей, и слѣдовательно одну нормаль къ параболѣ.

307. Найдемъ еще огибающую нормалей, проведенныхъ къ эллипсу

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0;$$

уравненіе нормали въ точкѣ (x, y)

(10) $$\frac{a^2X}{x}-\frac{b^2Y}{y}-(a^2-b^2)=0$$

содержитъ два перемѣнные параметра x и y, имѣющіе между собой соотношеніе

(11) $$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0.$$

По формулѣ (6), § 305 мы имѣемъ

$$\frac{\frac{x}{a^2}}{\frac{a^2X}{x^2}}=\frac{\frac{y}{b^2}}{-\frac{b^2Y}{y^2}}=\frac{1}{a^2-b^2};$$

третье отношеніе мы получимъ, сложивъ числители и знаменатели и умноживъ оба члена перваго на x, оба члена втораго на y, и принимая во вниманіе уравненіе (10) и (11). Отсюда находимъ

$$x^3=\frac{a^4X}{c^2},\quad y^3=-\frac{b^4Y}{c^2};$$

внеся эти величины въ уравненіе (11), получимъ уравненіе огибающей

(12) $$\left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} + \left(\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Эта кривая представляетъ четыре точки возврата (*фиг.* 180). Когда подошва M нормали описываетъ дугу AB эллипса, нормаль наматывается на дугу CD огибающей. Если желаемъ провести нормали къ эллипсу черезъ данную точку P, координаты которой суть X и Y, то изъ двухъ совмѣстныхъ уравненій (10) и (11) опредѣлимъ координаты x и y подошвы каждой нормали; подошвы нормалей суть точки пересѣченія даннаго эллипса (11) съ гиперболою (10); такимъ образомъ имѣемъ мы четыре рѣшенія. Но этотъ вопросъ приводится къ проведенію касательныхъ черезъ точку P къ огибающей; отсюда заключаемъ, что огибающая, которая должна быть шестой степени, есть четвертаго класса. Если точка P будетъ находиться внутри огибающей, черезъ эту точку можно провести четыре касательныхъ къ огибающей, и слѣдовательно четыре дѣйствительныхъ нормали къ эллипсу; но когда точка находится внѣ, напримѣръ въ P′, тогда къ огибающей можно провести только двѣ дѣйствительныя касательныя, слѣдовательно, двѣ нормали къ эллипсу; такимъ образомъ получаемъ тѣ же результаты, которые были уже найдены въ § 291.

Фиг. 180.

Уравненіе огибающей нормалей, проведенныхъ къ гиперболѣ, есть

(13) $$\left(\frac{aX}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} - \left(\frac{bY}{c^2}\right)^{\frac{2}{3}} = 1.$$

Касательныя координаты.

308. Кривую можно разсматривать или какъ геометрическое мѣсто точки, или какъ огибающую движущейся прямой. Разсматривая съ этой послѣдней точки зрѣнія, мы выразимъ прямую уравненіемъ вида

(14) $$px + qy - 1 = 0,$$

и по аналогіи скажемъ, что величины двухъ параметровъ p и q, которыя опредѣляютъ ея положеніе, суть координаты прямой.

Если будетъ дано уравненіе

(15) $$\varphi\,(p, q) = 0$$

между этими двумя параметрами, и если одинъ изъ нихъ будемъ измѣнять непрерывно, то другой будетъ также вообще измѣняться непрерывно, и прямая будетъ двигаться въ плоскости огибающей кривой. Можно предположить, что уравненіе (15) выражаетъ кривую рядомъ ея касатель-

ныхъ съ помощію новой системы координатъ p и q, которыхъ поэтому можно назвать касательными координатами.

Чтобы получить уравненіе этой кривой въ линейныхъ координатахъ, надобно, какъ было сказано въ § 305, исключить p и q изъ уравненій (14), (15) и

(16) $$\frac{x}{\varphi'_p} = \frac{y}{\varphi'_q}.$$

Если уравненіе (15) будетъ алгебраическое, то уравненіе съ x и y, которое мы получимъ, будетъ также алгебраическое. Степень уравненія (15), представленнаго въ цѣломъ видѣ, показываетъ классъ кривой. Дѣйствительно, если x_0 и y_0 будутъ координаты какой-нибудь точки плоскости, то каждая система величинъ p и q, удовлетворяющихъ двумъ уравненіямъ

$$px_0 + qy_0 - 1 = 0, \quad \varphi(p, q) = 0,$$

опредѣлитъ дѣйствительную или мнимую касательную, проходящую черезъ разсматриваемую точку. Если уравненіе (15) будетъ второй степени, то кривая, будучи втораго класса, будетъ также втораго порядка.

Уравненіе первой степени

(17) $$Ap + Bq + C = 0$$

въ касательныхъ координатахъ выражаетъ точку, линейныя координаты которой суть $x_0 = -\frac{A}{C}$, $y_0 = -\frac{B}{C}$; дѣйствительно, это уравненіе, представленное въ видѣ

$$px_0 + qy_0 - 1 = 0,$$

показываетъ, что движущаяся прямая постоянно проходитъ черезъ опредѣленную точку (x_0, y_0), слѣдовательно, огибающая приводится къ точкѣ.

Свойства уравненія первой степени въ линейныхъ координатахъ, которыя были найдены въ II книгѣ, справедливы также и въ этомъ случаѣ съ тою разницею, что точки замѣнены прямыми, а прямыя точками. Такимъ образомъ уравненіе.

$$q - q' = a(p - p'),$$

въ которомъ a есть произвольный параметръ (§ 64), есть общее уравненіе точекъ, находящихся на прямой (p' и q'). Уравненіе (§ 66)

(18) $$q - q' = \frac{q'' - q'}{p'' - p'}(p - p'),$$

выражаетъ точку пересѣченія двухъ прямыхъ (p', q'), (p', q'').

Разсмотримъ двѣ сосѣднія касательныя, проведенныя къ кривой (15), и положимъ, что вторая болѣе и болѣе приближается къ первой; тогда точка пересѣченія ихъ, выражаемая уравненіемъ (18), предѣломъ будетъ имѣть точку прикосновенія этой первой касательной; такимъ образомъ точка прикосновенія выразится уравненіемъ (§ 89)

$$q - q' = -\frac{\varphi'_p}{\varphi'_q}(p - p'),$$

или

(19) $$(p - p')\,\varphi'_p{}' + (q - q')\,\varphi'_q{}' = 0.$$

Чтобы это уравненіе сдѣлать однороднымъ (§ 292), замѣнимъ p и q черезъ $\frac{p}{r}$ и $\frac{q}{r}$; тогда оно будетъ имѣть видъ

(20) $$p\varphi'_p{}' + q\varphi'_q{}' + r\varphi'_r{}' = 0.$$

309. Замѣтимъ, что отысканіе огибающей движущейся прямой можно привести къ теоріи взаимныхъ поляръ. Дѣйствительно, эта огибающая кривая S есть взаимная полярная кривая кривой S′, описанной полюсомъ прямой относительно даннаго коническаго сѣченія. Если за управляющую кривую возьмемъ кругъ $x^2 + y^2 - 1 = 0$, то прямая $x_1 x + y_1 y - 1 = 0$, которая есть поляра точки (x_1, y_1) совпадаетъ съ движущейся прямой (14), если сдѣлаемъ $x_1 = p$, $y_1 = q$; такимъ образомъ кривая S′ относительно линейныхъ координатъ выражается уравненіемъ $\varphi(x_1, y_1) = 0$.

Примѣръ 1. Найти огибающую такой прямой, чтобы произведеніе разстояній ея отъ двухъ данныхъ точекъ F и F′ было равно данной величинѣ. Взявъ прямую FF′ за ось x-овъ, а перпендикуляръ, проведенный къ срединѣ этой прямой, за ось y-овъ, означивъ черезъ $2c$ разстояніе FF′, черезъ b^2 постоянное произведеніе, и выразивъ движущуюся прямую уравненіемъ вида $px + qy - 1 = 0$, получимъ соотношеніе между двумя перемѣнными параметрами p и q

$$(c^2 \pm b^2)\,p^2 \pm b^2 q^2 - 1 = 0;$$

знакъ + или — надо брать, смотря по тому, лежатъ ли обѣ точки по одной сторонѣ прямой или по обѣимъ ея сторонамъ. Такъ какъ кривая C′ выражается уравненіемъ

$$(c^2 \pm b^2)\,x_1{}^2 \pm b^2 y'^2 - 1 = 0,$$

то уравненіе искомой кривой C или взаимной поляры (§ 300) будетъ

$$\frac{x^2}{c^2 \pm b^2} + \frac{y^2}{\pm b^2} - 1 = 0.$$

Это есть эллипсъ или гипербола, точки F и F′ которыхъ суть фокусы. Эта теорема есть обратная теоремѣ, доказанной въ § 259.

Примѣръ II. Данъ четыреугольникъ *abcd*; найти огибающую такой прямой, чтобы отношеніе произведенія ея разстояній двухъ противоположныхъ вершинъ къ произведенію ея разстояній отъ двухъ другихъ вершинъ была величина постоянная. Назовемъ черезъ x_1 и y_1, x_2 и y_2, x_3 и y_3, x_4 и y_4 координаты четырехъ вершинъ и движущуюся прямую выразимъ уравненіемъ $px+qy-1=0$; тогда между двумя параметрами p и q получимъ соотношеніе

$$(px_1+qy_1-1)(px_3+qy_3-1)-k^2(px_2+qy_2-1)(px_4+qy_4-1)=0;$$

такъ какъ это соотношеніе второй степени, то заключаемъ, что огибающая есть кривая втораго класса или втораго порядка. Предъидущее уравненіе удовлетворяется тогда, когда движущаяся прямая совпадаетъ съ одной изъ сторонъ четыреугольника, потому что въ каждомъ членѣ множитель обращается въ нуль. Такимъ образомъ кривая вписана въ четыреугольникъ, а отношенію k можно дать такую величину, чтобы кривая была касательною къ какой-нибудь пятой прямой. Отсюда слѣдуетъ общее свойство коническихъ сѣченій: *четыреугольникъ, описанный около коническаго сѣченія; произведеніе разстояній какой-нибудь касательной отъ двухъ противуположныхъ вершинъ четыреугольника находится съ произведеніемъ разстояній этой же касательной отъ двухъ другихъ вершинъ въ постоянномъ отношеніи.*

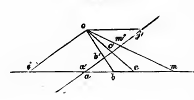
ГЛАВА XI.

Общія свойства коническихъ сѣченій.

Гомографическія системы.

310. Когда на двухъ прямыхъ мы имѣемъ двѣ системы точекъ, связанныхъ между собою алгебраически, такъ что одной точкѣ каждой системы соотвѣтствуетъ только одна точка другой, тогда говорятъ, что обѣ системы точекъ суть *гомографическія*. Если черезъ x и x' назовемъ разстоянія двухъ данныхъ точекъ, взятыхъ на прямыхъ, отъ двухъ соотвѣтствующихъ точекъ, то алгебраическое соотношеніе, которое по предположенію существуетъ между x и x' и которое должно быть первой степени относительно каждаго изъ этихъ двухъ перемѣнныхъ, будетъ необходимо вида

Фиг. 181.



$$x'x+Ax+A'x'+B=0, \tag{1}$$

Оно содержитъ три произвольные коеффиціента A, A′, B; слѣдовательно, тремъ точкамъ, взятымъ произвольно на первой прямой, можно найти соотвѣтствующія три точки, взятыя произвольно на второй прямой, и такимъ образомъ опредѣлится способъ гомографическаго дѣленія.

Если разстоянія на первой прямой будемъ считать отъ точки i, соотвѣтствующей безконечности второй, а на второй прямой отъ точки j, соотвѣтствующей безконечности на первой, то предъидущее соотношеніе упростится и будетъ

(2) $$xx' + \mathrm{B} = 0.$$

Очевидно, что пукъ прямыхъ, проходящихъ черезъ одну и ту же точку, опредѣляетъ на двухъ какихъ-нибудь сѣкущихъ двѣ системы гомографическихъ точекъ; дѣйствительно, по свойству вопроса соотношеніе между соотвѣтственными точками есть алгебраическое, и одной точкѣ одной изъ сѣкущихъ соотвѣтствуетъ одна точка другой.

Этимъ свойствомъ можно воспользоваться для построенія соотвѣтственныхъ точекъ, когда способъ гомографическаго дѣленія на двухъ прямыхъ опредѣляется тремя парами соотвѣтственныхъ точекъ (a, a'), (b, b'), (c, c'). Вторую линію перемѣщаемъ такъ, чтобы она совпала съ точками a и a' (*фиг.* 181); тогда прямыя bb', cc' пересѣкутся въ одной точкѣ o; и прямая, которая соединяетъ точку o съ какою-нибудь точкою m первой прямой, опредѣлитъ соотвѣтственную точку m' на второй прямой. Линія oj', параллельная первой прямой, опредѣлитъ точку j' второй прямой соотвѣтственную безконечности первой; точно также линія oi, параллельная второй прямой, опредѣлитъ точку i первой прямой, соотвѣтствующую безконечности второй.

311. Когда имѣемъ два пука прямыхъ, изъ которыхъ однѣ проходятъ черезъ точку o, другія черезъ точку o', и эти прямыя связаны алгебраически такъ, что одной прямой каждаго пучка соотвѣтствуетъ только одна прямая другаго пучка, тогда говорятъ, что оба пучка *гомографическіе*.

Очевидно, что если двѣ опредѣленныя точки o и o' соединимъ съ однѣми и тѣми же точками прямой или съ соотвѣтственными точками двухъ гомографическихъ дѣленій на двухъ различныхъ прямыхъ, то составимъ два гомографическихъ пучка; потому что по свойству вопроса соотношеніе есть алгебраическое, и одной прямой соотвѣтствуетъ только одна прямая.

Обратно, два гомографическіе пучка опредѣляютъ на двухъ какихъ-нибудь прямыхъ двѣ системы гомографическихъ точекъ.

312. Если имѣемъ на двухъ различныхъ прямыхъ двѣ системы гомографическихъ точекъ, и если эти двѣ прямыя положимъ одна на другую, то на одной и той же прямой получимъ двѣ системы гомографическихъ точекъ. Если способъ дѣленія опредѣляется тремя парами сходственныхъ точекъ (a, a'), (b, b'), (c, c'), то чтобы построить двѣ какія-нибудь сходственныя точки, вообразимъ, что прямая раздѣлена пополамъ, точку a' приводятъ въ точкѣ a, поворотивъ вторую прямую на извѣстный уголъ къ первой, и потомъ окончимъ построеніемъ, какъ показано на фигурѣ 181.

Если на одной и той же прямой мы имѣемъ двѣ системы гомографическихъ точекъ, то на прямой будутъ двѣ двойныя точки, т. е. двѣ такія, что каждая изъ нихъ, разсматриваемая, какъ принадлежащая къ одной изъ системъ, сливается съ своею сходственною въ другой системѣ. Дѣйствительно, если разстоянія на прямой будемъ считать отъ одной и той же точки и если сдѣлаемъ $x' = x$, то, по уравненію (1), получимъ уравненіе второй степени.

(3) $$x^2 + (A + A')\,x + B = 0,$$

каждый корень котораго опредѣляетъ двойную точку. Обѣ двойныя точки будутъ дѣйствительныя или мнимыя.

При $x = \infty$, уравненіе (1) даетъ $x' = -A$; при $x' = \infty$, оно даетъ $x = -A'$. Положимъ, что мы построили, какъ было показано, двѣ точки i и j', сходственныя безконечности; если разстоянія будемъ считать отъ точки c, средины ij', то такъ какъ величина x' и x, соотвѣтствующія безконечности, должны быть равны и имѣть обратные знаки, получимъ $A + A' = 0$, и уравненіе (1) обратится въ

(4) $$xx' + A\,(x - x') + B = 0.$$

Уравненіе (3), которое опредѣляетъ двойныя точки, приводится къ

(5) $$x^2 + B = 0.$$

Назовемъ черезъ c' точку второй системы, сходственную точкѣ c первой; такъ какъ уравненіе (4) должно удовлетворяться при $x = 0$ и $x' = cc'$, то получимъ $B = A.\,cc' = -\,cj'.\,cc'$, и уравненіе (5) будетъ имѣть видъ

(6) $$x^2 = cj'.\,cc'.$$

Двойныя точки будутъ дѣйствительными тогда, когда линіи cj' и cc'

откладываются по одному направленію. Чтобы построить ихъ въ этомъ случаѣ, опишемъ кругъ на $c'j'$, какъ на діаметрѣ (*фиг.* 182); изъ точки c проводимъ касательную; отложивъ касательную на прямой, получимъ двѣ двойныя точки e и f, которыя находятся на равномъ разстояніи отъ точки c.

Фиг. 182.

313. Два гомографическіе пучка, имѣющіе одну и ту же вершину, имѣютъ точно также двѣ двойныя прямыя, дѣйствительныя или мнимыя; мы ихъ получимъ, соединивъ вершину съ двумя двойными точками гомографическаго дѣленія, опредѣляемаго пучкомъ на какой-нибудь сѣкущей.

Если постоянный уголъ будемъ поворачивать около его вершины, то обѣ стороны образуютъ два гомографическіе пучка около одной и той же точки; различныя положенія одной изъ сторонъ составляютъ первый пучекъ; различныя положенія второй стороны составляютъ второй пучекъ. Очевидно, что двѣ двойныя прямыя будутъ мнимыя, и замѣчательно то, что онѣ не зависятъ отъ величины угла. Дѣйствительно, проведемъ какую-нибудь сѣкущую и изъ вершины опустимъ перпендикуляръ oc на сѣкущую (*фиг.* 183); оба положенія $a'oi$, $jo'a$, въ которыхъ одна изъ сторонъ параллельна сѣкущей, даютъ двѣ точки i и j'; положеніе $c'oc$ даетъ точку c', сходственную точкѣ c. Углы $c'oc$, $j'oa$ равны, потому что уголъ $c'oj'$ есть прямой; поэтому получимъ $cj' \cdot cc' = -oc^2$, и уравненіе (6) будетъ $x^2 = -oc^2$; откуда $x = \pm oc.i$. Такимъ образомъ, положеніе двойныхъ точекъ на сѣкущей и, слѣдовательно, положеніе двойныхъ прямыхъ не зависитъ отъ величины угла. Если за начало координатъ возьмемъ точку o, за ось x прямую oc, за ось y-овъ oa, то двойныя прямыя будутъ имѣть уравненіемъ $\frac{y}{x} = \pm i$; вмѣстѣ онѣ выразятся уравненіемъ $x^2 + y^2 = 0$; это суть асимптоты круга $x^2 + y^2 = r^2$, описаннаго изъ точки o, какъ центра.

Фиг. 183.

Обратно, если двойныя точки двухъ системъ гомографическихъ точекъ на одной и той же прямой будутъ мнимыя, то обѣ эти системы точекъ можно найти, обращая постоянный уголъ около его вершины. Такъ какъ точка c есть средина ij', то образъ дѣленія опредѣляется тремя парами точекъ (c, c'), (i, ∞), (∞, j'); перпендикуляръ co къ прямой пересѣкаетъ кругъ, описанный на линіи $c'j'$, какъ на діаметрѣ, въ точкѣ o; уголъ $c'oc$, обращаясь около точки o, опредѣлитъ данное гомографическое дѣленіе.

Сліяніе.

314. Разсмотримъ двѣ системы гомографическихъ точекъ на одной и той же прямой и положимъ, что двѣ соотвѣтствующія точки a и a' будутъ взаимныя точки, т. е. если точкѣ a первой системы будетъ соотвѣтствовать точка a' во второй, то, обратно, точкѣ a', которую разсматриваемъ, какъ принадлежащую первой системѣ, будетъ соотвѣтствовать точка a во второй. Необходимо, чтобы уравненіе (1) удовлетворялось также и въ томъ случаѣ, когда переставимъ частныя величины x и x', относящіяся къ этимъ двумъ точкамъ, а для этого необходимо, чтобы $\mathrm{A} = \mathrm{A}'$; но тогда всѣ соотвѣтственныя точки будутъ взаимны по двѣ, и въ этомъ случаѣ говорятъ, что точки находятся въ сліяніи.

Такъ какъ уравненіе

$$xx' + \mathrm{A}(x + x') + \mathrm{B} = 0 \tag{7}$$

содержитъ только два произвольные коеффиціента A и B, то для опредѣленія сліянія достаточно двухъ паръ *сопряженныхъ* точекъ (a, a'), (b, b'). Обѣ точки i и j сливаются, и если разстоянія будемъ отсчитывать отъ этой точки i, то уравненіе (7) обратится въ

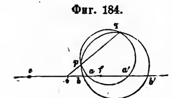
$$xx' + \mathrm{B} = 0; \tag{8}$$

эта точка называется *центромъ* сліянія. Есть двѣ двойныя точки e и f, дѣйствительныя или мнимыя, опредѣленныя уравненіемъ $x^2 + \mathrm{B} = 0$.

Такимъ образомъ, уравненіе (8) будетъ $xx' = ie^2$; отсюда заключаемъ, что двѣ двойныя точки e и f суть гармоническія сопряженныя относительно двухъ какихъ-нибудь сопряженныхъ точекъ.

Круги, проведенные черезъ двѣ данныя точки p и q, опредѣляютъ на прямой сліяніе (*фиг.* 184). Возьмемъ на прямой какую-нибудь точку a; черезъ эту точку и двѣ точки p и q проходитъ только одна окружность круга. Эта окружность пересѣкаетъ прямую во второй точкѣ a'; такимъ образомъ точкѣ a будетъ соотвѣтствовать только одна точка a'; сверхъ того соотношеніе есть алгебраическое и существуетъ обратность; слѣдовательно, эти пары точекъ составляютъ сліяніе. Точка i, въ которой прямая pq пересѣкаетъ

Фиг. 184.



данную прямую, есть центръ сліянія; а двойныя точки суть точки прикосновенія касательныхъ круговъ.

Двойныя точки будутъ дѣйствительныя или мнимыя, смотря по тому, будетъ ли точка i находиться внѣ точекъ a и a, или между ними. Въ первомъ случаѣ двойныя точки мы получимъ, проведя изъ точки i касательную къ одному изъ круговъ и отложивъ эту касательную.

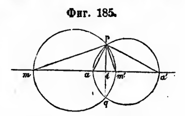
Если препятствіе опредѣляется на прямой помощію двухъ паръ сопряженныхъ точекъ (a, a'), (b, b'), то легко можно построить двѣ какія-нибудь сопряженныя точки. Черезъ двѣ точки a и a' проведемъ кругъ; черезъ двѣ точки b, b' и произвольную точку p на первомъ кругѣ проведемъ второй кругъ; эти два круга пересѣкутся во второй точкѣ q; кругъ, проходящій черезъ двѣ точки p и q и точку m прямой, опредѣлитъ сопряженную точку m'.

315. Разсмотримъ точно также два гомографическіе пучка, имѣющіе одну и ту же вершину, такіе, что двѣ соотвѣтствующія прямыя были бы взаимныя; эти прямыя опредѣляютъ на какой-нибудь сѣкущей точки въ сліяніи; слѣдовательно, всѣ сходственныя прямыя суть взаимныя по двѣ, и говорятъ, что прямыя находятся въ сліяніи. Есть двѣ двойныя прямыя дѣйствительныя или мнимыя; но нѣтъ ничего аналогичнаго съ центромъ сліянія.

Мы сказали (§ 313), что, когда постоянный уголъ вращается около его вершины, двѣ стороны образуютъ два гомографическіе пучка. Если уголъ будетъ прямой, то будетъ взаимность, и слѣдовательно, будетъ сліяніе; двойныя прямыя, какъ мы замѣтили, суть асимптоты круга.

Обратно, если на прямой двойныя точки сліянія будутъ мнимыя, то пары сопряженныхъ точекъ можно найти, обращая прямой уголъ около его вершины. Сліяніе опредѣляется двумя парами сопряженныхъ точекъ (i, ∞), (a, a'); на aa', какъ на діаметрѣ, опишемъ кругъ (*фиг.* 185) и изъ точки i возставимъ на прямую перпендикуляръ, который пересѣчетъ кругъ въ двухъ точкахъ p и q; кругъ, проходящій черезъ точки p и q, опредѣлитъ двѣ сопряженныя точки m и m', а уголъ mpm' будетъ прямой.

Фиг. 185.

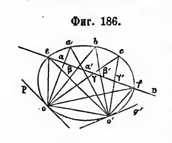


Теорема I.

316. *Даны два гомографическіе пучка; геометрическое мѣсто точки пересѣченія двухъ соотвѣтственныхъ прямыхъ есть коническое сѣченіе, проходящее черезъ вершины двухъ пучковъ.*

Опредѣлимъ, сколько точекъ геометрическаго мѣста находится на какой-нибудь прямой D; два гомографическіе пучка o и o' (*фиг.* 186) опредѣляютъ на этой прямой двѣ системы гомографическихъ точекъ (α, α'), (β, β'), (γ, γ'),....; двѣ соотвѣтственныя прямыя oe, $o'e$, которыя пересѣкаются на прямой D, опредѣляютъ двойную точку e; такъ какъ на прямой D находятся только двѣ двойныя точки e и f, то заключаемъ, что эта прямая пересѣкаетъ геометрическое мѣсто только въ двухъ дѣйствительныхъ или мнимыхъ точкахъ; слѣдовательно, геометрическое мѣсто есть втораго порядка.

Фиг. 186.



Прямой $o'o$ втораго пучка соотвѣтствуетъ извѣстная прямая op въ первомъ пучкѣ; точка пересѣченія приходитъ въ o, а прямая op будетъ касаться этой точки. Точно также кривая проходитъ черезъ точку o' и будетъ касаться въ этой точкѣ прямой $o'q'$ втораго пучка, соотвѣтственнаго прямой oo' перваго пучка.

Примѣчаніе. Посредствомъ этого мы можемъ найти точки, въ которыхъ данная прямая D пересѣкаетъ коническое сѣченіе, опредѣляемое пятью точками o, o', a, b, c; если двѣ точки o и o' соединимъ съ тремя другими, то получимъ три пары прямыхъ $(oa, o'a)$, $(ob, o'b)$, $(oc, o'c)$, опредѣляющія два гомографическіе пучка o и o'; геометрическое мѣсто точки пересѣченія соотвѣтственныхъ прямыхъ есть коническое сѣченіе, проходящее черезъ пять данныхъ точекъ; три пары точекъ (α, α'), (β, β'), (γ, γ') опредѣляютъ гомографическое дѣленіе на прямой D; двѣ двойныя точки e и f найдемъ по способу, изложенному въ § 312.

Если прямая проходитъ черезъ одну изъ данныхъ точекъ, напримѣръ, черезъ o, то достаточно построить соотвѣтственную прямую во второмъ пучкѣ. Точно также, какъ мы уже сказали, получимъ касательную въ o, проведя прямую op перваго пучка, соотвѣтственнаго прямой $o'o$ втораго пучка. Такимъ образомъ опредѣлимъ столько точекъ искомаго коническаго сѣченія, сколько пожелаемъ, и столько же касательныхъ.

Замѣчаніе. Если прямая oo', проходящая черезъ вершины, будетъ соотвѣтствовать самой себѣ въ двухъ пучкахъ, то, очевидно, она будетъ составлять часть геометрическаго мѣста, которое тогда будетъ состоять изъ двухъ прямыхъ; въ этомъ случаѣ геометрическое мѣсто точки пересѣченія соотвѣтственныхъ прямыхъ, собственно говоря, будетъ прямая линія.

Теорема II.

317. *Даны двѣ системы гомографическихъ точекъ на двухъ опредѣленныхъ прямыхъ* A *и* A'; *прямая* aa', *соединяющая двѣ какія-нибудь соотвѣтственныя точки, огибаетъ коническое сѣченіе, которое касается двухъ опредѣленныхъ прямыхъ.*

Найдемъ, сколько касательныхъ, проведенныхъ къ огибающей, проходятъ черезъ произвольную точку p плоскости (*фиг.* 187); прямыя pa, pa', соединяющія точку p съ двумя соотвѣтственными точками, образуютъ около точки p два гомографическіе пучка; если движущаяся прямая aa' въ одномъ изъ ея положеній mm' проходитъ черезъ точку p, то она будетъ двойною прямою двухъ пучковъ; такъ какъ существуютъ только двѣ двойныя прямыя pm, pn, то отсюда заключаемъ, что черезъ точку p можно провести къ огибающей кривой только двѣ дѣйствительныя или мнимыя касательныя; слѣдовательно, эта кривая есть втораго класса и, слѣдовательно, втораго порядка.

Фиг. 187.

Точкѣ пересѣченія o двухъ опредѣленныхъ прямыхъ A и A', которая, положимъ, принадлежитъ второй прямой, соотвѣтствуетъ на первой прямой точка h; когда движущаяся прямая приходитъ въ oh, кривая будетъ касаться прямой A въ точкѣ h. Точно также кривая будетъ касаться прямой A' въ точкѣ g' этой прямой, соотвѣтственной точкѣ o прямой A.

Примѣчаніе. Помощію этого мы можемъ провести черезъ данную точку p касательныя къ коническому сѣченію, опредѣляемому пятью касательными; если точку p соединимъ съ точками, въ которыхъ обѣ каса-

тельныя A и A′ пересѣкаются тремя другими B, C, D, то получимъ три пары прямыхъ, опредѣляющихъ два гомографическіе пучка, двойныя прямыя которыхъ суть искомыя касательныя.

Если точка p будетъ находиться на одной изъ данныхъ касательныхъ, напримѣръ, на A, то точки, въ которыхъ касательныя A и A′ пересѣкаются тремя другими B, C, D, опредѣлятъ на этихъ двухъ первыхъ касательныхъ двѣ системы гомографическихъ точекъ; потомъ на прямой A′ ищемъ точку p', соотвѣтственную точкѣ p на A; прямая pp' будетъ касательная къ коническому сѣченію.

Точка прикосновенія касательной A есть, какъ мы сказали, точка этой прямой, соотвѣтственная точкѣ o на A′.

Замѣчаніе. Эту теорему можно бы было вывести изъ предъидущей посредствомъ взаимныхъ поляръ. Двѣ системы точекъ, находящихся на двухъ опредѣленныхъ прямыхъ, преобразовываются въ другой фигурѣ въ два пучка прямыхъ, проходящихъ черезъ двѣ опредѣленныя точки; если одной точкѣ соотвѣтствуетъ только одна точка, то одной прямой будетъ соотвѣтствовать только одна прямая; слѣдовательно, обѣ системы гомографическихъ точекъ перемѣнятся въ два гомографическіе пучка, и наоборотъ. Такъ какъ геометрическое мѣсто точки пересѣченія двухъ соотвѣтственныхъ прямыхъ есть коническое сѣченіе, то огибающая прямой, которая соединяетъ двѣ соотвѣтственныя точки, есть также коническое сѣченіе.

Если точка пересѣченія o двухъ опредѣленныхъ прямыхъ будетъ соотвѣтствовать самой себѣ на двухъ прямыхъ, то прямая вершинъ будетъ соотвѣтствовать самой себѣ въ двухъ пучкахъ; такъ какъ въ этомъ случаѣ геометрическое мѣсто будетъ прямая, то огибающая обратится въ точку; слѣдовательно, всѣ прямыя, какъ oa', проходятъ черезъ одну и ту же точку.

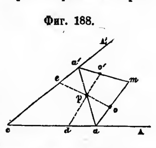
318. Изъ двухъ предъидущихъ теоремъ вытекаютъ замѣчательныя свойства. Разсмотримъ изъ нихъ нѣкоторыя. Если, напримѣръ, два постоянные угла обращаются около своихъ вершинъ такъ, что точка пересѣченія двухъ сторонъ описываетъ опредѣленную прямую, то ясно изъ самаго построенія, что двѣ другія стороны составятъ два гомографическіе пучка, и слѣдовательно, геометрическое мѣсто точки ихъ пересѣченія будетъ коническое сѣченіе, проходящее черезъ двѣ неподвижныя вершины.

Точно также, если на двухъ опредѣленныхъ прямыхъ отъ точекъ, въ которыхъ онѣ пересѣкаются движущеюся сѣкущею, проведенною черезъ опредѣленную точку, отложимъ въ опредѣленномъ направленіи двѣ линіи постоянной длины, то очевидно, что концы этихъ линій образуютъ двѣ

системы гомографическихъ точекъ, и слѣдовательно, прямая, которая ихъ соединяетъ, будетъ огибающею коническаго сѣченія, касающагося двухъ неподвижныхъ прямыхъ.

Разсмотримъ движущійся треугольникъ maa', три стороны котораго вращаются около трехъ неподвижныхъ точекъ o, o', p (*фиг.* 188), а двѣ вершины a и a' перемѣщаются по двумъ неподвижнымъ прямымъ A и A′; тогда двѣ прямыя oa, $o'a'$ составятъ два гомографическіе пучка; потому что соотношеніе есть алгебраическое, и одной прямой oa одного пучка соотвѣтствуетъ только одна прямая $o'a'$ другаго пучка; слѣдовательно, геометрическое мѣсто третьей вершины m есть коническое сѣченіе, проходящее черезъ двѣ точки o и o'. Легко видѣть, что точка пересѣченія c прямыхъ A и A′ и двѣ точки d и e, въ которыхъ эти прямыя пересѣкаются прямыми po' и po, принадлежатъ геометрическому мѣсту; такимъ образомъ коническое сѣченіе опредѣляется пятью точками.

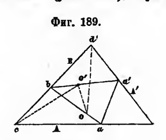
Фиг. 188.



Когда три неподвижныя точки o, o', p будутъ находиться на прямой линіи, то прямая oo' будетъ соотвѣтствовать самой себѣ въ двухъ пучкахъ, а геометрическое мѣсто вершины m будетъ прямая линія; это есть задача, которая была изложена въ § 104.

Разсмотримъ также движущійся треугольникъ aba' (*фиг.* 189), три вершины котораго перемѣщаются по тремъ неподвижнымъ прямымъ A, A′, B, а двѣ стороны ba, ba' вращаются около двухъ неподвижныхъ точекъ o и o'; обѣ точки a и a' образуютъ на прямыхъ A и A′ двѣ гомографическія системы; дѣйствительно, по свойству вопроса, соотношеніе есть алгебраическое, и точкѣ a соотвѣтствуетъ только одна точка a'; слѣдовательно, третья сторона aa' огибаетъ коническое сѣченіе, касающееся двухъ прямыхъ A и A′. Легко увидимъ, что прямая oo' и двѣ прямыя $o'c$ и od, соединяющія точки o и o' съ точками, въ которыхъ прямая B пересѣкаетъ прямыя A и A′, касаются коническаго сѣченія; такимъ образомъ, коническое сѣченіе опредѣлится пятью касательными. Если три прямыя A, A′, B проходятъ черезъ одну и ту же точку, то точка пересѣченія прямыхъ A и A′ будетъ соотвѣтствовать самой себѣ, а огибающая

Фиг. 189.



обратится въ точку; слѣдовательно, прямая aa' проходитъ черезъ неподвижную точку.

Теоремы I и II даютъ, какъ мы видѣли, способъ построить коническое сѣченіе, опредѣляемое пятью точками или пятью касательными; но слѣдующія теоремы даютъ болѣе простые способы построенія.

Теорема III.

319. *Если три коническія сѣченія имѣютъ двѣ общія точки, то три прямыя, соединяющія другія точки пересѣченія кривыхъ по двѣ, проходятъ черезъ одну и ту же точку.*

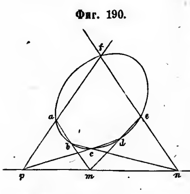
Пусть $S=0$ будетъ уравненіе одного изъ коническихъ сѣченій; $\alpha=0$ уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ общія точки; тогда уравненія двухъ другихъ коническихъ сѣченій будутъ вида $S-k\alpha\beta=0$, $S-k'\alpha\gamma=0$. Три прямыя, проходящія черезъ двѣ другія точки пересѣченія кривыхъ, разсматриваемыхъ по двѣ, суть $\beta=0$, $\gamma=0$, $k\beta-k'\gamma=0$; очевидно, что третья проходитъ черезъ точку пересѣченія двухъ первыхъ.

Теорема IV.

320. *Въ коническое сѣченіе вписанъ шестиугольникъ; точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ находятся на прямой линіи.*

Эта теорема, которая принадлежитъ *Паскалю*, есть слѣдствіе предъидущей теоремы. Пусть $abcdef$ (*фиг.* 190) будетъ шестиугольникъ, вписанный въ коническое сѣченіе; кривую и двѣ пары прямыхъ ab и cd, af и de можно разсматривать, какъ три коническія сѣченія, которыя имѣютъ двѣ общія точки a и d. Прямая bc соединяетъ двѣ другія точки b и c, въ которыхъ кривая пересѣкается съ двумя прямыми ab и cd; прямая ef соединяетъ двѣ другія точки e и f, въ которыхъ кривая пересѣкается съ двумя прямыми af и de; сверхъ того двѣ пары прямыхъ пересѣкаются въ точкахъ m и p; три прямыя bc, ef, mp проходятъ черезъ одну и ту же точку n; слѣдовательно, три точки пересѣченія m, n, p противоположныхъ сторонъ вписаннаго шестиугольника лежатъ на прямой линіи.

Фиг. 190.



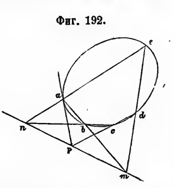
Эта теорема относится не только къ выпуклому, но также къ какому-нибудь шестиугольнику. Вписанный шестиугольникъ составимъ, проведя шесть послѣдовательныхъ хордъ въ томъ или другомъ направленіи такъ, чтобы наконецъ снова вернуться къ начальной точкѣ. Если стороны перенумеруемъ въ томъ порядкѣ, въ какомъ мы ихъ проводили, то уравненіе точки пересѣченія сторонъ (1, 4), (2, 5), (3, 6) будутъ лежать на прямой линіи (*фиг.* 191).

Фиг. 191.

231. *Примѣчаніе I.* Когда коническое сѣченіе опредѣляется пятью точками a, b, c, d, e, то, по предъидущей теоремѣ, можно построить столько точекъ кривой, сколько угодно. Черезъ точку a проводимъ какую-нибудь прямую af и отыскиваемъ точку f, въ которой эта прямая пересѣкаетъ кривую (*фиг.* 190); отмѣчаемъ точку пересѣченія m прямыхъ ab и de; точку пересѣченія p прямыхъ cd и af; прямая bc пересѣчетъ прямую mp въ точкѣ n; точка f, въ которой прямая ne пересѣкаетъ af, будетъ принадлежать кривой.

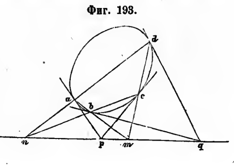
Можно также построить касательную въ одной изъ точекъ. Когда двѣ вершины вписаннаго шестиугольника, напримѣръ, a и f, сливаются, тогда промежуточная сторона af обратится въ касательную къ кривой въ точкѣ a; если приложимъ теорему вписаннаго шестиугольника, принимая эту касательную за сторону, то увидимъ также, что три точки находятся на прямой линіи. Отмѣчаемъ точку пересѣченія m сторонъ ab и de (*фиг.* 192), точку пересѣченія n сторонъ bc и ae; прямая cd пересѣчетъ прямую mn въ точкѣ p; и прямая ap будетъ касательная въ точкѣ a.

Фиг. 192.



Примѣчаніе II. Четыреугольникъ abcd *вписанъ въ коническое сѣченіе; точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ и точки пересѣченія касательныхъ въ противоположныхъ вершинахъ находятся на прямой линіи.* Если вписанный шестиугольникъ дополнимъ касательными, проведенными въ a и c, то получимъ три точки m, n, p на

Фиг. 193.



прямой линіи (*фиг.* 193). Дополнивъ шестиугольникъ касательными въ точкахъ b и d, получимъ также три точки m, n, q на прямой линіи. Слѣдовательно, четыре точки m, n, p, q находятся на прямой линіи.

Примѣчаніе III. Треугольникъ вписанъ въ коническое сѣченіе; точки пересѣченія сторонъ и касательныхъ, проведенныхъ въ противоположныхъ вершинахъ, лежатъ на одной прямой линіи. Потому что три касательныя дополняютъ вписанный шестиугольникъ.

322. *Замѣчаніе.* Мы видѣли, что черезъ пять точекъ a, b, c, d, e, изъ которыхъ три не лежатъ на одной прямой линіи, проходитъ коническое сѣченіе и притомъ только одно. Элементы этой кривой можно получить слѣдующимъ образомъ: опредѣляемъ сначала касательныя A, B, C въ трехъ данныхъ точкахъ a, b, c. Такъ какъ во всякой кривой втораго порядка касательныя, проведенныя къ концамъ хорды, пересѣкаются на діаметрѣ, сопряженномъ этой хордѣ, то, слѣдовательно, линія, которая соединяетъ точку пересѣченія p прямыхъ A и B съ срединою g прямой ab, есть діаметръ хордъ параллельныхъ ab; точно также линія, которая соединяетъ точку пересѣченія q прямыхъ B и C съ срединою h линіи bc, есть діаметръ хордъ параллельныхъ bc. Положимъ сперва, что два діаметра pg, qh пересѣкаются въ точкѣ o; въ этомъ случаѣ кривая будетъ кривая, имѣющая центръ, а центръ будетъ точка o. Прямая op и прямая ok, параллельная ab, составляютъ систему сопряженныхъ діаметровъ. Если черезъ a' назовемъ длину полудіаметра, имѣющаго направленіе по op, то получимъ $a' = \sqrt{op.og}$; точно также получимъ длину b' полудіаметра, имѣющаго направленіе по ok. Было показано (§§ 174 и 175), какимъ образомъ опредѣляются оси, когда извѣстна система сопряженныхъ діаметровъ a' и b'.

323. Если два діаметра будутъ параллельны, то кривая будетъ парабола. Въ этомъ случаѣ проводимъ діаметры, которые проходили бы черезъ a и b, потомъ проводимъ прямыя, составляющія съ касательными тѣ же углы, какъ съ діаметрами; эти двѣ прямыя пересѣкаются въ фокусѣ параболы. Опустивъ изъ фокуса перпендикуляры на касательныя A и B и продолживъ каждый изъ перпендикуляровъ на величину, равную имъ самимъ, получимъ двѣ точки директрисы. Если будутъ даны три точки и касательныя къ двумъ изъ этихъ точекъ, то касательную къ третьей точкѣ опредѣлимъ изъ свойства вписаннаго треугольника; потомъ поступаемъ, какъ прежде. Когда извѣстны двѣ касательныя къ кривой и точки прикосновенія, то, очевидно, можно употребить построеніе, какъ и въ параболѣ.

Положимъ наконецъ, что желаемъ найти элементы параболы, опредѣляемой четырьмя точками a, b, c, d. Если за оси координатъ возьмемъ двѣ прямыя ab, cd, то уравненія параболъ, проходящихъ черезъ данныя точки будутъ (§ 276).

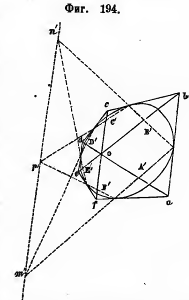
$$\frac{x^2}{ab}\pm\frac{2xy}{\sqrt{abcd}}+\frac{y^2}{cd}+\ldots=0.$$

Такъ какъ угловые коеффиціенты осей суть $\pm\sqrt{\frac{cd}{ab}}$, то отсюда заключаемъ, что эти оси параллельны діагоналямъ параллелограма, построеннаго на осяхъ координатъ, и стороны котораго равны среднимъ пропорціональнымъ между a и b, c и d. Зная направленіе оси, по теоремѣ вписаннаго пятиугольника, найдемъ касательную къ одной изъ точекъ, предполагая, что точка e неопредѣленно удаляется, т. е., что прямыя ae и de дѣлаются, напримѣръ, параллельными оси (*фиг.* 192). Опредѣливъ двѣ касательныя, придемъ къ предъидущему случаю.

Теорема V.

324. *Шестиугольникъ описанъ около коническаго сѣченія; три прямыя, которыя соединяютъ противоположныя вершины, проходятъ черезъ одну и ту же точку.*

Фиг. 194.

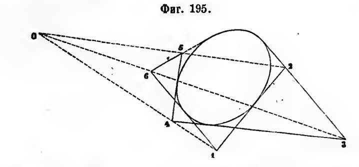


Эта теорема, извѣстная подъ именемъ теоремы *Бріаншона*, выводится изъ предъидущей посредствомъ взаимныхъ поляръ. Пусть $abcdef$ (*фиг.* 194) будетъ шестиугольникъ, описанный около коническаго сѣченія; вписанный шестиугольникъ, вершины котораго суть точки прикосновенія, есть относительная фигура описаннаго шестиугольника относительно даннаго коническаго сѣченія; потому что вершины a, b, c... описаннаго шестиугольника суть полюсы сторонъ A', B', C'... вписаннаго шестиугольника. Діагональ ad описаннаго шестиугольника есть поляра точки m', въ которой пересѣкаются противоположныя стороны A' и D' вписаннаго шестиугольника; точно также діагональ be есть поляра точки пересѣченія n' сто-

ронъ B′ и E′, а діагональ ef есть поляра точки пересѣченія p' сторонъ C′ и F′. Такъ какъ три точки m', n', p' находятся на прямой линіи, то три прямыя ad, be, ef проходятъ черезъ одну и ту же точку o, которая есть полюсъ этой прямой.

Здѣсь мы сдѣлаемъ замѣчаніе, подобное тому, какое мы сдѣлали о теоремѣ *Паскаля*. Нѣтъ никакой надобности, чтобы описанный шестиугольникъ былъ выпуклый, достаточно, чтобы онъ былъ сомкнутъ. Положимъ, что проведено шесть касательныхъ къ коническому сѣченію; чтобы составить шестиугольникъ, проходящій черезъ точку пересѣченія двухъ касательныхъ, подвигаемся впередъ на одной изъ нихъ до пересѣченія другой касательной; потомъ на этой второй касательной, въ томъ или другомъ направленіи, до пересѣченія третьей касательной, и такъ далѣе, такъ, чтобы возвратиться къ исходной точкѣ. Ломанная линія, составленная такимъ образомъ, будетъ описанный треугольникъ. Если вершины

Фиг. 195.



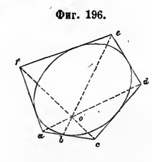
перенумеруемъ въ томъ порядкѣ, въ какомъ мы ихъ получили, то три діагонали, соединяющія вершины (1, 4), (2, 5), (3, 6) пройдутъ черезъ одну и ту же точку (*фиг.* 195).

Примѣчаніе. Когда коническое сѣченіе опредѣляется пятью касательными, тогда съ помощію предъидущей теоремы можно построить столько касательныхъ, сколько желаемъ. Пусть ab, bc, cd, de, ef (*фиг.* 183) будутъ пять касательныхъ; найдемъ вторую касательную, которая проходила бы черезъ точку a, взятую произвольно на одной изъ данныхъ касательныхъ. Возьмемъ точку пересѣченія o діагоналей ad и be; проводимъ прямую co и точку a соединяемъ съ точкою f, въ которой прямая co пересѣкаетъ касательную ef.

Можно также опредѣлить точку прикосновенія каждой касательной. Когда двѣ стороны описаннаго шестиугольника, напримѣръ, стороны ab и bc совпадаютъ, тогда промежуточная вершина b будетъ точкою прикос-

новенія; чтобы найти эту точку прикосновенія, соединимъ вершину e съ точкою пересѣченія o діагоналей ad и ef (*фиг.* 196).

Когда опредѣлены точки прикосновенія трехъ касательныхъ, тогда элементы кривой получимъ по способу, изложенному въ § 322.



Фиг. 196.

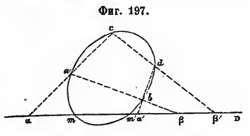
Изъ теоремы Бріаншона выводимъ слѣдующія примѣчанія: *четыреугольникъ описанъ около коническаго сѣченія; двѣ діагонали и двѣ прямыя, которыя соединяютъ точки прикосновенія противоположныхъ сторонъ, проходятъ черезъ одну и ту же точку.*

Треугольникъ описанъ около коническаго сѣченія; прямыя, соединяющія вершины съ точками прикосновенія противоположныхъ сторонъ, проходятъ черезъ одну и ту же точку. Въ первомъ случаѣ достаточно дополнить описанный шестиугольникъ точками прикосновенія двухъ противоположныхъ сторонъ; во второмъ случаѣ тремя точками прикосновенія.

Теорема VI.

325. *Коническія сѣченія, которыя проходятъ черезъ четыре неподвижныя точки, опредѣляютъ на прямой точки въ сліяніи.*

На прямой D возьмемъ какую-нибудь точку m (*фиг.* 197); черезъ эту точку и черезъ четыре данныя точки a, b, c, d можно провести только одно коническое сѣченіе; это коническое сѣченіе пересѣкаетъ прямую D во второй точкѣ m'; такимъ образомъ точкѣ m соотвѣтствуетъ только одна точка m'; сверхъ того соотношеніе есть алгебраическое и есть взаимность; слѣдовательно, пары точекъ (m, m') составляютъ сліяніе.



Фиг. 197.

Примѣчаніе. Двѣ системы прямыхъ (ac, bd) и (ab, cd), проходящихъ черезъ четыре точки, даютъ двѣ пары сопряженныхъ точекъ (α, α'), (β, β'), опредѣляющихъ сліянія.

Двойныя точки суть точки прикосновенія коническихъ сѣченій, проходящихъ черезъ четыре точки a, b, c, d и касающихся прямой D; такъ

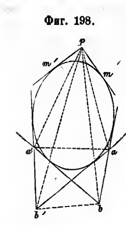
какъ существуютъ двѣ двойныя точки, то заключаемъ, *что есть два коническія сѣченія, дѣйствительныя или мнимыя, проходящія черезъ четыре данныя точки и касающіяся данной прямой.* Эти двойныя точки опредѣлимъ такъ, какъ говорили въ § 314, и тогда каждое изъ двухъ коническихъ сѣченій опредѣлится пятью точками.

Теорема VII.

326. *Касательныя, проведенныя изъ опредѣленной точки* p *къ коническимъ сѣченіямъ, касательнымъ къ четыремъ даннымъ прямымъ, находятся въ сліяніи.*

Эта теорема составляетъ соотношеніе предъидущей теоремы, которая принадлежитъ *Desargues*. Она доказывается точно такъ же; черезъ точку p проводимъ какую-нибудь прямую pm (*фиг.* 198); существуетъ только одно коническое сѣченіе, касающееся четырехъ данныхъ прямыхъ и прямой pm; проведемъ черезъ точку p вторую касательную pm' къ этому коническому сѣченію; такимъ образомъ прямой pm соотвѣтствуетъ только одна прямая pm'; сверхъ того соотношеніе есть алгебраическое и есть взаимность; слѣдовательно, эти касательныя составляютъ сліяніе.

Фиг. 198.



Примѣчаніе. Четыре данныя прямыя образуютъ четыреугольникъ; діагональ aa' можно разсматривать, какъ предѣлъ эллипса, касающагося четырехъ прямыхъ, и малая ось котораго обращается въ нуль. Касательныя, проведенныя изъ точки p къ этому эллипсу, который обратился въ его большую ось aa', суть pa и pa'. То же самое скажемъ относительно діагонали bb'. Таикмъ образомъ получаемъ двѣ пары сопряженныхъ прямыхъ (pa, pa'), (pb, pb'), опредѣляющія сліяніе.

Когда коническое сѣченіе проходитъ черезъ точку p, тогда двѣ касательныя pm, pm' совпадаютъ и образуютъ двойную прямую; такъ какъ въ сліяніи существуютъ двѣ двойныя прямыя, то заключаемъ, что *существуютъ два коническія сѣченія, дѣйствительныя или мнимыя, касающіяся четырехъ данныхъ прямыхъ и проходящія черезъ данную точку.* Проведя сѣкущую черезъ пучекъ и опредѣливъ на сѣкущей двойныя точки, получимъ двойныя прямыя, и каждое изъ двухъ коническихъ сѣченій опредѣлится пятью касательными.

Теорема VIII.

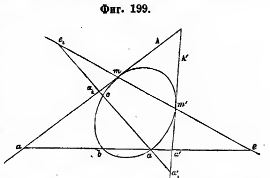
327. *Коническія сѣченія, касающіяся двухъ данныхъ прямыхъ въ двухъ данныхъ точкахъ, опредѣляютъ на какой-нибудь сѣкущей сліяніе, которой одна изъ двойныхъ точекъ находится на хордѣ прикосновеній.*

Эта теорема есть частный случай теоремы Desargues (§ 325). Положимъ, что точки a и c сливаются; точно также точки b и d (*фиг.* 197); тогда двѣ прямыя ac и bd будутъ касательными въ a и b; такъ какъ двѣ прямыя ab и cd совпадаютъ, то двѣ сопряженныя точки β и β' сольются въ одну изъ двойныхъ точекъ, къ которымъ принадлежатъ пары точекъ (m, m'), (α, α').

Примѣчаніе. Изъ этого мы находимъ способъ строить коническое сѣченіе, проходящее черезъ три данныя точки a, b, c и касающееся двухъ данныхъ прямыхъ A и A′ (*фиг.* 199).

На сѣкущей ab опредѣляемъ двѣ двойныя точки e и f перемѣщенія, опредѣляемаго двумя парами точекъ (a, b), (α, α'). На сѣкущей ac опредѣляемъ точно также двѣ двойныя точки e_1 и f_1 сліянія, опредѣляемаго двумя парами точекъ (a, c), (α_1, α_1'). Такъ какъ хорда прикосновеній должна проходить черезъ одну изъ двухъ точекъ e и f и черезъ одну изъ двухъ точекъ e_1 и f_1, то она совпадаетъ съ одной изъ четырехъ прямыхъ, которыя получимъ, соединивъ эти точки по двѣ всевозможнымъ образомъ. Мы докажемъ, что одна какая-нибудь изъ этихъ четырехъ прямыхъ, напримѣръ, ee_1, составляетъ рѣшеніе задачи: эта прямая ee_1 пересѣкаетъ двѣ данныя прямыя A и A′ въ двухъ точкахъ m и m'; можно провести *одно* коническое сѣченіе, проходящее черезъ точку a и касающееся прямыхъ A и A′ въ точкахъ m и m' (§ 278); такъ какъ это коническое сѣченіе должно пересѣкать сѣкущую $\alpha\alpha'$ во второй точкѣ, сопряженной точкѣ a въ сліяніи, опредѣляемомъ двойною точкою e и парою точекъ (α, α'), то оно пройдетъ черезъ точку b; точно также докажемъ, что она пройдетъ черезъ точку c. Такимъ обра-

Фиг. 199.



зомъ есть *четыре* коническія сѣченія, дѣйствительныя или мнимыя, проходящія черезъ три данныя точки и касающіяся двухъ данныхъ прямыхъ.

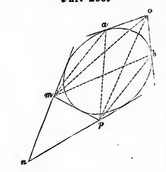
Теорема IX.

328. *Касательныя, проведенныя изъ опредѣленной точки къ различнымъ коническимъ сѣченіямъ, которыя касаются двухъ данныхъ прямыхъ въ двухъ данныхъ точкахъ, составляютъ сліяніе, двойная прямая котораго проходитъ черезъ точку пересѣченія двухъ данныхъ прямыхъ.*

Эта теорема есть частный случай теоремы VII. Положимъ, что двѣ касательныя ab и ab' совпадаютъ (*фиг.* 198); точно также $a'b$ и $a'b'$. Такъ какъ двѣ точки b и b' сливаются, то двѣ прямыя pb и pb' соединяются на одной изъ двойныхъ прямыхъ сліянія, которому принадлежатъ двѣ пары прямыхъ (pm, pm'), (pa, pa').

Примѣчаніе. Отсюда находимъ способъ строить коническое сѣченіе, проходящее черезъ двѣ данныя точки a и b и касающееся трехъ данныхъ прямыхъ mn, pm и pn (*фиг.* 200). Такъ какъ точка пересѣченія o касательныхъ въ a и b должна находиться на одной изъ двухъ двойныхъ прямыхъ сліянія, опредѣляемаго двумя парами прямыхъ (pa, pb), (pm, pn), и на одной изъ двухъ двойныхъ прямыхъ сліянія, опредѣляемаго двумя парами прямыхъ (ma, mb), (mn, mp), то она сольется съ одной изъ четырехъ точекъ пересѣченія этихъ двойныхъ прямыхъ по двѣ.

Фиг. 200.



Мы докажемъ, что какая-нибудь изъ этихъ четырехъ точекъ, напримѣръ точка o, составляетъ рѣшеніе задачи; можно описать *одно* коническое сѣченіе, касающееся двухъ прямыхъ oa и ob въ точкахъ a и b и прямой pm; такъ какъ вторая касательная, которую можно провести изъ точки p къ этому коническому сѣченію, должна быть сопряженною прямой pm въ сліяніи, опредѣляемаго двойною прямою po и парою прямыхъ (pa, pb), то она совпадаетъ съ pn; точно также докажемъ, что прямая mn есть касательная къ коническому сѣченію. Такимъ образомъ есть *четыре* коническія сѣченія, дѣйствительныя или мнимыя, проходящія черезъ двѣ данныя точки и касающіяся трехъ данныхъ прямыхъ.

329. *Замѣчаніе.* Мы сказали (§282), что фокусъ можно разсматривать какъ точку пересѣченія двухъ касательныхъ, параллельныхъ направленіямъ $+i$ и $-i$, т. е. параллельныхъ асимптотамъ круга; слѣдовательно, опредѣлить фокусъ, значитъ опредѣлить двѣ касательныя къ коническому сѣченію; такимъ образомъ между коническими сѣченіями, которыя имѣютъ данный фокусъ, есть *одно*, касающееся трехъ данныхъ прямыхъ (§ 262), *два* касающіяся двухъ данныхъ прямыхъ и проходящія черезъ данную точку; *четыре* касающіяся данной прямой и проходящія черезъ двѣ данныя точки, и, наконецъ, *четыре*, проходящія черезъ три данныя точки (§ 260).

Мы видѣли, какъ строится коническое сѣченіе, удовлетворяющее пяти элементарнымъ условіямъ, — точкамъ кривой или касательнымъ; для опредѣленія параболы достаточно четырехъ условій; поэтому вопросъ можно привести къ одному изъ предъидущихъ, сдѣлавъ преобразованія помощію взаимныхъ поляръ. Дѣйствительно, мы знаемъ (§ 301), что если центръ o управляющей кривой находится на коническомъ сѣченіи, то взаимная полярная кривая будетъ парабола, и наоборотъ, взаимная полярная кривая параболы есть коническое сѣченіе, проходящее черезъ центръ o управляющей кривой. Слѣдовательно, въ преобразованіи, условіе, чтобы искомая кривая была параболой, замѣнено точкою o, точки — прямыми, прямыя — точками. Такимъ образомъ построеніе параболы, касающейся четырехъ данныхъ прямыхъ, приводится къ построенію коническаго сѣченія, проходящаго черезъ данныя пять точекъ; слѣдовательно, будетъ только *одно* рѣшеніе. Точно также есть *двѣ* параболы, проходящія черезъ четыре данныя точки или проходящія черезъ одну точку и касающіяся трехъ данныхъ прямыхъ; *четыре* параболы, проходящія черезъ три точки и касающіяся одной прямой или проходящія черезъ двѣ точки и касающіяся двухъ данныхъ прямыхъ. Проведя касательную въ o къ взаимной полярной кривой и проведя сопряженный діаметръ въ управляющей кривой, получимъ направленіе діаметровъ параболы; поэтому мы можемъ приложить непосредственно къ даннымъ предъидущія теоремы.

330. Для изученія свойствъ системы коническихъ сѣченій, удовлетворяющихъ четыремъ даннымъ условіямъ, M. Chasles представилъ очень остроумный способъ; онъ показалъ, что эти свойства зависятъ отъ двухъ цѣлыхъ чиселъ, которыя онъ называетъ *характеристиками* системы; это суть числа коническихъ сѣченій системы, которыя проходятъ черезъ данную точку или которыя касаются данной прямой. Напримѣръ, двѣ характеристики системы коническихъ сѣченій, проходящихъ черезъ четыре

данныя точки, суть 1 и 2; характеристики системы коническихъ сѣченій, которыя касаются четырехъ данныхъ прямыхъ, суть 2 и 1; характеристики системы коническихъ сѣченій, которыя проходятъ через три точки и которыя касаются прямой, суть 2 и 4; характеристики системы коническихъ сѣченій, проходящихъ черезъ данную точку и касающихся трехъ прямыхъ, суть 4 и 2; наконецъ, характеристики системы коническихъ сѣченій, проходящихъ черезъ двѣ точки и касающихся двухъ прямыхъ, суть 4 и 4. Эти характеристики M. Chasles означаетъ буквами μ и ν.

Чтобы показать приложеніе этого способа, отыщемъ огибающую поляръ опредѣленной точки p относительно различныхъ коническихъ сѣченій системы, которая характеристиками имѣетъ μ и ν. Общее уравненіе коническихъ сѣченій, удовлетворяющихъ четыремъ даннымъ условіямъ, содержитъ только одинъ произвольный параметръ a; означимъ это коническое сѣченіе черезъ $f(x, y, a) = 0$. Параметръ a входитъ въ уравненіе въ степени μ; дѣйствительно, такъ какъ черезъ данную точку (x', y') проходятъ μ коническихъ сѣченій системы, то условное уравненіе $f(x', y', a) = 0$ должно дать μ величинъ для a. Уравненіе поляры точки p, координаты которой мы назовемъ черезъ x_1 и y_1, есть

$$xf'_{x_1} + yf'_{y_1} + zf'_{z_1} = 0;$$

такъ какъ параметръ a входитъ въ это уравненіе въ степени μ, то заключаемъ, что черезъ точку, взятую произвольно въ плоскости, проходятъ p поляръ. Слѣдовательно, огибающая поляръ есть кривая класса μ.

Найдемъ теперь геометрическое мѣсто полюсовъ опредѣленной прямой P относительно той же системы коническихъ сѣченій, характеристики которыхъ суть μ и ν. Если фигуру преобразуемъ по способу взаимныхъ поляръ, то данная система замѣнится другою, которая характеристиками имѣетъ ν и μ, а опредѣленная прямая P — опредѣленною точкою p; такъ какъ огибающая поляры точки p во второй системѣ есть класса ν, то геометрическое мѣсто полюса прямой P въ первой системѣ будетъ порядка ν.

Положимъ, что прямая P удаляется въ безконечность; тогда ея полюсъ сдѣлается центромъ коническаго сѣченія; такимъ образомъ геометрическое мѣсто центровъ коническаго сѣченія системы, которая характеристиками имѣетъ μ и ν, есть кривая порядка ν. Напримѣръ, геометрическое мѣсто центровъ коническихъ сѣченій, которыя касаются четырехъ данныхъ прямыхъ, есть прямая линія. Каждую діагональ четыреугольника, составленнаго изъ четырехъ прямыхъ, можно разсматривать какъ эл-

липсъ или гиперболу безконечно сжатые, касающіеся четырехъ прямыхъ; поэтому средины трехъ діагоналей принадлежатъ геометрическому мѣсту и опредѣляютъ эту прямую (§ 73).

Точно также геометрическое мѣсто центровъ коническихъ сѣченій, которыя проходятъ черезъ четыре данныя точки, есть коническое сѣченіе; центры трехъ паръ прямыхъ, проходящихъ черезъ четыре данныя точки, принадлежатъ геометрическому мѣсту.

Новыя координаты.

331. Проведемъ въ плоскости три прямыя, образующія треугольникъ ABC (*фиг.* 201), и для краткости означимъ эти прямыя черезъ $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, гдѣ α, β, γ суть многочлены первой степени относительно x и y. Положеніе какой-нибудь точки M плоскости опредѣляется пересѣченіемъ двухъ прямыхъ AM и BM, проходящихъ черезъ двѣ вершины треугольника ABC; эти двѣ прямыя выражаются уравненіями вида

Фиг. 201.

$$(1) \qquad \alpha = a\gamma, \quad \beta = b\gamma;$$

онѣ зависятъ отъ величинъ параметровъ a и b, которые будемъ разсматривать, какъ новыя координаты точки M.

Такъ какъ $a = \frac{\alpha}{\gamma}$; $b = \frac{\beta}{\gamma}$, то новыя координаты a и b суть раціональныя дроби первой степени относительно x и y, имѣющія одинъ и тотъ же знаменатель; рѣшивъ уравненія (1) относительно x и y, увидимъ, наоборотъ, что первоначальныя координаты x и y суть дроби того же вида относительно a и b. Отсюда слѣдуетъ, что всякое алгебраическое уравненіе и цѣлое относительно одной изъ системъ координатъ преобразовывается въ цѣлое уравненіе той же степени въ другой системѣ.

Хотя достаточно двухъ координатъ a и b, однако нужно, чтобы эти уравненія сдѣлать однородными, сохранить три буквы α, β, γ. Если въ уравненіи $f(a, b) = 0$ замѣнимъ a и b черезъ $\frac{\alpha}{\gamma}$ и $\frac{\beta}{\gamma}$, то получимъ дѣйствительно однородное уравненіе $f(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ той же степени. Такимъ образомъ, всякая прямая выражается однороднымъ уравненіемъ первой степени $A\alpha + B\beta + C\gamma = 0$, и точно также всякое коническое сѣченіе выражается уравненіемъ, однороднымъ второй степени

$$A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + B\beta\gamma + B'\gamma\alpha + B''\alpha\beta = 0.$$

Эти новыя координаты имѣютъ очень простое геометрическое значеніе. Такъ какъ буквы α, β, γ выражаютъ разстоянія точки M отъ трехъ сторонъ треугольника ABC, то обѣ координаты a и b означаютъ отношенія двухъ изъ этихъ разстояній къ третьему. Точно также можно было, если бы захотѣли, предположить, что α, β, γ выражаютъ разстоянія точки M отъ трехъ сторонъ треугольника, разстоянія, принимаемыя съ приличными знаками.

332. Общее уравненіе прямыхъ, проходящихъ черезъ данную точку (a', b'), есть

$$b - b' = m(a - a'),$$

гдѣ m есть произвольный параметръ.
Точно также уравненіе прямой, проходящей черезъ двѣ данныя точки (a', b'), (a'', b''), есть

$$b - b' = \frac{b'' - b'}{a'' - a'}(a - a).$$

Если положимъ, что эти двѣ точки будутъ двѣ сосѣднія точки кривой $f(a, b) = 0$, и что вторая точка безпредѣльно приближается къ первой, то увидимъ, что касательная въ этой точкѣ выразится уравненіемъ

$$b - b' = -\frac{f'_{a'}}{f'_{b'}}(a - a'),$$

или

$$af'_{a'} + bf'\,' - (a'f'_{a'} + b'f'_{b'}) = 0.$$

Если a и b замѣнимъ черезъ $\frac{\alpha}{\gamma}$ и $\frac{\beta}{\gamma}$; a' и b' черезъ $\frac{\alpha'}{\gamma'}$ и $\frac{\beta'}{\gamma'}$, отчего уравненіе сдѣлается однороднымъ, то уравненіе касательной будетъ имѣть видъ (§ 292)

$$\alpha f'_{\alpha'} + \beta f'_{\beta'} + \gamma f'_{\gamma'} = 0.$$

Если кривая будетъ втораго порядка, то предъидущее уравненіе не измѣнится, когда перемѣстимъ въ немъ буквы α и α', β и β', γ и γ'. Если α', β', γ' означаютъ координаты какой-нибудь точки плоскости, то хорда прикосновеній касательныхъ, проведенныхъ изъ этой точки, т. е. поляра этой точки относительно коническаго сѣченія, будетъ имѣть уравненіемъ

$$\alpha' f'_{\alpha} + \beta' f'_{\beta} + \gamma' f'_{\gamma} = 0, \quad \text{или} \quad \alpha f'_{\alpha'} + \beta f'_{\beta'} + \gamma f'_{\gamma'} = 0.$$

Эту систему координатъ мы употребляли нѣсколько разъ. Вотъ новыя приложенія.

333. *Примѣръ I.* Разсмотримъ два взаимные полярные треугольника относительно даннаго коническаго сѣченія. Для простоты возьмемъ стороны одного изъ треугольниковъ за отмѣченныя линіи, которыя служатъ къ опредѣленію новыхъ координатъ, и пусть

$$f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{2}(A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\gamma\alpha + 2B''\alpha\beta) = 0$$

будетъ уравненіе коническаго сѣченія. Поляра какой-нибудь точки $(\alpha', \beta', \gamma')$ имѣетъ уравненіемъ $\alpha' f'_\alpha + \beta' f'_\beta + \gamma' f'_\gamma = 0$. Въ частномъ случаѣ поляры трехъ вершинъ $(\beta' = 0, \gamma' = 0), (\gamma' = 0, \alpha' = 0), (\alpha' = 0, \beta' = 0)$ треугольника выражаются уравненіями

$$f'_\alpha = A\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0,\ f'_\beta = A'\beta + B\gamma + B''\alpha = 0;\ f'_\gamma = A''\gamma + B'\alpha + B\beta = 0.$$

Эти поляры суть стороны втораго треугольника. Координаты точки пересѣченія двухъ соотвѣтствующихъ сторонъ $\alpha = 0, f'_\alpha = 0$ удовлетворяютъ уравненіямъ $\alpha = 0$, $B'\beta + B'\gamma = 0$, или $\alpha = 0, \frac{\beta}{B'} + \frac{\gamma}{B''} = 0$; слѣдовательно, эта точка находится на прямой $\frac{\alpha}{B} + \frac{\beta}{B'} + \frac{\gamma}{B''} = 0$; то же самое найдемъ относительно двухъ другихъ. *Такимъ образомъ, три точки пересѣченія соотвѣтствующихъ сторонъ двухъ взаимныхъ полярныхъ треугольниковъ лежатъ на прямой линіи*

Вершина втораго треугольника опредѣляется двумя уравненіями $f'_\alpha = 0, f'_\beta = 0$, прямая $Bf'_\alpha = B'f'_\beta$ проходитъ черезъ эту вершину; такъ какъ уравненіе не содержитъ болѣе буквы γ, то эта прямая, очевидно, проходитъ черезъ вершину $(\alpha = 0, \beta = 0)$ перваго треугольника. Такъ какъ прямыя, которыя соединяютъ соотвѣтствующія вершины, выражаются уравненіями $Bf'_\alpha = B'f'_\beta = B''f'_\gamma$, то отсюда заключаемъ, *что эти три прямыя проходятъ черезъ одну и ту же точку.*

Фиг. 202.

334. *Примѣръ II.* Треугольникъ *abc* вписанъ въ коническое сѣченіе; двѣ стороны его *ab* и *ac* обращаются около двухъ опредѣленныхъ точекъ *p* и *q* (*фиг.* 202); найти огибающую третьей стороны *bc*. Пусть $\gamma = 0$ будетъ уравненіе прямой *pq*; а $\alpha = 0$, $\beta = 0$ уравненія касательныхъ въ точкахъ *d* и *e*, въ которыхъ эта прямая пересѣкаетъ кривую; тогда уравненіе коническаго сѣченія будетъ вида $\alpha\beta - \gamma^2 = 0$. Точки *p* и *q* можно разсматривать какъ точки пересѣченія прямой $\gamma = 0$ съ двумя прямыми $\alpha + p\beta = 0$, $\alpha + q\beta = 0$, которыя проходятъ черезъ точку пересѣченія *o* касательныхъ, проведенныхъ въ *d* и *e*. Какая-нибудь точка *a* кривой можетъ быть опредѣлена пересѣченіемъ двухъ прямыхъ $\alpha - a\gamma' = 0$, $\beta - \frac{\gamma}{a} = 0$, проходящихъ черезъ точки *d* и *e*, гдѣ *a* есть произвольный параметръ, который опредѣляетъ положеніе точки на кривой.

Давъ этому параметру другую величину b, получимъ другую точку b. Уравненіе какой-нибудь другой прямой, проходящей черезъ точку a, будетъ вида $\alpha - a\gamma + k\left(\beta - \frac{\gamma}{a}\right) = 0$; чтобы эта прямая проходила черезъ точку b, которая выражается двумя уравненіями $\alpha - b\gamma = 0$, $\beta - \frac{\gamma}{d} = 0$, надобно сдѣлать $k = ab$; такимъ обраомъ прямая, которая соединяетъ двѣ какія-нибудь точки a и b кривой, выражается уравненіемъ $\alpha + ab\beta - (a + b)\gamma = 0$.

Пусть a, b, c будутъ величины параметра для трехъ вершинъ a, b, c треугольника; такъ какъ сторона ab проходитъ черезъ точку p, то получимъ $ab = p$; такъ какъ сторона ac проходитъ черезъ точку q, то получимъ также $ac = q$; а уравненіе стороны bc будетъ $\alpha + bc\beta - (b + c)\gamma = 0$; если b и c замѣнимъ ихъ величинами $\frac{p}{a}$ и $\frac{q}{a}$, то уравненіе обратится въ

$$a^2\alpha + pq\beta - (p + q)a\gamma = 0.$$

Если изъ этого уравненія и уравненія

$$2a\alpha - (p + q)\gamma = 0,$$

которое получимъ, когда приравняемъ нулю производную, взятую по a, исключимъ перемѣнный параметръ a, то получимъ уравненіе огибающей прямой bc

$$\alpha\beta + \frac{(p + q)^2}{4pq}\gamma = 0;$$

Эта огибающая есть коническое сѣченіе, которое касается перваго въ точкахъ d и e.

Если къ данному коническому сѣченію проведемъ въ точкахъ a, b, c касательныя, то составимъ описанный треугольникъ $a'b'c'$, двѣ вершины котораго b' и c' перемѣщаются по двумъ опредѣленнымъ прямымъ P и Q, которыя есть поляры точекъ p и q; кривая, описанная вершиною a', т. е. полюсомъ прямой bc, есть взаимная поляра огибающей; слѣдовательно, это есть также коническое сѣченіе, вдвойнѣ касающееся первой по направленію линіи de.

ПРИМѢРЫ.

1. Даны въ плоскости два коническія сѣченія; точки, которыя имѣютъ однѣ и тѣ же поляры относительно двухъ кривыхъ, суть точки пересѣченія трехъ паръ общихъ сѣкущихъ, а эти общія поляры суть три діагонали четыреугольника, составленнаго четырьмя общими касательными, проведенными къ двумъ кривымъ.

2. Треугольникъ вписанъ въ коническое сѣченіе; двѣ стороны проходятъ черезъ двѣ опредѣленныя точки или наматываются на два коническія сѣченія, вдвойнѣ касательныя къ первой; огибающая третьей стороны есть коническое сѣченіе.

3. Многоугольникъ, имѣющій n сторонъ, вписанъ въ коническое сѣченіе; $n - 1$ сторонъ наматываются на два коническія сѣченія вдвойнѣ касательныя къ первой; доказать, что огибающая n-ой стороны есть коническое сѣченіе.

4. Даны два коническія сѣченія S и S' и двѣ касательныя, проведенныя къ коническому сѣченію S'; шесть прямыхъ, соединяющія по двѣ четыре точки, въ которыхъ эти касательныя пересѣкаютъ коническое сѣченіе S, суть по двѣ касательныя къ одному и тому же коническому сѣченію, проходящему черезъ точки пересѣченія коническихъ сѣченій S и S'.

5. Даны три коническія сѣченія, имѣющія четыре общія точки; доказать, что двѣ стороны треугольника, вписаннаго въ одно изъ нихъ, соотвѣтственно касаются двухъ другихъ, а третья сторона огибаетъ коническое сѣченіе.

6. Даны n коническихъ сѣченій, имѣющихъ четыре общія точки: доказать, что $n-1$ сторонъ многоугольника, имѣющаго n сторонъ, вписаннаго въ одно изъ коническихъ сѣченій, соотвѣтственно касаются другихъ, а n—ая сторона огибаетъ коническое сѣченіе.

7. Многоугольникъ, въ одномъ изъ своихъ положеній, вписанъ въ коническое сѣченіе и описанъ около другаго коническаго сѣченія; если вершины будемъ двигать по первому коническому сѣченію такъ, чтобы $n-1$ сторонъ касались втораго, то n—ая сторона будетъ постоянно касаться втораго коническаго сѣченія.

Въ теоремахъ 4, 5, 6 и 7 коническія сѣченія, которыя имѣютъ четыре общія точки, можно замѣнить подобными коническими сѣченіями, имѣющими двѣ общія точки, и въ частномъ случаѣ кругами, которые по два имѣютъ одну и ту же радикальную ось.

8. Огибающая прямыхъ, которыя пересѣкаютъ два данныя коническія сѣченія въ четырехъ точкахъ въ гармонической пропорціи, есть коническое сѣченіе.

9. Извѣстно, что поляры точки p относительно коническихъ сѣченій, имѣющихъ четыре общія точки, проходятъ черезъ одну и ту же точку q; если точка p будетъ описывать прямую, то точка q опишетъ коническое сѣченіе.

10. Когда двѣ стороны треугольника, вписаннаго въ коническое сѣченіе, наматываются по двумъ какимъ-нибудь даннымъ прямымъ, тогда третья сторона будетъ огибать третью кривую; доказать, что прямыя, соединяющія вершины треугольника съ точками прикосновенія противоположныхъ сторонъ, проходятъ черезъ одну и ту же точку.

11. Данъ шестиугольникъ, вписанный въ коническое сѣченіе; беремъ точки пересѣченія противоположныхъ сторонъ, потомъ точки пересѣченія каждой изъ трехъ діагоналей съ двумя противоположными сторонами; девять точекъ, полученныхъ такимъ образомъ, находятся на трехъ прямыхъ, проходящихъ черезъ одну и ту же точку.

12. Дано коническое сѣченіе S; проводимъ перемѣнное коническое сѣченіе S', которое пересѣкаетъ первое въ двухъ опредѣленныхъ точкахъ и которое касается двухъ опредѣленныхъ прямыхъ, точка пересѣченія которыхъ находится на коническомъ сѣченіи S; огибающая прямой, проходящей черезъ двѣ другія точки пересѣченія коническихъ сѣченій S и S', есть коническое сѣченіе.

13. Четыреугольникъ описанъ около коническаго сѣченія; если проведемъ какую-нибудь касательную къ коническому сѣченію, то извѣстно, что отношеніе произведенія разстояній этой касательной отъ двухъ противоположныхъ вершинъ четыреугольника къ произведенію разстояній этой же касательной отъ двухъ другихъ противоположныхъ вершинъ, есть величина постоянная; доказать, что это отношеніе равно произведенію разстояній двухъ первыхъ вершинъ отъ одного изъ фокусовъ, раздѣленному на произведеніе разстояній двухъ другихъ вершинъ отъ того же фокуса.

КНИГА ЧЕТВЕРТАЯ.

Общая теорія кривыхъ.

ГЛАВА I.

Построеніе кривыхъ въ прямолинейныхъ координатахъ.

335. Построить кривую, значитъ выразить графически путь дѣйствительной функціи одного перемѣннаго, когда это перемѣнное измѣняется непрерывно. Если вычислимъ величины y, соотвѣтствующія различнымъ величинамъ x, то получимъ извѣстное число точекъ для построенія кривой. Но такихъ точекъ недостаточно даже для грубаго очертанія кривой; потому что ихъ можно соединить различнымъ образомъ, и сверхъ того можетъ случиться, что между двумя даже очень близкими ординатами кривая будетъ имѣть безконечныя вѣтви. Слѣдовательно, необходимо знать напередъ вообще путь функціи, кривая которой должна представлять измѣненія.

Если уравненіе будетъ рѣшено относительно одного изъ перемѣнныхъ, напримѣръ y, то разсматриваемъ въ частности каждую величину y и разбираемъ между какими предѣлами должно измѣняться x, чтобы y оставалось дѣйствительнымъ; пусть a и d будутъ эти два предѣла. Если величина y въ этомъ промежуткѣ будетъ конечная, то она дастъ конечную вѣтвь кривой; если величина y для одной или нѣсколькихъ промежуточныхъ величинъ b, c.... перемѣннаго обращается въ безконечность, то получимъ различныя безконечныя вѣтви, которыя будутъ асимптотами къ прямымъ, соотвѣтствующимъ величинамъ x, которыя обращаютъ y въ безконечность; въ этомъ случаѣ промежутокъ между a и d дѣлятъ на нѣсколько другихъ промежутковъ, напримѣръ, отъ a до b, и т. д., такъ чтобы въ каждомъ изъ нихъ ордината не обращалась въ безконечность. Потомъ разсматриваемъ, какъ измѣняется y въ каждомъ изъ этихъ промежутковъ, напримѣръ, когда x возрастаетъ отъ a до b. Иногда по выраженію y замѣчаемъ непосредственно, какимъ образомъ измѣняется эта величина; но часто это нельзя замѣтить, тогда прибѣгаемъ къ производ-

ной. Дѣйствительно, мы знаемъ, что когда перемѣнное x возрастаетъ, начиная съ извѣстной величины, и если функція остается конечною, она измѣняется въ томъ же направленіи, пока производная сохраняетъ тотъ же знакъ; она возрастаетъ, если производная будетъ положительная, и уменьшается, если производная будетъ отрицательная. Пусть α, β, γ.... будутъ послѣдовательныя величины x, заключающіяся между a и b, при которыхъ производная мѣняетъ знакъ. Если перемѣнное x возрастаетъ отъ a до α, и производная сохраняетъ тотъ же знакъ, напримѣръ знакъ $+$, то функція возрастаетъ; отъ α до β производная отрицательна, и функція уменьшается, и т. д. Мы доказали, что угловой коеффиціентъ касательной, проведенной въ какой-нибудь точкѣ кривой, равенъ производной въ этой точкѣ. Такимъ образомъ, направленіе, въ которомъ измѣняется ордината кривой, опредѣляется угловымъ коеффиціентомъ касательной.

Если производная мѣняетъ знакъ, напримѣръ изъ положительной дѣлается отрицательной, то ордината перестаетъ возрастать и потомъ уменьшается; слѣдовательно, она проходитъ черезъ наибольшую величину. Если, наоборотъ, отрицательная производная дѣлается положительною, то ордината перестаетъ уменьшаться и потомъ увеличивается; слѣдовательно, она проходитъ черезъ *наименьшую величину*. Замѣтимъ, что слова *наибольшая и наименьшая величина* не должно принимать въ ихъ абсолютномъ значеніи; они только показываютъ сравненіе частной величины ординаты съ сосѣдними ординатами.

Вообще, если производная, оставаясь конечною и непрерывною, мѣняетъ знакъ, при переходѣ черезъ нуль, то касательныя, проведенныя въ точкахъ, ординаты которыхъ имѣютъ *наибольшія* и *наименьшія* величины, параллельны оси ox. Замѣтимъ, что не всякая величина x, которая обращаетъ производную въ нуль, опредѣляетъ наибольшія или наименьшія ординаты; тогда должно изслѣдовать, мѣняетъ ли дѣйствительно производная знакъ; но во всѣхъ случаяхъ касательная будетъ параллельно оси ox.

Примѣръ I. Уравненіе строфоиды, о которой было говорено въ § 31, есть

$$y = \pm x\sqrt{\frac{a-x}{a+x}}.$$

При измѣненіи x отъ 0 до $-a$, числовая величина y постоянно увеличивается отъ 0 до безконечности; такимъ образомъ получимъ двѣ безконечныя вѣтви ON, ON′, которыя будутъ асимптотами прямой HH′ (*фиг.* 22). При измѣненіи x отъ 0 до a, ордината y возрастаетъ отъ 0 и снова обращается въ нуль, сохраняя конечныя величины; слѣдовательно, сначала она увеличивается, потомъ уменьшается, и слѣдовательно, она проходитъ черезъ наибольшую величину; но отсюда мы не можемъ заключить,

что функція въ этомъ промежуткѣ не возрастала бы и не уменьшалась бы нѣсколько разъ. Производная отъ положительной величины y есть

$$y' = \frac{-x^2 - ax + a^2}{\sqrt{(a+x)(a-x)}}.$$

Числитель обращается въ нуль при двухъ величинахъ x, изъ которыхъ одна положительная x_1, а другая отрицательная x_2. При измѣненіи x отъ 0 до x_1, производная будетъ положительная, и функція будетъ возрастать; при измѣненіи x отъ x_1 до a производная будетъ отрицательная, и функція будетъ уменьшаться; ордината будетъ наибольшая при величинѣ $x_1 = a\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, равной большему отрѣзку линіи a, раздѣленной въ среднемъ и крайнемъ отношеніи.

336. Часто опредѣляютъ касательную, проведенную въ извѣстныхъ точкахъ кривой, или, что все равно, извѣстныя частныя величины производной, не прибѣгая къ общему выраженію этой производной. Разсмотримъ, напримѣръ, точку O строфоиды; соединимъ эту точку съ сосѣднею точкою M, координаты которой суть x и y; угловой коеффиціентъ сѣкущей OM равенъ отношенію $\frac{y}{x}$; угловой коеффиціентъ касательной, проведенной въ точкѣ O, получимъ, отыскавъ предѣлъ этого отношенія, когда x приближается къ нулю. Мы имѣемъ

$$\frac{y}{x} = \pm\sqrt{\frac{a-x}{a+x}};$$

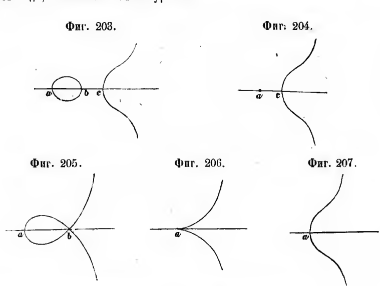
когда x приближается къ нулю, это отношеніе имѣетъ предѣломъ ± 1. Обѣ вѣтви, которыя проходятъ черезъ точку O, имѣютъ въ этой точкѣ касательными линіи, дѣлящія углы осей пополамъ. Касательную въ точкѣ A получимъ, разсматривая отношеніе $\frac{y}{a-x}$; такъ какъ это отношеніе увеличивается безпредѣльно, когда x приближается къ a, то касательная въ точкѣ A будетъ параллельна оси OY.

337. *Примѣръ II*. Разсмотримъ кривыя, выражаемыя уравненіемъ $y^2 = Ax^3 + Bx^2 + Cx + D$; мы докажемъ, что эти кривыя могутъ произвести помощію перспективы всѣ кривыя третьяго порядка. Положимъ, что коеффиціентъ A положительный, не измѣняя направленія оси x. Здѣсь надобно разсматривать нѣсколько случаевъ: 1-й. Когда три корня многочлена третьей степени будутъ дѣйствительные и неравные; назовемъ черезъ a, b, c эти корни, расположенные по возрастающей величинѣ; тогда получимъ

$$y^2 = A(x-a)(x-b)(x-c).$$

При измѣненіи x отъ $-\infty$ до a, ордината будетъ мнимая; при измѣненіи x отъ a до b, она будетъ дѣйствительная; при измѣненіи x отъ b до c; она будетъ мнимая

при измѣненіи x отъ c до $+\infty$, ордината будетъ дѣйствительная. Такимъ образомъ кривая состоитъ изъ сомкнутаго кольца и безконечной вѣтви (*фиг.* 203). 2-й. Когда оба корня a и b сдѣлаются равными, тогда кольцо обратится въ точку a (*фиг.* 204). 3-й. Когда два корня b и c будутъ равны, тогда кольцо s соединяется съ безконечною вѣтвью въ точкѣ b (*фиг.* 205). 4-е. Когда три корня a, b, c будутъ равны, тогда кривая представитъ точку возврата въ a (*фиг.* 206). 5-й. Наконецъ, если многочленъ третьей степени будетъ имѣть только одинъ дѣйствительный корень a, то кривая будетъ имѣть видъ, показанный на фигурѣ 207.



Угловой коэффиціентъ касательной опредѣляется изъ формулы

$$y' = \frac{3Ax^2 + 2Bx + C}{2\sqrt{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}} = \frac{3Ax^2 + 2Bx + C}{2y}.$$

Въ первомъ случаѣ числитель, который есть производная отъ многочлена третьей степени, обращается въ нуль при величинѣ a', заключающейся между a и b, и при величинѣ b', заключающейся между b и c; первой соотвѣтствуетъ наибольшая величина ординаты на кольцѣ. Въ третьемъ случаѣ числитель обращается въ нуль при двойномъ корнѣ b; такъ какъ знаменатель обращается также въ нуль, то формула представится въ видѣ $\frac{0}{0}$, изъ которой нельзя опредѣлить касательныя, проведенныя въ двойной точкѣ b; эти касательныя мы опредѣливъ, отыскавъ предѣлъ $\sqrt{A(b-a)}$ отношенія $\frac{y}{x-b}$, когда x приближается къ b.

338. Если данное алгебраическое уравненіе не будетъ рѣшено или потому, что это рѣшеніе невозможно, или потому, что находимъ безполезнымъ исполнить, то иногда съ помощію теоремъ, относящихся до корней уравненій, можно построить кривую.

При взглядѣ на уравненіе непосредственно замѣчаемъ извѣстныя свойства кривой; когда уравненіе содержитъ только члены четныхъ или нечетныхъ степеней, тогда очевидно, что если оно удовлетворяется величинами $x = \alpha$, $y = \beta$, то оно будетъ также удовлетворяться величинами $x = -\alpha$, $y = -\beta$; но двѣ точки (α, β), $(-\alpha, -\beta)$ расположены симметрично относительно начала координатъ; слѣдовательно, эта точка есть центръ кривой. Если уравненіе содержитъ только четныя степени одного изъ перемѣнныхъ, напримѣръ y, то дѣйствительныя величины y, которыя соотвѣтствуютъ одной и той же величинѣ x, будутъ попарно равны и имѣть обратные знаки; если оси будутъ прямоугольныя, то заключаемъ, что точки геометрическаго мѣста расположены симметрично относительно прямой OX, которая есть ось кривой.

Если уравненіе кривой не измѣняется отъ перемѣны x на y и y на x, и если уравненіе удовлетворяется величинами $x = \alpha$, $y = \beta$, то оно точно также будетъ удовлетворяться величинами $x = \beta$, $y = \alpha$; въ этомъ случаѣ двѣ соотвѣтствующія точки будутъ расположены симметрично относительно линіи, дѣлящей уголъ YOX пополамъ, которая въ этомъ случаѣ будетъ ось кривой. Точно также видимъ, что если уравненіе не измѣняется отъ перемѣны x на $-y$ и y на $-x$, то линія дѣлящая уголъ YOX′ пополамъ будетъ ось.

Пусть $f(x, y) = 0$ будетъ уравненіе кривой; производная y', какъ извѣстно, опредѣляется формулою $y' = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}$. Выраженіе y' содержитъ въ одно время два перемѣнныя x и y; поэтому оно опредѣляетъ угловой коеффиціентъ касательной во всякой точкѣ, двѣ координаты которой извѣстны, исключая того случая, когда обѣ частныя производныя обращаются въ одно время въ нуль.

339. *Примѣръ III. Построить геометрическое мѣсто такихъ точекъ, произведеніе разстояній которыхъ отъ двухъ опредѣленныхъ точекъ* F *и* F′ *было бы равно данному числу.*

Возьмемъ за начало средину O прямой FF′, эту прямую за ось x-овъ, а перпендикуляръ за ось y-овъ; назовемъ черезъ $2c$ разстояніе FF′, черезъ a^2 постоянное произведеніе; тогда уравненіе геометрическаго мѣста будетъ

$$(1) \qquad y^4 + 2(x^2 + c^2)y^2 + (x^2 - c^2)^2 - a^4 = 0.$$

Такъ какъ это уравненіе содержитъ только четныя степени каждаго изъ перемѣнныхъ, то каждая изъ осей будетъ осью симметріи кривой, а начало центромъ. Разсматривая y^2 какъ неизвѣстное, уравненіе (1) будетъ второй степени, и двучленъ $B^2 - 4AC$ будетъ въ этомъ случаѣ количество положительное $4(4c^2x^2 + a^4)$; слѣдовательно, корни всегда будутъ положительны. Если послѣдній членъ $(x^2 - c^2)^2 - a^4$ будетъ положи-

тельный, то величины y^2 будутъ имѣть одинъ и тотъ же знакъ; и такъ какъ ихъ сумма $-2(x^2+c^2)$ всегда отрицательная, то двѣ величины y^2 отрицательны, а четыре величины y мнимыя. Слѣдовательно, чтобы уравненіе (1) имѣло дѣйствительные корни, надобно, чтобы

$$(x^2-c^2)^2 - a^4 < 0 \text{ или } (x^2-c^2-a^2)(x^2-c^2+a^2) < 0$$

и слѣдовательно

$$x^2 < a^2 + c^2 \text{ и } x^2 > c^2 - a^2.$$

Тогда одна изъ величинъ y^2 будетъ положительная, другая отрицательная.

Возьмемъ $OA = OA' = \sqrt{a^2+c^2}$; кривая заключается между линіями, параллельными оси y-овъ, проведенными черезъ точки A и A′. При второмъ условіи надобно разсматривать нѣсколько случаевъ.

1-й. $a < c$. Возьмемъ $OB = OB' = \sqrt{c^2-a^2}$ и черезъ точки B и B′ проведемъ линіи параллельныя OY (*фиг.* 208); кривая состоитъ изъ двухъ частей, изъ которыхъ одна заключается между параллельными линіями проведенными черезъ точки B и A; другая между параллельными линіями, проведенными черезъ точки B′ и A′. Когда x дадимъ одну изъ величинъ OB или OA, тогда одна изъ величинъ y^2 будетъ нуль, другая отрицательная. При возрастаніи x отъ OB до OA, величина y^2, которая прежде равнялась нулю, дѣлается положительною и снова обращается въ нуль; такимъ образомъ получимъ сомкнутую кривую BCAD. Отрицательныя величины x дадутъ вторую кривую B′C′A′D′, равную предъидущей.

Фиг. 208.

Угловой коэффиціентъ касательной опредѣляется изъ формулы

$$(2) \qquad y' = \frac{x(x^2+y^2-c^2)}{y(x^2+y^2+c^2)}.$$

Въ точкахъ A и B y равно нулю, а y' безконечности; слѣдовательно, касательная параллельна оси OY. Числитель y' обращается въ нуль, при $x^2+y^2=c^2$. Изъ точки O, какъ центра, радіусомъ OF опишемъ кругъ. Этотъ кругъ пересѣкаетъ кривую въ четырехъ точкахъ C, D, C′, D′, опредѣляемыхъ изъ формулъ

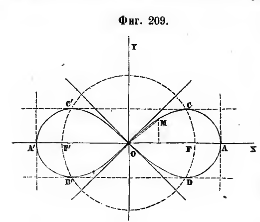
$$x^2 = \frac{4c^4-a^4}{4c^2}, \quad y^2 = \frac{a^4}{4c^2}.$$

Такъ какъ дуга BC находится внутри круга, то въ какой нибудь точкѣ этой дуги функція $x^2+y^2-c^2$ имѣетъ отрицательную величину и y' будетъ положительный. Для точекъ дуги CA множитель $x^2+y^2-c^2$ будетъ положительный, а y' отрицательный. Такимъ образомъ отъ B до C ордината возрастаетъ, а отъ C до A она уменьшается, слѣдовательно, ордината точки C есть наибольшая.

2-й. $a = c$. Второе условіе удовлетворяется при всякомъ x; x можетъ измѣняться отъ $-c\sqrt{2}$ до $c\sqrt{2}$. Когда x измѣняется отъ 0 до $c\sqrt{2}$, положительная величина y^2 на-

чивается отъ нуля и снова обращается въ нуль; такимъ образомъ получимъ сомкнутую кривую OCADO (*фиг.* 209), которая проходитъ черезъ начало координатъ; отрицательныя величины x даютъ кривую симметричную предъидущей относительно OY. Кругъ радіуса OF пересѣкаетъ кривую въ четырехъ точкахъ, ординаты которыхъ имѣютъ наибольшую числовую величину $\frac{c}{2}$; абсолютная величина абсциссъ этихъ точекъ равна $\frac{c\sqrt{3}}{2}$. Эта кривая называется *лемнискатою*.

Фиг. 209.



Въ началѣ координатъ величина y' представляется въ видѣ $\frac{0}{0}$; легко видѣть, что то же будетъ въ кратныхъ точкахъ какой-нибудь алгебраической кривой. Дѣйствительно, величина y' опредѣляется изъ формулы.

$$y' = -\frac{f'_x(x, y)}{f'_y(x, y)}.$$

Такъ какъ $f(x, y)$ есть цѣлый многочленъ относительно перемѣнныхъ x и y, то частныя производныя $f'_x(x, y)$, $f'_y(x, y)$ будутъ также цѣлые многочлены относительно тѣхъ же перемѣнныхъ. Если эти многочлены отъ замѣны въ нихъ x и y координатами кратной точки, не обратятся въ нули, то y въ этой точкѣ имѣло бы только одну величину между тѣмъ какъ оно должно имѣть столько различныхъ величинъ, сколько проходитъ вѣтвей черезъ кратную точку. Такъ какъ въ дѣйствительномъ случаѣ уравненіе есть биквадратное, то его можно рѣшить относительно y; каждой величинѣ y соотвѣтствуетъ производная, которая имѣетъ опредѣленную величину, когда въ ней x замѣнимъ нулемъ. Эта величина производной, какъ мы замѣтили въ § 326, есть предѣлъ отношенія $\frac{y}{x}$, когда x приближается къ нулю. Предѣлъ этого отношенія можно найти гораздо проще, не рѣшая уравненія. Положимъ $\frac{y}{x} = t$, или $y = tx$; внеся въ уравненіе (1), получимъ

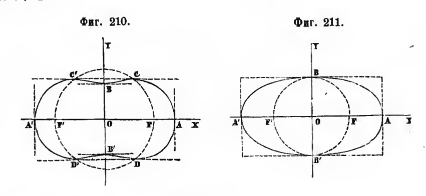
$$x^2 t^4 + 2(x^2 + c^2)t^2 + x^2 - 2c^2 = 0.$$

Если x будетъ величина очень малая, то одна изъ величинъ t^2 будетъ близка къ единицѣ, а другая будетъ отрицательная и очень большая; ограничиваясь дѣйствительными величинами y, получимъ $\lim \frac{y}{x} = \pm 1$. Такимъ образомъ касательныя, проведенныя въ точкѣ O, дѣлятъ углы осей пополамъ.

3-е. $a > c$. Второе условіе удовлетворяется также при всякой величинѣ x; слѣдовательна x можетъ измѣняться отъ $-\sqrt{c^2 + a^2}$ до $+\sqrt{c^2 + a^2}$. При $x = 0$ положительная величина y^2 есть $a^2 - c^2$. Взявъ на оси y

$$OB = OB' = \sqrt{a^2 - c^2},$$

увидимъ, что кривая проходитъ между двухъ точекъ B и B' (*фиг.* 210). При измѣненіи x отъ 0 до $\sqrt{c^2+a^2}$, y^2 измѣняется отъ a^2-c^2 до нуля; слѣдовательно, геометрическое мѣсто есть сомкнутая кривая, вершины которой суть точки A, A', B, B'. Для того, чтобы кругъ пересѣкалъ кривую, надобно, чтобы $a > c\sqrt{2}$. Если это условіе удовлетворяется, то ордината возрастаетъ отъ B къ C и уменьшается отъ C къ A; такимъ образомъ ордината точки B есть наименьшая, ордината точки c наибольшая. Если наоборотъ, $a < c\sqrt{2}$, то кругъ будетъ находиться внутри кривой, ордината которой уменьшается отъ B до A; слѣдовательно, ордината точки B есть наибольшая. Въ этомъ случаѣ кривая называется *оваломъ Кассини*. На фигурѣ 211 предположено, что a равно $c\sqrt{2}$.



340. *Примѣръ VI. Построить кривую*

(1) $$2y^5-5xy^2+x^5=0.$$

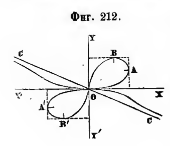
Такъ какъ это уравненіе есть пятой степени относительно каждаго перемѣннаго, то его нельзя рѣшить; но оно содержитъ только члены нечетныхъ степеней; слѣдовательно, начало координатъ есть центръ кривой. Изслѣдуемъ, сколько дѣйствительныхъ корней имѣетъ уравненіе, принимая въ немъ y за неизвѣстное, при различныхъ величинахъ x.

Положимъ сперва, что x положительно; тогда уравненіе (1) будетъ имѣть по большей мѣрѣ два дѣйствительные положительные корня, потому что первая его часть имѣетъ только два измѣненія. Взявъ производную отъ первой части относительно y, получимъ $10y(y^3-x)$. При измѣненіи отъ $y=0$ до $y=\sqrt[3]{x}$, эта производная будетъ отрицательною отъ $y=\sqrt[3]{x}$ до безконечности она будетъ положительная. Первая часть положительная при $y=0$, уменьшается, когда y измѣняетя отъ 0 до $\sqrt[3]{x}$ и потомъ безпредѣльно увеличивается. Слѣдовательно уравненіе имѣетъ или два положительные корня, или совсѣмъ ихъ не имѣетъ, смотря потому обращаетъ ли величина $y=\sqrt[3]{x}$ первую часть въ отрицательную или положительную; т. е. смотря потому будетъ ли $x^{10}<27$ или $x^{10}>27$. Если y перемѣнимъ на $-y$, то первая часть выразитъ только одно измѣненіе; слѣдовательно, уравненіе имѣетъ только одинъ отрицательный корень.

При $x=0$ пять корней уравненія (1) равны нулю; когда x возрастаетъ отъ 0 до $\sqrt[10]{27}$, уравненіе имѣетъ два положительные и одинъ отрицательный корень; когда

x будетъ равенъ $\sqrt[10]{27}$, оба положительные корня сдѣлаются равными, потому что они обращаютъ производную въ нуль. Когда x будетъ болѣе $\sqrt[10]{27}$, уравненіе будетъ имѣть только одинъ дѣйствительный корень, который будетъ отрицательный. Два положительные корня даютъ кольце OABO (фиг. 212), заключающееся въ углѣ YOX, а отрицательный корень даетъ безконечную вѣтвь OC′, расположенную въ углѣ Y′OX. Отрицательнымъ величинамъ x соотвѣтствуетъ кольце OA′B′O и безконечная вѣтвь OC′, симметричныя предъидущимъ относительно центра. Наибольшая величина абсциссы для кольца OABO есть $\sqrt[10]{27}$; она соотвѣтствуетъ точкѣ A, въ которой касательная параллельна OY, потому что координаты этой точки обращаютъ въ нуль $f'_y(x, y)$. Принимая y за произвольное перемѣнное, увидимъ, что наибольшая величина y для того же кольца есть $\sqrt[3]{4}$; эта величина даетъ точку B, въ которой касательная параллельна OX.

Фиг. 212.



Предъидущій способъ разбора употребляется во всѣхъ случаяхъ, когда уравненіе содержитъ только три члена, потому что всегда можно опредѣлить число дѣйствительныхъ корней трехчленнаго уравненія съ однимъ неизвѣстнымъ.

Употребленіе вспомогательнаго перемѣннаго.

341. Когда бываетъ не возможно рѣшить уравненіе относительно одного изъ перемѣнныхъ x или y, можно въ извѣстныхъ случаяхъ обѣ координаты выразить помощію вспомогательнаго перемѣннаго t и начертить кривую, смотря по совмѣстнымъ измѣненіямъ x и y, когда t измѣняется между предѣлами, которые эти количества дѣлаютъ дѣйствительными.

Если y будемъ разсматривать, какъ функцію x, а x какъ функцію t, то, взявъ производную отъ y относительно t, получимъ, по теоремѣ сложныхъ функцій (*)

$$D_t y = D_x y \times D_t x;$$

отсюда находимъ формулу

$$D_x y = \frac{D_t y}{D_t x}.$$

(*) Для означенія производной отъ функціи, часто употребляютъ букву D, начальную слова dérivée (производная), а перемѣнное, относительно котораго берутъ производную, пишутъ справа внизу буквы D, въ видѣ указателя. Такимъ образомъ $D_t x$ и $D_t y$ означаютъ производныя отъ функцій x и y относительно перемѣннаго t; $D_x y$ — производную отъ y относительно x.

которая опредѣляетъ угловой коэффиціентъ касательной, проведенной въ точкѣ, соотвѣтствующей какой-нибудь величинѣ t. Величины t, которыя обращаютъ $D_t y$ въ нуль, опредѣляютъ точки, въ которыхъ касательная параллельна OX; а величины, обращающія $D_t x$ въ нуль, опредѣляютъ точки, въ которыхъ касательная параллельна OY.

Примѣръ V. Построить кривую $y^4 - y^3 x + x^3 - 2x^2 y = 0$.

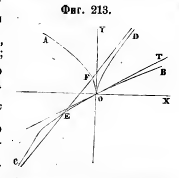
Если положимъ $y = tx$, то получимъ $x = \frac{2t-1}{t^3(t-1)}$, $y = tx = \frac{2t-1}{t^2(t-1)}$; измѣняя t отъ $-\infty$ до $+\infty$, мы построимъ кривую.

Чтобы изслѣдовать измѣненія x и y, возьмемъ производныя

$$D_t x = -\frac{6t^2 - 8t + 3}{t^4(t-1)^2}, \quad D_t y = -\frac{4t^2 - 5t + 2}{t^3(t-1)^2}.$$

Такъ какъ числители ни при какой дѣйствительной величинѣ t не обращаются въ нуль, то они не перемѣняютъ знакъ. Величины x и y обращаются въ нуль при $t = \frac{1}{2}$; въ безконечность при $t = 0$ или $t = 1$. Если t будемъ измѣнять отъ $-\infty$ до 0, то x будетъ отрицательное и уменьшается отъ 0 до $-\infty$; а y будетъ положительное и увеличиваться отъ 0 до ∞; такимъ образомъ получимъ безконечную вѣтвь OA (*фиг.* 213). Когда перемѣнное t измѣняется отъ 0 до $\frac{1}{2}$, x и y становятся положительными и уменьшаются отъ ∞ до 0, и мы получимъ безконечную вѣтвь OB. Когда перемѣнное t измѣняется отъ $\frac{1}{2}$ до 1, x и y будутъ отрицательны и будутъ уменьшаться отъ 0 до $-\infty$, и мы получимъ безконечную вѣтвь OC. Угловой коэффиціентъ касательной, проведенной въ точкѣ O къ вѣтви BOC, равенъ $\frac{1}{2}$. Наконецъ, если t будетъ измѣняться отъ 1 до ∞, то x и y будутъ положительными и будутъ уменьшаться отъ ∞ до 0, и мы получимъ безконечную вѣтвь OD.

Фиг. 213.



Если уравненіе съ двумя неизвѣстными x и y содержитъ только двѣ группы членовъ, изъ которыхъ одна m-ой степени, другая $m-1$ степени, то, взявъ за вспомогательное перемѣнное отношеніе $\frac{y}{x} = t$, координаты x и y будутъ раціональными функціями этого перемѣннаго. Если уравненіе содержитъ три группы членовъ, изъ которыхъ первая m-ой степени, вторая $m-1$, третья $m-2$ степени, то, взявъ то же вспомогательное перемѣнное, координаты получимъ, рѣшивъ уравненіе второй степени, и можно также изслѣдовать совмѣстныя ихъ измѣненія.

Примѣръ VI. Построить кривую $x^3y^4 - xy - x - 2 = 0$.

Если положимъ $xy = t$, то получимъ $x = \frac{t+2}{t^4-1}$, $y = \frac{t^5-t}{t+2}$.

Разсмотримъ, какимъ образомъ измѣняются x и y, когда вспомогательное перемѣнное t будемъ измѣнять отъ $-\infty$ до $+\infty$. Для этого возьмемъ производныя отъ двухъ функцій; тогда получимъ

$$D_t x = -\frac{3t^4 + 8t^3 + 1}{(t^4 - 1)^2}, \quad D_t y = \frac{4t^5 + 10t^4 - 2}{(t+2)^2}.$$

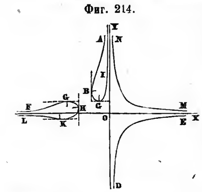
Величина $D_t x$ обращается въ нуль при двухъ величинахъ t: a и b, изъ которыхъ первая заключается между $-\frac{8}{3}$ и -2, а вторая между -1 и 0. Величина $D_t y$ обращается въ нуль при трехъ величинахъ t: c, d, e, изъ которыхъ первая заключается между $-\frac{5}{2}$ и -2, вторая между -2 и 0, а третья между 0 и 1. Кромѣ того легко увидимъ, что $a < c$, $d < b$.

Разсмотримъ теперь рядъ количествъ

$$-\infty, a, c, -2, -1, d, b, e, +1, \infty,$$

расположенныхъ по порядку ихъ величины. Если t будемъ измѣнять отъ $-\infty$ до a, то x будетъ отрицательное и, начиная отъ 0, уменьшается; y будетъ положительное и, начиная съ безконечности, точно также уменьшается; такимъ образомъ мы получимъ вѣтвь AB, асимптотическую оси OY (*фиг.* 214). При измѣненіи t отъ a до e, x будетъ отрицательное и будетъ возрастать, а y будетъ положительное и будетъ уменьшаться; такимъ образомъ получимъ вѣтвь BC. Когда перемѣнное t измѣняется отъ c до -2, x будетъ отрицательное и возрастаетъ до нуля, а y будетъ положительное и возрастаетъ до безконечности; и мы получимъ вѣтвь CI. При измѣненіи t отъ -2 до -1, x будетъ возрастать отъ 0 до ∞, y будетъ возрастать отъ $-\infty$ до 0; и мы получимъ двойную безконечную вѣтвь DE, которая будетъ асимптота къ OY′ и OX. Когда перемѣнное t измѣняется отъ -1 до d, x, начиная отъ $-\infty$, возрастаетъ, и y, начиная отъ 0, тоже возрастаетъ; и мы получимъ безконечную вѣтвь FG, которая будетъ асимптота къ OX. Когда t измѣняется отъ d до b, x продолжаетъ увеличиваться, а y уменьшаться, оставаясь положительнымъ; такимъ образомъ получимъ вѣтвь GH. При измѣненіи t отъ b до e, x и y уменьшаются; и мы получимъ вѣтвь HK, пересѣкающую OX′ въ точкѣ, абсцисса которой -2 соотвѣтствуетъ $t = 0$. Когда перемѣнное t измѣняется отъ e до $+1$, x уменьшается, y увеличивается; и мы получимъ безконечную вѣтвь KL, которая будетъ асимптота къ OX′. Наконецъ, когда t измѣняется отъ $+1$ до $+\infty$, x уменьшается отъ ∞ до 0, а y возрастаетъ отъ 0 до ∞; и мы получимъ двойную безконечную вѣтвь MN, которая будетъ асимптота къ OX и OY.

Фиг. 214.



Касательныя, проведенныя въ точкахъ C, G, K, соотвѣтствующихъ величинамъ c, d, e величины t, которыя обращаютъ въ нуль $D_t y$, параллельны OX; касательныя въ точкахъ B и H параллельны оси OY.

ГЛАВА II.

Выпуклость и вогнутость.

342. Пусть AB будетъ дуга кривой, соотвѣтствующая величинѣ y и величинамъ x, заключающимся между a и b. Предположимъ, что въ этомъ промежуткѣ вторая производная y'', взятая отъ y относительно x, сохраняетъ тотъ же знакъ, напримѣръ, остается положительною. Въ какой-нибудь точкѣ M, абсцисса которой есть x_0, къ этой дугѣ проведемъ касательную RS. Означимъ черезъ y'_0 величину производной въ этой точкѣ или угловой коеффиціентъ касательной, а черезъ Y ординату какой-нибудь точки этой прямой; разность $y - Y$ при $x = x_0$ обращается въ нуль, и то же самое будетъ съ ея производной $y' - Y'$ или $y' - y'_0$ (*фиг.* 215). Если абсцисса x возрастаетъ отъ a до b, и производная y'' отъ разности $y' - y'_0$ будетъ положительная, то функція $y' - y'_0$ возрастаетъ; такъ какъ при $x = x_0$ она обращается въ нуль, то отъ a до x_0 она будетъ отрицательная, а отъ x_0 до b положительная. Разсмотримъ теперь функцію $y - Y$, производная которой есть $y' - y'_0$. Такъ какъ при измѣненіи x отъ a до x_0, производная отрицательна, то функція уменьшается; такъ какъ при $x = x_0$, она обращается въ нуль, то она положительная; когда x измѣняется отъ x_0 до b, проивводная будетъ положительная, и функція будетъ возрастать; такъ какъ при $x = x_0$ она обращается въ нуль, то она будетъ такъ же положительная отъ x_0 до b. Отсюда слѣдуетъ, что разность $y - Y$ остается положительною въ промежуткѣ отъ a до b. Изъ этого заключаемъ, что дуга кривой AB расположена вся по одной сторонѣ каждой изъ ея касательныхъ; это есть *выпуклая* дуга. То же самое будетъ, если вторая производная останется отрицательною; но такъ какъ разность $y - Y$ есть величина отрицательная, то вся дуга будетъ расположена по другой сторонѣ касательной. Легко различить эти двѣ стороны; черезъ точку M проведемъ линію MY_1 параллельно оси OY, и по направленію положительнаго y; въ первомъ случаѣ дуга будетъ расположена по одной сторонѣ касательной, какъ, напримѣръ прямая MY^1; во второмъ случаѣ по другой сторонѣ. Въ первомъ случаѣ говорятъ, что дуга AB

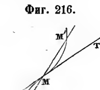
Фиг. 215.

обращена своею *вогнутостію* въ направленіи MY_1; во второмъ случаѣ въ противоположномъ направленіи.

Извѣстно, что, при возрастаніи x, знакъ при y'' показываетъ направленіе измѣненія y'. Слѣдовательно, если представимъ, что точка M перемѣщается по дугѣ AB, то угловой коеффиціентъ будетъ увеличиваться, если y'' будетъ положительное, и, наоборотъ, будетъ уменьшаться, если y'' будетъ отрицательное.

343. Точками *перегиба* называются такія точки, въ которыхъ вогнутость перемѣняетъ направленіе, т. е. такія точки, въ которыхъ вторая производная мѣняетъ знакъ. Вообще величина y'', будучи конечною и непрерывною, мѣняетъ знакъ, переходя через нуль. Положимъ, что y'' при $x = x_0$ мѣняетъ знакъ, переходя через нуль; тогда легко увидимъ, что первая производная $y' - y_0$ не мѣняетъ знака, но функція $y - Y$ мѣняетъ; такимъ образомъ, въ этой точкѣ кривая съ одной стороны касательной переходитъ на другую.

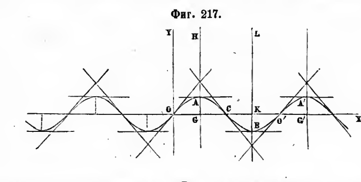
Фиг. 216.



Если черезъ точку перегиба M (*фиг.* 216) проведемъ сѣкущую сосѣднюю съ касательной MT, то эта сѣкущая пересѣчетъ кривую въ двухъ точкахъ M' и M'', сосѣднихъ съ M; такимъ образомъ касательная MT есть предѣлъ сѣкущей, проходящей черезъ три сосѣднія точки M'', M, M', когда двѣ точки M'' и M' приближаются къ M.

344. *Примѣръ I. Синусоида.* Построить кривую $y = \sin x$. Когда x возрастаетъ отъ 0 до π, ордината будетъ положительная; она начинается отъ 0 и снова обращается въ 0; такимъ образомъ получимъ дугу OAC (*фиг.* 217), симметричную относи-

Фиг. 217.



тельно ординаты, соотвѣтствующей $x = \frac{\pi}{2}$. Когда x возрастаетъ отъ π до 2π, y дѣлается отрицательнымъ, и мы получимъ дугу CBO', равную первой. Отъ 2π до 4π ордината получаетъ тѣ же величины, какъ отъ 0 до 2π, точно также отъ 4π до

6π и т. д. Такимъ образомъ, кривая состоитъ изъ безконечнаго числа одинаковыхъ волнъ.

Угловой коеффиціентъ касательной есть $y' = \cos x$: въ началѣ координатъ $y'=1$; слѣдовательно, касательная есть линія, раздѣляющая уголъ YOX пополамъ. Въ точкѣ C $y' = -1$; слѣдовательно, касательная параллельна другой линіи, раздѣляющей этотъ уголъ пополамъ. При $x = \frac{\pi}{2}$ производная равна нулю и изъ положительной обращается въ отрицательную; поэтому ордината точки A есть наибольшая. При $x = 3\,\frac{\pi}{2}$ производная точно также равна нулю и изъ отрицательной обращается въ положительную; слѣдовательно, ордината точки B есть наименьшая.

При измѣненіи x отъ 0 до π, вторая производная $y'' = -\sin x$ будетъ отрицательная, и кривая будетъ обращена своею выпуклостію къ отрицательной оси y; отъ π до 2π вторая производная будетъ положительная, и кривая будетъ обращена своею выпуклостію къ положительной оси y; слѣдовательно, точка C есть точка перегиба.

Замѣтимъ, что эта кривая имѣетъ безконечное число центровъ, расположенныхъ на равномъ разстояніи одни отъ другихъ на оси $X'X$, т. е. точки $O, C, O', \ldots$, абсциссы которыхъ суть кратныя π. Каждый изъ нихъ есть точка перегиба.

345. *Примѣръ II. Построить кривую* $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$ или $y = x^2 \pm x^{\frac{5}{2}}$.

Величины y будутъ положительны только тогда, когда x будетъ величина положительная. Возьмемъ сперва передъ радикаломъ знакъ $+$; при измѣненіи x отъ 0 до ∞, функція $y = x^2 + x^{\frac{5}{2}}$ увеличивается отъ 0 до безконечности. Производная $y' = 2x + \frac{5}{2}\,x^{\frac{3}{2}}$ также увеличивается, начиная отъ нуля; слѣдовательно, получимъ безконечную вѣтвь OD, касательную въ точкѣ O къ оси OX, и которая своею выпуклостію обращена къ положительной оси y (*фиг.* 218). Возьмемъ теперь передъ корнемъ знакъ $-$; величина y отъ 0 до 1 будетъ положительная, а далѣе отрицательная. Отложивъ на оси OX линію OA, равную единицѣ, увидимъ, что кривая пройдетъ черезъ A. Производная $y' = 2x - \frac{5}{2}\,x^{\frac{3}{2}}$, которая въ точкѣ O обращается въ нуль, будетъ положительная, когда x остается менѣе $\frac{16}{25}$, и отрицательная, когда x будетъ болѣе этого числа; слѣд., ордината которая соотвѣтствуетъ $\frac{16}{25}$, есть наибольшая, а касательная въ точкѣ M параллельна OX. Вторая производная $2 - \frac{15}{4}\,x^{\frac{1}{2}}$ остается положительною отъ 0 до $\frac{64}{225}$, а далѣе она будетъ отрицательная; слѣдовательно, точка N, которая соотвѣтствуетъ абсциссѣ $\frac{64}{225}$, есть точка перегиба; отъ O до N выпуклость обращена къ положительному y; далѣе она обращена къ отрицательному y.

Фиг. 218.

Обѣ вѣтви кривой касаются въ точкѣ O прямой OX, не составляя продолженіе другъ друга; точки, которыя имѣютъ эту особенность, называются *точками возврата*. Въ этой кривой обѣ вѣтви расположены по одной сторонѣ касательной. Разсматривая

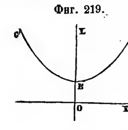
кривую $(y - x^2)^2 - x^5 = 0$, получимъ двѣ вѣтви, расположенныя съ той и другой стороны касательной; такимъ образомъ циссоида представляетъ въ своей вершинѣ A (*фиг.* 20) возвратъ такого рода.

346. *Примѣръ III.* Пусть $y = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} + e^{\frac{-x}{a}}\right)$ будетъ кривая. Предположимъ, что a означаетъ данную линію; тогда уравненіе будетъ однородно и опредѣлитъ кривую, которую называютъ *цѣпною линіею*, потому что это есть кривая образуемая гибкою, вѣсомою нитью, концы которой привязаны къ двумъ неподвижнымъ точкамъ.

При двухъ равныхъ величинахъ x и имѣющими обратные знаки, уравненіе даетъ равныя величины для y; поэтому прямая OY есть ось кривой. Когда x измѣняется отъ 0 до ∞, членъ $e^{\frac{x}{a}}$ увеличивается, но членъ $e^{-\frac{x}{a}}$ уменьшается; чтобы знать, какимъ образомъ измѣняется y, возьмемъ производную. Тогда получимъ

$$y' = \frac{a}{2}\left(e^{\frac{x}{a}} - e^{-\frac{x}{a}}\right).$$

Фиг. 219.



При всѣхъ положительныхъ величинахъ x эта производная положительна; слѣдовательно, когда x возрастаетъ отъ 0 до ∞, величина y постоянно увеличивается отъ a до ∞, и мы получимъ безконечную вѣтвь BC (*фиг.* 219). Давая x отрицательныя величины, получимъ вѣтвь BC′, симметричную относительно OY.

Такъ какъ при измѣненіи x отъ $-\infty$ до $+\infty$, вторая производная остается положительною, то кривая обращена своею выпуклостію къ положительной оси y.

347. *Примѣръ IV. Построить кривую* $y = e^{\frac{1}{x}}$. Дадимъ x величину положительную, но очень малую; тогда y будетъ величина положительная и очень большая; при возрастаніи x отъ 0 до $+\infty$, y постоянно уменьшается отъ ∞ до 1; и мы получимъ вѣтвь AC (*фиг.* 220), которая будетъ асимптотою съ одной стороны къ OY, съ другой стороны къ прямой G′G, проведенной параллельно OX на разстояніи равномъ единицѣ отъ этой прямой. Когда x дадимъ величину отрицательную, но очень малую, y будетъ величина положительная и очень малая; когда x измѣняется отъ 0 до $-\infty$, y возрастаетъ отъ 0 до 1; такимъ образомъ получимъ вѣтвь OD, проходящую черезъ начало координатъ, и которая будетъ асимптотою къ прямой GG′.

Фиг. 220.

Эта кривая представляетъ особенность, которой мы еще не встрѣчали; вѣтвь DO прекращается вдругъ въ точкѣ O; такого рода точки называется *точками пресѣченія.*

Чтобы опредѣлить направленіе выпуклости, возьмемъ сперва первую производную; и мы получимъ $y' = -\frac{1}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$. Когда x измѣняется отъ 0 до ∞, оба производителя $\frac{1}{x^2}$ и $e^{\frac{1}{x}}$ уменьшаются; въ слѣдствіе же знака $-$, y увеличивается; слѣдовательно, вѣтвь

AC своею выпуклостію обращена къ положительной оси y; при измѣненіи x отъ $-\infty$ до 0, множитель $\frac{1}{x^2}$ увеличивается, а множитель $e^{\frac{1}{x}}$ уменьшается. Прямо не видно, какимъ образомъ измѣняется y'; но это увидимъ изъ второй производной $y'' = \frac{2x+1}{x^4} e^{\frac{1}{x}}$. Когда x измѣняется отъ $-\infty$ до $-\frac{1}{2}$, вторая производная будетъ отрицательная. Возьмемъ OP равную $\frac{1}{2}$, и пусть M будетъ соотвѣтствующая точка кривой; слѣдовательно, дуга DM своею выпуклостію обращена къ отрицательной оси y; при возрастаніи x отъ $-\frac{1}{2}$ до 0, y'' будетъ положительное, и дуга MO выпукла къ положительной оси y, а точка M есть точка перегиба.

348. Разсмотримъ случай, когда уравненіе кривой

(1) $$f(x, y) = 0$$

не рѣшается относительно каждаго изъ перемѣнныхъ x и y; производная y' будетъ

(2) $$f_x'(x, y) + f_y'(x, y)\, y' = 0.$$

Такъ какъ y и y' суть двѣ функціи отъ x, то первая часть уравненія (2) есть сложная функція независимаго перемѣннаго x; производная этой функціи есть

$$f''_{x^2} + 2f''_{xy}\, y' + f''_{y^2}\, y'^2 + f'_y\, y'';$$

такъ какъ она постоянно равна нулю, то производная ея также равна нулю, и мы получимъ уравненіе

(3) $$f''_{x^2} + 2f''_{xy}\, y' + f_{y^2}\, y'^2 + f_y' y'' = 0,$$

которое опредѣляетъ величину y''. Если въ этомъ уравненіи y' замѣнимъ его величиною изъ уравненія (2), то получимъ

$$y'' = -\frac{f'_{y^2}(f'_y)^2 - 2f''_{xy} f'_x f'_y + f'_{y^2}(f'_x)^2}{(f'_y)^3}.$$

Съ помощію этой формулы опредѣляется направленіе выпуклости, и также точки перегиба.

349. Приложимъ эту формулу къ кривой, которую мы разсматривали въ § 339. Уравненіе этой кривой можно представить въ видѣ

(1) $$f(x,y) = \frac{1}{4}\,[(x^2+y^2+c^2)^2 - 4c^2x^2 - a^4] = 0.$$

Отсюда

$$f'_x = x\,(x^2+y^2-c^2),\ f'_y = y^2\,(x^2+y^2+c^2)$$
$$f'_x{}^2 = (x^2+y^2-c^2)+2x^2,\ f''_{xy} = 2x^2,\ f'_y{}^2 = (x^2+y^2+c^2)+2y^2.$$

Если эти величины внесемъ въ предъидущую формулу, то, сдѣлавъ приведеніе, принимая въ разсчетъ уравненіе (1), получимъ

$$y'' = \frac{[a^4\,3c^2\,(y^2-x^2) - (a^4-c^4)]}{y^3\,(x^2+y^2+c^2)^2}.$$

Для каждой части кривой, заключающейся въ одномъ изъ угловъ осей координатъ, знаменатель сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ; слѣдовательно, величина y'' можетъ перемѣнить знакъ только тогда, когда числитель переходитъ черезъ нуль. Поэтому координаты точки перегиба должны удовлетворять въ одно и то же время уравненію (1) и уравненію

(2) $$y^2 - x^2 - \frac{a^4-c^4}{3c^2} = 0;$$

отсюда

(3) $$y^2 + x^2 = \sqrt{\frac{a^4-c^4}{3}}.$$

Въ первомъ случаѣ, когда a меньше c, величины x и y, опредѣленныя изъ уравненій (1) и (3), будутъ мнимыя; поэтому числитель y'' будетъ имѣть одинъ и тотъ же знакъ для всѣхъ точекъ дуги BA; легко увидимъ, что около точекъ B и A онъ будетъ отрицательный; слѣдовательно, эта дуга своею выпуклостію обращена къ отрицательной оси y. Во второмъ случаѣ $a = c$, числитель обращается въ нуль только въ точкѣ O; онъ будетъ положительный при переходѣ отъ O къ A, а слѣдовательно, дуга OA своею выпуклостію обращена къ отрицательной оси y, и дуга A′D′OCA представляетъ въ точкѣ O точку перегиба. Въ третьемъ случаѣ мы имѣемъ $a > c$; чтобы величины x и y были дѣйствительныя, необходимо, чтобы $a < c\sqrt{2}$. Когда a больше $c\sqrt{2}$, числитель будетъ отрицательный во всѣхъ точкахъ дуги BA, и выпуклость будетъ обращена къ отрицательной оси y; если a будетъ менѣе $c\sqrt{2}$, то числитель обратится въ нуль въ извѣстной точкѣ G, находящейся между B и C; отъ B до G онъ будетъ имѣть тотъ же знакъ, какъ въ точкѣ B; поэтому онъ будетъ положительный, и выпуклость будетъ обращена къ положительной оси y; отъ G до A числитель имѣетъ тотъ же знакъ, какъ въ точкѣ A; слѣдовательно, онъ будетъ отрицателенъ, и выпуклость будетъ обращена къ отрицательной оси y, а точка G будетъ точка перегиба.

Замѣчанія на алгебраическія кривыя.

350. Пусть $f(x, y) = 0$ будетъ алгебраическое уравненіе, цѣлое, n степени относительно y. Каждой величинѣ x соотвѣтствуютъ n величинъ y, которыя вообще различаются другъ отъ друга. Мы докажемъ, что когда x измѣняется непрерывно, каждая изъ этихъ величинъ будетъ также из-

мѣняться непрерывно; но пока мы допустимъ, что эта теорема справедлива, какъ это мы дѣлали прежде. Когда уравненіе неприводимо, тогда оно имѣетъ кратные корни только для ограниченнаго числа величинъ x; между этими величинами x мы разсмотримъ только тѣ, которыя дѣйствительны, и положимъ, что онѣ расположены по порядку ихъ величины. Пусть a и b будутъ двѣ смежныя величины; когда x будетъ измѣняться отъ a до b, число дѣйствительныхъ величинъ y останется то же самое; потому что, если бы одинъ мнимый корень сдѣлался дѣйствительнымъ, то сопряженный корень сдѣлался бы также дѣйствительнымъ, и въ моментъ перехода оба корня были бы равны. Такимъ образомъ, въ разсматриваемомъ промежуткѣ получимъ извѣстное число различныхъ дѣйствительныхъ вѣтвей, которыя не имѣютъ ни одной общей точки. Когда x переходитъ черезъ величину a, тогда можетъ случиться, что одна пара корней изъ дѣйствительныхъ сдѣлается мнимыми или наоборотъ; въ этомъ случаѣ въ точкѣ, которая соотвѣтствуетъ величинѣ a и двойному дѣйствительному корню, начинаются или оканчиваются двѣ вѣтви кривыхъ.

Между дѣйствительными величинами y, соотвѣтствующими одной и той же величинѣ x-а, x_1, разсмотримъ ту величину y_1, которая будетъ простымъ корнемъ. Если x будемъ измѣнять отъ $x_1 - h$ до $x_1 + h$, гдѣ h есть величина довольно малая, то эта величина y останется дѣйствительною, не дѣлаясь равною другой, и опредѣлитъ начало дѣйствительной вѣтви.

Разсмотримъ теперь величину $x = b$, которой соотвѣтствуетъ кратная величина y_1 порядка p; отмѣтимъ точку M, координаты которой суть $x = b$; $y = y_1$; между p величинами y, которыя при $x = b$ дѣлаются равны y_1, есть извѣстное число величинъ, которыя остаются дѣйствительными, когда x измѣняется отъ a до b, и извѣстное число величинъ, которыя остаются мнимыми; такъ какъ число этихъ послѣднихъ есть четное, то число дѣйствительныхъ корней есть $p—2q$ (гдѣ q можетъ быть нуль). Точно также, когда x измѣняется отъ b до c, число дѣйствительныхъ величинъ y, которыя при $x = b$ идутъ отъ величины y_1, есть $p - 2q'$; такимъ образомъ все число вѣтвей кривой, проходящихъ черезъ точку M въ томъ или другомъ направленіи, есть четное число $2p - 2q - 2q'$.

351. Опредѣлимъ въ самомъ дѣлѣ касательныя въ точкѣ M; перенесемъ въ эту точку начало координатъ, и потомъ положимъ $y = tx$. мы получимъ уравненіе $\varphi(x, t) = 0$, опредѣляющее угловые коеффиціенты сѣкущихъ, проведенныхъ изъ точки M къ точкамъ, въ которыхъ кривая пересѣкается линіею, параллельною оси y. Положимъ, что по-

строена вторая кривая, ордината которой будетъ t; назовемъ черезъ t_1 одну изъ дѣйствительныхъ величинъ t при $x = 0$, и пусть N будетъ соотвѣтствующая точка второй кривой; каждой дѣйствительной вѣтви второй кривой, проходящей черезъ точку N, соотвѣтствуетъ дѣйствительная вѣтвь первой кривой, проходящей черезъ точку M и касающейся прямой $y = t_1 x$. Такъ какъ число вѣтвей второй кривой, проходящихъ черезъ точку N, есть четное, то отсюда заключаемъ, что число вѣтвей первой кривой, проходящихъ черезъ точку M и которыя касаются той же прямой $y = t_1 x$, также четное.

Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что алгебраическая кривая не можетъ выражать точки пресѣченія (§ 347). Оно не можетъ выражать тоже угловой точки; угловою точкою называется такая точка, изъ которой выходятъ двѣ вѣтви касательныя къ двумъ различнымъ прямымъ.

352. Если начало координатъ перенесемъ въ точку M алгебраической кривой, то уравненіе будетъ имѣть видъ

$$(1) \qquad (Ax + By) + (Cx^2 + Dxy + Ey^2) + \ldots = 0$$

или въ полярныхъ координатахъ

$$(2) \quad (A\cos\omega + C\sin\omega)\rho + (C\cos^2\omega + D\sin\omega\cos\omega + E\sin^2\omega)\rho^2 + \ldots = 0.$$

Положимъ сперва, что по крайней мѣрѣ одинъ изъ двухъ коэффиціентовъ A и B не будетъ равенъ нулю; если черезъ точку M проведемъ какую-нибудь сѣкущую, то уравненіе (2) дастъ точки, въ которыхъ эта сѣкущая пересѣкаетъ кривую; когда только одна величина ρ равна нулю, какое бы ни было ω, тогда говорятъ, что точка M есть *простая точка*,

При величинѣ ω, опредѣляемой уравненіемъ $A\cos\omega + B\sin\omega = 0$, второй корень равенъ нулю, а сѣкущая обратится въ касательную.

Когда оба коэффиціента A и B равны нулю, а три слѣдующіе не равны, тогда двѣ величины ρ равны нулю, и тогда говорятъ, что точка M есть *двойная точка*. Есть нѣсколько видовъ двойныхъ точекъ. 1. Если двѣ величины $tg\,\omega$, опредѣляемыя изъ уравненія $C\cos^2\omega + D\sin\omega\cos\omega + \sin^2\omega = 0$, будутъ дѣйствительныя и неравныя, то получимъ двѣ вѣтви, которыя пересѣкутся въ двойной точкѣ и которыя будутъ касательными къ различнымъ прямымъ (*фиг* 205); 2. если это уравненіе будетъ имѣть два мнимые корня, то точка M будетъ одинокая (*фиг*. 204). Замѣтимъ, что уравненіе, которое опредѣляетъ различныя касательныя въ кратной точкѣ, получимъ, приравнявъ нулю группу членовъ, имѣющихъ меньшую степень въ уравненіи (1).

ГЛАВА III.

Асимптоты.

353. Когда кривая имѣетъ безконечную вѣтвь MN (*фиг.* 221), то можетъ случиться, что разстояніе MH точки M этой кривой отъ прямой CD будетъ приближаться къ нулю, когда точка M безпредѣльно удаляется; въ этомъ случаѣ прямая CD называется *асимптотою* вѣтви кривой.

Фиг. 221.

Разсмотримъ разность MR между ординатами кривой и прямой, которая соотвѣтствуетъ одной и той же абсциссѣ, и означимъ черезъ β уголъ прямой CD съ осью y; тогда получимъ $MR = \frac{MH}{\sin\beta}$. Очевидно, что если одна изъ величинъ MH и MR будетъ приближаться къ нулю, то вторая будетъ также приближаться къ нулю. Слѣдовательно, асимптоту можно опредѣлять *какъ такую прямую, что разность между ординатами кривой и прямой имѣетъ предѣломъ нуль, когда* x *увеличивается неопредѣленно.*

Ассимптоту нельзя опредѣлять такимъ образомъ, когда уголъ β равенъ нулю, т. е. когда ассимптота параллельна оси y. Въ этомъ случаѣ если проведемъ прямую MR (*фиг.* 222) параллельно оси OX, то прямая MR будетъ приближаться къ нулю, когда ордината возрастаетъ неопредѣленно. Если черезъ a назовемъ абсциссу прямой CD, то абсцисса точки MN будетъ приближаться къ a, когда y увеличивается неопредѣленно, или, наоборотъ, y возрастаетъ выше всякаго предѣла, когда x приближается къ a.

Фиг. 222.

Асимптоты, параллельныя оси y.

354. Изъ предъидущаго видно, что асимптоты этого рода получимъ, найдя конечныя величины x, обращающія y въ безконечность. Если рѣшимъ уравненіе кривой относительно y, то при взглядѣ

на величину y, непосредственно замѣтимъ эти величины. Какъ примѣръ мы можемъ привести циссоиду и строфоиду, построенныя въ §§ 28 и 31. Если уравненіе кривой будемъ алгебраическое, но не рѣшенное относительно y, то поступаемъ слѣдующимъ образомъ. Пусть m будетъ степень уравненія, n самый большей показатель при y; тогда уравненіе можно написать въ видѣ

$$\varphi(x)\,y^n + \psi(x)\,y^{n-1} + \chi(x)\,y^{n-2} + \ldots = 0,$$

гдѣ φ, ψ, χ,... означаютъ многочлены, въ которые x входитъ по большей мѣрѣ въ степеняхъ $m-n$, $m-n+1$, $m-n+2$, ...; раздѣливъ на y^n, получимъ

$$(1)\qquad \varphi(x) + \psi(x)\frac{1}{y} + \chi(x)\frac{1}{y^2} + \ldots + \pi(x)\frac{1}{y^n} = 0.$$

Если при безпредѣльномъ увиличиваніи y, x приближается къ конечному предѣлу a, то для пары величинъ, въ которой y очень велико, а x близко къ a, всѣ члены, начиная съ втораго, будутъ очень малы; отсюда заключаемъ, что абсцисса a должна обращать первый членъ въ нуль. Такимъ образомъ *ассимптоты, параллельныя оси* y, *опредѣляются дѣйствительными корнями уравненія* $\varphi(x) = 0$.

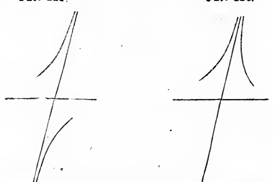
355. Назовемъ черезъ a одинъ изъ этихъ корней; при $x = a$ одна по крайней мѣрѣ изъ n величинъ $\frac{1}{y}$, опредѣленныхъ уравненіемъ (1), равна нулю; когда x приближается къ a, возраста или уменьшаясь, то въ слѣдствіе непрерывности одна по крайней мѣрѣ изъ n величинъ $\frac{1}{y}$ приближается къ 0. Если количество a не обращаетъ $\psi(x)$ въ нуль, то только одна изъ величинъ $\frac{1}{y}$ будетъ приближаться къ нулю, и эта величина необходимо будетъ дѣйствительная; дѣйствительно, такъ какъ мнимые корни сопряжены по два, то, когда одинъ изъ нихъ приближается къ нулю, сопряженный корень приближается также къ нулю. Такимъ образомъ получимъ двѣ дѣйствительныя безконечныя вѣтви, которыя будутъ асимптотами къ одной и той же прямой $x = a$ и изъ которыхъ одна опредѣляется величинами x, меньшими a, а другая большими величинами; слѣдовательно, эти обѣ вѣтви расположены по обѣ стороны асимптоты. Чтобы окончательно опредѣлить ихъ положеніе, будемъ измѣнять x отъ $a-h$ до $a+h$. Здѣсь надобно h принимать за величину достаточно малую для того, чтобы въ этомъ промежуткѣ уравненіе $\varphi(x) = 0$ имѣло только корень a

и чтобы многочленъ $\psi(x)$ не обращался въ нуль; кромѣ того можно положить, что h, слѣдовательно $\frac{1}{y}$ достаточно малы въ абсолютной величинѣ, для того, чтобы величина многочлена

$$\psi(x)\frac{1}{y}+\chi(x)\frac{1}{y^2}+\ldots+\pi(x)\frac{1}{y^n},$$

когда x и y дадимъ совмѣстныя величины, соотвѣтствующія точкѣ одной изъ безконечныхъ вѣтвей, имѣло постоянно знакъ своего перваго члена $\psi(x)\frac{1}{y}$. По уравненію (1) величина этого многочлена равна $-\varphi(x)$; отсюда заключаемъ, что обѣ величины $\psi(x)\frac{1}{y}$ и $-\varphi(x)$ имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, и слѣдовательно $\frac{1}{y}$ имѣетъ тотъ знакъ, какой имѣетъ $\frac{-\varphi(x)}{\psi(x)}$.

Фиг. 223. Фиг. 224.



Когда x измѣняется отъ $a-h$ до $a+h$, знаменатель $\psi(x)$ сохраняетъ тотъ же знакъ; если a будетъ простой корень или вообще корень не четнаго порядка уравненія $\varphi(x)=0$, то знаменатель $\psi(x)$ сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ; если a будетъ простой корень или вообще корень нечетнаго порядка уравненія $\varphi(x)$, то числитель $\varphi(x)$ при $x=a$ перемѣнитъ знакъ; величина y мѣняетъ сама по себѣ знакъ, и обѣ вѣтви будутъ направлены одна къ одному концу асимптоты, другая къ другому концу (*фиг.* 223), какъ это бываетъ въ гиперболѣ. Если a будетъ корень четнаго порядка, то числитель сохраняетъ одинъ и тотъ же знакъ, точно также и y; такимъ образомъ обѣ вѣтви направлены къ одному концу асимптоты (*фиг.* 224).

До сихъ поръ мы предполагали, что величина a не обращаетъ въ нуль $\psi(x)$; когда же она обращаетъ эту функцію въ нуль, тогда нѣсколько величинъ $\frac{1}{y}$ приближаются къ нулю; если число ихъ будетъ чет-

ное, то можетъ случиться, что онѣ всѣ будутъ мнимые и тогда ни одна дѣйствительная вѣтвь не будетъ асимптотою къ прямой $x = a$. Но если a будетъ простой корень уравненія $\varphi(x) = 0$, то всегда получимъ двѣ дѣйствительныя безконечныя вѣтви, которыя будутъ ассимптотами къ этой прямой. Дѣйствительно, когда $\frac{1}{y}$ приближается къ нулю положительными или отрицательными величинами, тогда только одна изъ соотвѣтствующихъ величинъ x, опредѣляемыхъ уравненіемъ (1), приближается къ a; слѣдовательно, эта величина дѣйствительная, и мы получимъ двѣ безконечныя вѣтви, направленныя къ двумъ концамъ асимптоты. Если величина $x - a$ мѣняетъ знакъ вмѣстѣ съ y, то обѣ вѣтви будутъ расположены по обѣимъ сторонамъ асимптоты, какъ показано на фигурѣ 223 но если величина $x - a$ не мѣняетъ знакъ въ одно время съ y, то обѣ вѣтви будутъ расположены по одной сторонѣ асимптоты, какъ, напримѣръ, въ циссоидѣ (§ 28) и строфоидѣ (§ 31).

356. *Примѣръ I.* Пусть

$$x^4y^4 + (x^2 - 4)(y - x)^4 = 0$$

будетъ уравненіе кривой, и расположивъ это уравненіе по степенямъ y, получимъ

$$(x^4 + x^2 - 4)\,y - 4y^4(x^2 - 4)\,x^3 + 6x^2(x^2 - 4)\,y^2 - 4x^3(x^2 - 4)\,y + x^4(x^2 - 4) = 0.$$

Биквадратное уравненіе

$$\varphi(x) = x^4 + x^2 - 4 = 0.$$

имѣетъ два простые дѣйствительные корня съ обратными знаками

$$x = \pm\sqrt{\frac{\sqrt{17} - 1}{2}} = \pm a.$$

Такъ какъ эти величины x не обращаютъ въ нуль $\psi(x)$, то каждая изъ прямыхъ $x = \pm a$ есть асимптота къ двумъ дѣйствительнымъ вѣтвямъ, расположеннымъ по обѣимъ сторонамъ прямой и направленнымъ къ двумъ концамъ.

Примѣръ II. Пусть будетъ кривая $(x - 1)^2 y^2 + 4 - x^2 = 0$. Уравненіе $\varphi(x) = 0$ для этого примѣра будетъ $(x - 1)^2 = 0$. Это уравненіе имѣетъ двойной корень $x = 1$; но когда x приближается къ единицѣ, обѣ величины y будутъ мнимыя; слѣдовательно, прямая $x = 1$ не будетъ асимптотою ни къ какой дѣйствительной вѣтви.

Асимптоты, непараллельныя оси y.

357. Разсмотримъ вѣтвь безконечной кривой, асимптота которой не параллельна оси y; уравненіе подобной асимптоты есть

$$y_1 = cx + d.$$

гдѣ c и d есть два неизвѣстныя постоянныя, которыя надобно опредѣлить. Означимъ чрезъ y и y_1 ординаты вѣтви кривой и прямой, соотвѣтствующія одной и той же абсциссѣ; черезъ δ означимъ разность $y - y_1$. Въ слѣдствіе опредѣленія,* δ есть функція x, которая при неопредѣленномъ увеличиваніи x предѣломъ имѣетъ нуль. Слѣдовательно, вѣтвь безконечной кривой, которую мы разсматриваемъ, выражается уравненіемъ

(2) $$y = y_1 + \delta = cx + d + \delta.$$

Иногда уравненіе вѣтви кривой можно легко представить въ предъидущемъ видѣ, и потомъ мы получимъ асимптоту. Пусть, напримѣръ, будетъ уравненіе $y = \frac{F(x)}{f(x)}$, въ которомъ $f(x)$ и $F(x)$ представляютъ два многочлена цѣлыхъ относительно x; первый многочленъ m степени, второй по большой мѣрѣ $m+1$ степени. Каждому корню уравненія $f(x)=0$ соотвѣтствуютъ двѣ безконечныя дѣйствительныя вѣтви, которыя будутъ асимптоты къ одной и той же прямой, параллельной оси y, расположены по обѣимъ сторонамъ прямой и направлены къ двумъ противоположнымъ концамъ или къ одному и тому же концу, смотря по тому, будетъ ли корень a нечетнаго или четнаго порядка. Кромѣ того есть двѣ другія безконечныя вѣтви, которыя получимъ, когда x-у будемъ давать очень большія положительныя или отрицательныя величины. Если выполнимъ дѣленіе, расположивъ относительно уменьшающихся степеней x, то получимъ цѣлое частное $cx + d$, которое по большей мѣрѣ будетъ первой степени; такимъ образомъ найдемъ

$$y = cx + d + \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

гдѣ $\varphi(x)$ есть цѣлый многочленъ, степень котораго меньше m; такъ какъ при безпредѣльномъ увеличиваніи x эта послѣдняя дробь приближается къ нулю, то очевидно, что прямая $y_1 = cx + d$ есть асимптота къ двумъ разсматриваемымъ вѣтвямъ.

Разсмотримъ еще, напримѣръ, трансцендентную кривую

$$y = x + \frac{1}{e^x},$$

безконечная вѣтвь которой находится въ углѣ YOX и есть асимптота къ прямой $y = x$.

Вообще ассимптоты найдемъ не такъ легко. Возвратимся къ уравненію (2); изъ него находимъ

$$c = \frac{y}{x} - \frac{d+\delta}{x}.$$

Такъ какъ d имѣетъ конечную величину и δ при безпредѣльномъ увеличиваніи x приближается къ нулю, то получимъ

(3) $$c = \lim \frac{y}{x}.$$

Слѣдовательно, угловой коеффиціентъ асимптоты равенъ предѣлу, къ которому приближается отношеніе $\frac{y}{x}$, *когда* x *безпредѣльно увеличивается.*

Точно также изъ уравненія (2) находимъ $d = y - cx - \delta$, откуда

(4) $$d = \lim (y - cx).$$

То есть ордината въ началѣ асимптоты равна предѣлу разности $y - cx$, *когда* x *безпредѣльно увеличивается.*

По этимъ двумъ свойствамъ опредѣляются асимптоты, непараллельныя оси y.

Положимъ сперва, что уравненіе рѣшено относительно y, и разсмотримъ опредѣленіе y, которое даетъ дѣйствительную безконечную вѣтвь. Когда x увеличивается безпредѣльно, тогда для этой вѣтви берутъ отношеніе $\frac{y}{x}$. Если это отношеніе не приближается къ конечному предѣлу, то вѣтвь не имѣетъ ассимптоты. Если отношеніе приближается къ конечному предѣлу c, то разсмотримъ разность $y - cx$; когда эта разность не приближается къ конечному предѣлу, вѣтвь не имѣетъ ассимптоты; если, наоборотъ, она приближается къ предѣлу d, то получимъ $y - cx = d + \delta$, гдѣ δ приближается къ нулю, когда x увеличивается безпредѣльно; слѣдовательно, прямая $y_1 = cx + d$ будетъ асимптотою разсматриваемой вѣтви.

358. ***Примѣръ I. Построить кривую***

$$y = \pm x\sqrt{\frac{x-1}{x-2}},$$

отнесенную къ прямоугольнымъ осямъ координатъ. Ось OX есть ось кривой. Когда x измѣняется отъ 0 до единицы, y остается конечнымъ; при $x = 0$ и $x = 1$, $y = 0$; и такимъ образомъ получимъ кольцо OAO (*фиг.* 225). Для величинъ x, заключающихся между 1 и 2, y будетъ мнимое. Когда x будетъ болѣе 2 на малую величину, y будетъ величина дѣйствительная и очень большая; слѣдовательно, если возьмемъ линію OB

равную 2, и проведемъ GG′ параллельно OY, то эта прямая будетъ асимптотою двухъ вѣтвей кривой.

Фиг. 225.

Если, начиная отъ 2, x будетъ возрастать, y начинаетъ уменьшаться и снова дѣлается очень большимъ, когда x будетъ величина большая; такимъ образомъ получимъ двѣ вѣтви кривой CND, C′N′D′. Когда x будетъ величина отрицательная, y всегда будетъ величина дѣйствительная; при измѣненіи x отъ 0 до $-\infty$, числовая величина y точно также измѣняется отъ 0 до ∞, и мы получимъ двѣ вѣтви OE, OE′.

Разсмотримъ одну изъ безконечныхъ вѣтвей, напримѣръ ND; мы ее получимъ, взявъ въ уравненіи знакъ $+$ и предположивъ, что x есть величина положительная и очень большая. Тогда получимъ

$$\frac{y}{x}=\sqrt{\frac{x-1}{x-2}};$$

предѣлъ $\frac{y}{x}$ равенъ единицѣ. Потомъ имѣемъ

$$y-x=x\left(\sqrt{\frac{x-1}{x-2}}-1\right)=x\,\frac{\sqrt{x-1}-\sqrt{x-2}}{\sqrt{x-2}}.$$

и, умноживъ оба члена на сумму радикаловъ,

$$y-x=\frac{x}{\sqrt{x-2}\,(\sqrt{x-1}+\sqrt{x-2})};$$

предѣлъ равенъ $\frac{1}{2}$; слѣдовательно, прямая $y=x+\frac{1}{2}$ есть асимптота разсматриваемой вѣтви. Раздѣливъ оба члена дроби на x, увидимъ, что разность $y-x$ болѣе $\frac{1}{2}$, и слѣдовательно, ордината кривой болѣе ординаты ассимптоты; отсюда заключаемъ, что вѣтвь ND расположена надъ асимптотою. Точно также увидимъ, что вѣтвь OE′ асимптотою имѣетъ ту же прямую и что она находится подъ асимптотою. Обѣ вѣтви N′D′ и OE имѣютъ асимптотою прямую симметричную предъидущей.

359. *Примѣръ.* Разсмотримъ кривую $y^4-y^3x+x^3+2x^2y=0$, которую мы построили въ § 341. Координаты x и y мы выразили съ помощію вспомогательнаго перемѣннаго $t=\frac{y}{x}$. Двѣ вѣтви OA и OB, которыя мы получимъ, приближая t къ нулю, не имѣютъ асимптоты, потому что y дѣлается безконечнымъ. Двѣ безконечныя вѣтви OC и OD получимъ, когда t приближается къ единицѣ. Для этихъ вѣтвей мы имѣемъ $\lim\frac{y}{x}=1$; найдемъ, будетъ ли разность $y-x$ имѣть предѣлъ. Формулы, посредствомъ которыхъ x и y выражаются по t, даютъ

$$y-x=(t-1)\,x=\frac{2t-1}{t^3};$$

эта разность приближается къ единицѣ, когда t приближается къ единицѣ. Отсюда слѣдуетъ, что двѣ разсматриваемыя вѣтви асимптотою имѣютъ прямую $y = x + 1$. Разность δ равна $\frac{(1-t)(t^2+t-1)}{t^3}$; при измѣненіи t отъ 1 до $+\infty$, разность δ будетъ отрицательная, и вѣтвь CD расположена подъ асимптотою. Корни многочлена t^2+t-1 суть $t' = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $t'' = \frac{-1-\sqrt{5}}{2}$; когда t измѣняется отъ $\frac{1}{2}$ до t', δ будетъ величина отрицательная, и дуга OE будетъ расположена подъ асимптотою; при измѣненіи t отъ t' до 1, δ будетъ величина положительная, и дуга EC проходитъ по другой сторонѣ асимптоты. Другой корень t'' даетъ точку F, въ которой вѣтвь OA пересѣкаетъ асимптоту.

360. Разсмотримъ теперь случай, когда алгебраическое и цѣлое уравненія не рѣшается относительно перемѣннаго y. Соберемъ члены одной степени; представимъ черезъ $\varphi(x, y)$ совокупность членовъ самой большой степени m; черезъ $\psi(x, y)$ совокупность членовъ $m-1$ степени, чрезъ $\chi(x, y)$ члены $m-2$ степени, ... ; тогда уравненіе можно будетъ написать такъ

$$f(x, y) = \varphi(x, y) + \psi(x, y) + \chi(x, y) + \ldots = 0. \tag{5}$$

Означимъ черезъ u отношеніе $\frac{y}{x}$ и въ уравненіи (5) y замѣнимъ черезъ ux; многочленъ $\varphi(x, y)$, который есть однородный и m-ой степени относительно x и y, будетъ содержать общимъ множителемъ x^m; и мы получимъ $\varphi(x, y) = x^m\varphi(1, u)$ или для краткости $\varphi(x, y) = x^m\varphi(u)$. Точно также многочлены $\psi(x, y)$, $\chi(x, y)$ ..., обратятся въ $x^{m-1}\psi(u)$, $x^{m-2}\chi(u)$, ... Слѣдовательно, уравненіе между x и u будетъ

$$x^m\varphi(u) + x^{m-1}\psi(u) + x^{m-2}\chi(u) + \ldots = 0;$$

и раздѣливъ на x^m, получимъ

$$\varphi(u) + \frac{1}{x}\chi(u) + \frac{1}{x^2}\psi(u) + \ldots = 0. \tag{6}$$

Степень этого уравненія относительна u одинаково съ степенью уравненіе (5) относительно y; поэтому для каждой величины x оно даетъ различныя величины отношенія $\frac{y}{x}$. Если при безпредѣльномъ увеличиваніи числовой величины x, одна изъ величинъ u приближается къ конечному предѣлу c, то для пары-величинъ, въ которыхъ x есть величина очень большая и u есть величина близкая къ c, всѣ члены уравненія (6), начиная съ втораго, будутъ очень малы; отсюда заключаемъ,

что число c должно обращать въ нуль многочленъ $\varphi(u)$. Такимъ образомъ *угловые коэффиціенты асимптотъ суть дѣйствительные корни уравненія*

$$\varphi(u) = 0. \tag{7}$$

Пусть c будетъ одинъ изъ дѣйствительныхъ корней этого уравненія. Положимъ $y - cx = v$; откуда $u = \frac{y}{x} = c + \frac{v}{x}$. Если въ уравненіи (6) u замѣнимъ этою величиною, то получимъ уравненіе, опредѣляющее величины v для каждой величины x. Сдѣлавъ подстановку и развернувъ каждый членъ, получимъ

$$\left.\begin{array}{r} \varphi(c) + \varphi'(c)\frac{v}{x} + \frac{\varphi''(c)}{1.2}\frac{v^2}{x^2} + \dots \\ + \psi(c)\frac{1}{x} + \psi'(c)\frac{v}{x^2} + \dots \\ + \chi(c)\frac{1}{x^2} + \dots \end{array}\right\} = 0. \tag{8}$$

Но $\varphi(c) = 0$; умножимъ всѣ члены на x; тогда уравненіе получитъ видъ

$$[v\varphi'(c) + \psi(c)] + A\frac{1}{x} + B\frac{1}{x^2} + \dots = 0. \tag{9}$$

Если при безпредѣльномъ увеличиваніи x, одна изъ величинъ v приближается къ конечному предѣлу d, то пара величинъ, въ которыхъ x есть очень большая величина, а v есть величина близкая къ d, дѣлаетъ всѣ члены, начиная со втораго, очень малыми; отсюда заключаемъ, что число d должно удовлетворять уравненію $d\varphi'(c) + \psi(c) = 0$; если количество $\varphi'(c)$ не равно нулю, то для d находимъ отсюда величину

$$d = -\frac{\psi(c)}{\varphi'(c)}. \tag{10}$$

Такимъ образомъ въ томъ случаѣ, когда x увеличивается безпредѣльно, одна изъ величинъ v и притомъ только одна приближается къ конечному предѣлу d. Изъ § 355 видно, что эта величина v будетъ дѣйствительная при очень большихъ величинахъ x положительныхъ или отрицательныхъ и что она даетъ начало двумъ вѣтвямъ кривой, которыя будутъ асимптотами прямой $y = cx + d$.

Когда величина c обращаетъ въ нуль $\varphi'(c)$, не обращая въ нуль $\psi(c)$, тогда ни одна изъ величинъ v при безпредѣльномъ увеличиваніи x не приближается къ конечному предѣлу. Если одна изъ величинъ c въ одно

время обращаетъ въ нуль $\varphi'(c)$ и $\psi(c)$, то, умноживъ уравненіе (9) на x^2, получимъ

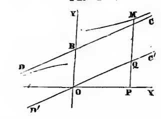
$$\frac{\varphi''(c)}{1.2}v^2+\psi'(c)v+\chi(c)+\frac{B}{x}+\frac{C}{x^2}+\ldots=0.$$

Въ этомъ случаѣ вообще обѣ величины v при безпредѣльномъ увеличиваніи x приближается къ конечнымъ предѣламъ, которые суть корни уравненія

(11) $$\frac{\varphi''(c)}{1.2}d^2+\psi'(c)d+\chi(c)=0.$$

Если это уравненіе имѣетъ два дѣйствительные и различные корня d' и d'', то только одна изъ величинъ v при безпредѣльномъ увеличиваніи x приближается къ d' и даетъ двѣ дѣйствительныя вѣтви, которыя будутъ ассимптотами прямой $y=cx+d'$; двѣ другія дѣйствительныя вѣтви будутъ также асимптотами къ параллельной прямой $y=cx+d''$.

Фиг. 226.



Если черезъ начало координатъ проведемъ прямую OC′, угловой коеффиціентъ которой былъ бы c (*фиг.* 226), то буква v будетъ означать длину MQ для различныхъ вѣтвей кривой.

Примѣръ. Пусть $y^4-y^3x+x^3-2xy=0$ будетъ кривая, которую мы строили въ § 341. Мы имѣемъ $\varphi(u)=u^4-u^3=u^3(u-1)$. Уравненіе $\varphi(u)=0$ имѣетъ одинъ тройной корень, равный нулю, и одинъ простой корень, равный 1. Простой корень, которому соотвѣтствуетъ величина d, равная 1, даетъ прямую $y=x+1$, которая будетъ ассимптотою къ двумъ дѣйствительнымъ вѣтвямъ. Тройной корень можетъ только дать ассимптоты параллельныя OX; но изъ уравненія кривой видно, что ни одна изъ величинъ y не приближается къ конечному предѣлу, когда x безпредѣльно увеличивается.

361. Изученіе безконечныхъ вѣтвей алгебраической кривой легко привести къ изученію конечныхъ вѣтвей алгебраической кривой той же степени. Пусть x и y будутъ координаты какой-нибудь точки M первой фигуры; этой точки M отмѣтимъ соотвѣтствующую точку M′, координаты которой x' и y' опредѣляются отношеніями

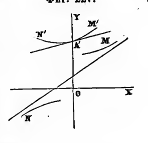
$$x'=\frac{1}{x},\ y'=\frac{y}{x},$$

изъ которыхъ обратно находимъ

$$x=\frac{1}{x'},\ y=\frac{y'}{x'}.$$

Если точка M будетъ описывать прямую $Ax + By + C = 0$, то точка M′ опишетъ соотвѣтствующую прямую $Cx' + By' + A = 0$, такъ какъ угловой коэффиціентъ одной изъ прямыхъ равенъ ординатѣ другой въ началѣ координатъ. Вообще, если точка M опишетъ кривую m-ой степени, то точка M′ опишетъ соотвѣтствующую кривую той же степени; поэтому сѣкущей, проходящей черезъ двѣ сосѣднія точки одной изъ кривыхъ, будетъ соотвѣтствовать сѣкущая, проходящая черезъ двѣ сосѣднія точки другой кривой, и слѣдовательно, касательной соотвѣтствуетъ касательная. Мы можемъ положить, что первая кривая отнесена къ такимъ осямъ, что уравненіе содержитъ y^m; въ этомъ случаѣ безконечныя вѣтви получимъ только тогда, когда будемъ безпредѣльно увеличивать x и всѣ величины отношенія $\frac{y}{x}$ приближаются къ конечнымъ предѣламъ. Въ слѣдствіе этого, если точка M будетъ описывать безконечную вѣтвь первой кривой, то, такъ какъ x' приближается къ нулю, а y' къ конечной величинѣ c, то точка M′ опишетъ вѣтвь, пересѣкающую ось y въ точкѣ A′, ордината которой есть c (*фиг.* 227). Такимъ образомъ изученіе безконечныхъ вѣтвей первой кривой приводится къ изученію вѣтвей второй кривой вблизи точекъ, расположенныхъ на оси y.

Фиг. 227.

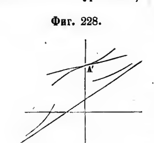


Пусть A′ будетъ точка, въ которой вторая кривая пересѣкаетъ ось y; означимъ черезъ d угловой коэффиціентъ касательной въ этой точкѣ; тогда для точки M′ сосѣдней A′ получимъ $\frac{y'-c}{x'} = d + \delta$, гдѣ δ приближается къ нулю вмѣстѣ съ x'; слѣдовательно, вѣтвь A′M′ второй кривой выразится уравненіемъ $y' = c + dx' + \delta x'$. Этой вѣтви соотвѣтствуетъ безконечная вѣтвь первой кривой, имѣющей уравненіемъ $y = cx + d + \delta$, гдѣ δ приближается къ нулю, когда x безпредѣльно увеличивается; касательной $y' = c + dx'$ къ второй кривой соотвѣтствуетъ асимптота $y = cx + d$ первой. Извѣстно, что изъ точки A′ всегда выходитъ четное число вѣтвей, имѣющихъ одну и ту же касательную (§ 351); слѣдовательно, первая кривая имѣетъ четное число безконечныхъ вѣтвей, имѣющихъ одну и ту же асимптоту. Такъ какъ касательная въ точкѣ A′ есть предѣлъ касательной, проведенной въ точкѣ M′, то отсюда слѣдуетъ, что асимптота есть предѣлъ касательной, проведенной въ точкѣ M, когда эта точка удаляется въ безконечность.

Положимъ, напримѣръ, что точка A′ будетъ простая точка, какъ по-

казано на фигурѣ 227; очевидно, что вѣтви A'M' соотвѣтствуетъ безконечная вѣтвь M, расположенная надъ асимптотою вправо, а вѣтви A'N' вторая безконечная вѣтвь N, расположенная подъ асимптотою слѣва. Если бы въ точкѣ A' былъ перегибъ (*фиг.* 228), то обѣ безконечная вѣтви были бы расположены съ одной стороны асимптоты, одна справа, другая слѣва. Во второмъ случаѣ говорятъ, что кривая имѣетъ точку перегиба въ безконечности.

Фиг. 228.



Если точка A' будетъ двойная точка съ двумя различными касательными, то получимъ двѣ параллельныя асимптоты, изъ которыхъ каждой соотвѣтствуютъ двѣ безконечныя вѣтви, имѣющія одно изъ предъидущихъ расположеній. Когда двойная точка A' будетъ точка возврата, тогда получимъ двѣ вѣтви, которыя будутъ асимптотами къ одной и той же прямой, но къ одному и тому же концу.

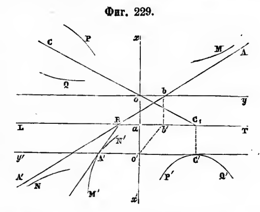
До сихъ поръ мы предполагали, что касательная въ A' не совпадаетъ съ осью y; если же она будетъ совпадать, то вѣтвямъ, идущимъ изъ точки A', будутъ соотвѣтствовать въ первой фигурѣ безконечныя вѣтви, не имѣющія асимптоты. Направленіе касательной, проведенной въ точкѣ M, приближается къ направленію, опредѣленному угловымъ коеффиціентомъ c; но она удаляется въ безконечность. Эти безконечныя вѣтви называютъ параболическими вѣтвями. Если точка A' будетъ простая точка, то обѣ безконечныя вѣтви будутъ имѣть одинаковыя направленія, какъ это имѣетъ мѣсто въ параболѣ. Если въ точкѣ A' будетъ перегибъ, то обѣ вѣтви будутъ имѣть различныя направленія.

Кривая, выражаемая уравненіемъ $y^3 = x$ имѣетъ такое расположеніе: она состоитъ изъ двухъ безконечныхъ вѣтвей, которыя не имѣютъ асимптоты и изъ которыхъ одна идетъ къ положительной оси x, другая къ отрицательной оси x.

362. Такъ какъ каждой величинѣ x соотвѣтствуетъ по большей мѣрѣ m дѣйствительныхъ величинъ y, то первая кривая имѣетъ по большей мѣрѣ m безконечныхъ вѣтвей со стороны положительной оси x и m безконечныхъ вѣтвей со стороны отрицательной оси x; сверхъ того это видно изъ того, что вторая кривая пересѣкается осью y по большей мѣрѣ въ m точкахъ. Такъ какъ число касательныхъ, проведенныхъ къ второй кривой въ этихъ точкахъ пересѣченія, равно по большей мѣрѣ m, то первая кривая имѣетъ по большей мѣрѣ m асимптотъ. Прямыя, проведенныя черезъ

точку A′, будутъ прямыя параллельныя асимптотѣ. Если точка A′ будетъ простая точка (§ 352), то сѣкущая, проведенная черезъ эту точку, пересѣчетъ кривую въ $m-1$ другихъ точкахъ; слѣдовательно, всякая линія, параллельная асимптотѣ, пересѣкаетъ первую кривую въ $m-1$ точкахъ. Касательная, проведенная въ точкѣ A′, пересѣкаетъ вторую кривую только въ $m-2$ другихъ точкахъ, а слѣдовательно, асимптота пересѣкаетъ первую кривую только въ $m-2$ точкахъ; въ этомъ случаѣ говорятъ, что двѣ точки пересѣченія находятся въ безконечности. Если въ точкѣ A′ будетъ перегибъ, то, такъ какъ касательная пересѣкаетъ вторую кривую въ трехъ точкахъ, которыя сливаются съ точкою A′ (§ 343), ассимптота будетъ имѣть три точки пересѣченія въ безконечности, и слѣдовательно, пересѣчетъ первую кривую только въ $m-3$ точкахъ.

Фиг. 229.



363. Преобразованіе, которое мы сдѣлали, приводитъ къ тому, чтобы брать перспективу фигуры на плоскости. Дѣйствительно, разсмотримъ двѣ фигуры, изъ которыхъ одна помѣщена въ горизонтальной, другая въ вертикальной плоскости, пересѣкающей горизонтальную плоскость по линіи LT (*фиг.* 229) и такія, чтобы одна была перспективой другой, когда глазъ находится въ точкѣ, которой проекціи суть o и o'. Очевидно, что когда точка M удаляется въ безконечность въ вертикальной плоскости, перспективная ея M′ приходитъ на прямую $o'y'$, параллельную линію горизонта; такимъ образомъ изученіе безконечныхъ вѣтвей кривой, расположенной въ вертикальной плоскости, приводится къ изученію другой кривой вблизи точекъ, расположенныхъ по прямой $o'y'$.

Если одну изъ кривыхъ отнесемъ къ двумъ осямъ ox и oy, другую къ двумъ осямъ $o'x'$ и $o'y'$, то получимъ формулу преобразованія $x'=\frac{ba}{x}$, $y'=\frac{by}{x}$, въ которыхъ a и b означаютъ разстоянія ao' и ao. Эти формулы совершенно тѣ же, которыя мы употребляли прежде, если сдѣлаемъ $a=b=1$.

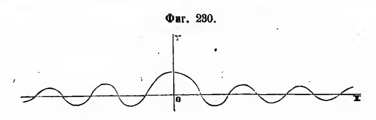
Пусть A′ будетъ точка, въ которой вторая кривая пересѣкаетъ пря-

мую $o'y'$; касательная $A'B$, проведенная въ этой точкѣ, перспективою будетъ имѣть прямую A_1A; тогда двумъ вѣтвямъ M' и N', выходящимъ изъ точки A', соотвѣтствуютъ двѣ безконечныя прямыя M и N, которыя будутъ асимптотами къ прямой AA_1.

Когда касательная, проведенная въ точкѣ A' совпадаетъ съ прямой $o'y'$, какъ напримѣръ въ точкѣ C, асимптота удаляется въ безконечность, и двѣ вѣтви P' и Q' даютъ двѣ безконечныя параболическія вѣтви Q и P; прямая, проведенная изъ точки o въ точку одной изъ вѣтвей P и Q, приближается къ предѣльному направленію oC_1.

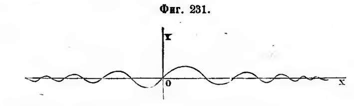
364. Трансцендентныя кривыя могутъ пересѣкать ихъ асимптоты въ безконечномъ числѣ точекъ.

Фиг. 230.



Напримѣръ, кривая $y = \frac{3 \sin x}{x}$ качается неопредѣленно по обѣ стороны прямой OX, къ которой она есть асимптота, потому что величина y предѣломъ имѣетъ нуль (*фиг.* 230). Сверхъ того амплитуда качанія есть величина постоянная и равная π. Кривая $y = \frac{\sin x^2}{x}$ качается неопредѣленно по обѣ стороны ея асимптоты OX; но здѣсь амплитуда качаній уменьшается (*фиг.* 231).

Фиг. 231.



365. Иногда случается, что двѣ безконечныя вѣтви не имѣютъ прямолинейной асимптоты, между тѣмъ какъ разность ихъ ординатъ приближается къ нулю. Въ этомъ случаѣ говорятъ, что обѣ кривыя суть асимптоты одна къ другой; если одна изъ нихъ будетъ простая извѣстная кривая, то съ помощію ея можно будетъ начертить другую. Возьмемъ уравненіе $y = \frac{F(x)}{f(x)}$ и положимъ, что степень числителя на единицу

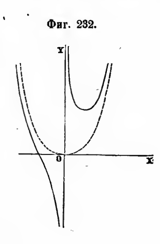
болѣе степени знаменателя; такъ какъ отношеніе $\frac{y}{x}$ возрастаетъ неопредѣленно вмѣстѣ съ x, то вѣтви, соотвѣтствующія очень большимъ величинамъ x, положительнымъ или отрицательнымъ, не имѣютъ прямолинейной асимптоты. Если выполнимъ дѣленіе, то получимъ

$$y = ax^n + bx^{n-1} \ldots + k + \frac{\varphi(x)}{f(x)},$$

и обѣ разсматриваемыя вѣтви будутъ асимптотами кривой

$$y = ax^n + bx^{n-1} + \ldots k.$$

Если $n = 2$, то эта вторая кривая будетъ парабола. Напримѣръ, кривая



Фиг. 232.

$$y = \frac{x^3 + 1}{x} = x^2 + \frac{1}{x}$$

будетъ асимптотою къ параболѣ $y = x^2$ (*фиг.* 232).

ГЛАВА IV.

Построеніе кривыхъ въ полярныхъ координатахъ.

366. О полярныхъ координатахъ было говорено въ § 3; въ этой системѣ какую-нибудь точку, взятую въ плоскости, можно опредѣлить посредствомъ величины ω, заключающейся между 0 и 2π, и положительной величиной ρ; однако мы принуждены измѣнять каждую изъ координатъ ω и ρ отъ $-\infty$ до $+\infty$.

Мы видѣли (§ 263), что если за полюсъ возьмемъ одинъ изъ фокусовъ гиперболы, то обѣ вѣтви выразятся двумя различными уравненіями, ограничиваясь положительными радіусами векторами; если допустимъ отрицательные радіусы векторы, условившись абсолютную величину каждаго изъ нихъ откладывать по направленію, противоположному направленію, показываемому величиною ω, то достаточно будетъ одного уравненія. Мы

видѣли также, что помощію этого условія можно выразить однимъ уравненіемъ улиткообразную линію Паскаля (§ 35).

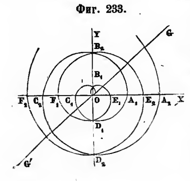
367. *Архимедова спираль*. Точка M двигается равномѣрно по направленію G′G неопредѣленной прямой G′OG, которая въ свою очередь равномѣрно обращается около одной изъ ея точекъ O; тогда кривая, описываемая точкою M, будетъ спираль Архимеда (*фиг.* 233).

За полярную ось возьмемъ положеніе OX, занимаемое прямою OG, когда движущаяся точка M приходитъ въ O, и положительные полярные углы будемъ отсчитывать по направленію движенія прямой. Пусть a будетъ пространство, которое проходитъ движущаяся точка по прямой въ то время, когда эта прямая дѣлаетъ полный оборотъ. Если разсмотримъ движущуюся точку въ какомъ-нибудь изъ ея положеній, послѣ того какъ она была въ точкѣ O, то, назвавъ черезъ ω уголъ, на который поворачивается линія OX, чтобы совпасть съ OG, и черезъ ρ разстояніе движущейся точки отъ точки O, получимъ, полагая $\frac{a}{2\pi} = b$,

(1) $$\frac{\rho}{a} = \frac{\omega}{2\pi}, \text{ или } \rho = a\frac{\omega}{2\pi} = b\omega.$$

Разсмотримъ движущуюся точку прежде, чѣмъ она приходитъ въ O; назовемъ черезъ ω_1 уголъ, на который надобно повернуть линію OX, чтобы она совпала съ OG; такъ какъ точка M находится на противоположномъ направленіи OG′, то радіусъ векторъ должно разсматривать, какъ отрицательный, и мы получимъ $\frac{-\rho}{a} = \frac{\omega_1}{2\pi}$. Если условимся принимать за отрицательные углы тѣ полярные углы, которые отсчитываются по направленію, противоположному первому, то получимъ $\omega = -\omega_1$, и тогда предъидущее уравненіе будетъ одинаково съ уравненіемъ (1), которое будетъ выражать тогда безконечную кривую. Величины ω, заключающіяся между 0 и 2π, 2π и $4\pi, \ldots$, 0 и $-2\pi, \ldots$, дадутъ послѣдовательные обороты спиральной линіи. Если ограничимся положительными величинами ρ, заключающимся между 0 и 2π, то, чтобы выразить каждый изъ ея оборотовъ, надобно будетъ частное уравненіе

Фиг. 233.



$$\rho = b\omega,\ \rho = a + b\omega,\ \ldots,\ \rho = a - b\omega,\ \rho = 2a - b\omega,\ \ldots,$$

Архимидова спираль состоитъ изъ двухъ частей $OB_1C_1D_1A_1B_2 \ldots$ и $OB_1E_1D_1F_1B_2 \ldots$ симметричныхъ другъ другу относительно перпендикуляра OY, проведеннаго къ полярной оси. Каждая часть содержитъ безконечное число оборотовъ, и отрѣзки какой-нибудь прямой, проведенной черезъ полюсъ, и заключающіеся между двумя смежными оборотами, имѣютъ всѣ одну длину a.

368. *Примѣчаніе I.* Одну и ту же точку M плоскости можно опредѣлить посредствомъ безконечнаго числа паръ величинъ ρ и ω. Если черезъ α назовемъ положительный уголъ меньшій 2π, образуемый линіею OM съ осью OX, и черезъ a разстояніе OM (*фиг.* 234), то за координаты точки M можно взять пары величинъ

Фиг. 234.

$$\ldots (-4\pi + \alpha, a), (-2\pi + \alpha, a), (\alpha, a), (2\pi + \alpha, a), (4\pi + \alpha, a), \ldots$$

принимая радіусъ векторъ положительнымъ, или пары

$$\ldots (-3\pi + \alpha, -a), (-\pi + \alpha, -a), (\pi + \alpha, -a),$$
$$(3\pi + \alpha, -a), (5\pi + \alpha, -a) \ldots,$$

принимая радіусъ векторъ отрицательнымъ. Если точка M принадлежитъ кривой, опредѣляемой уравненіемъ $f(\omega, \rho) = 0$, то ея координаты не могутъ быть опредѣлены только взглядомъ на точку; чтобы опредѣлить ихъ, надобно слѣдовать очертанію кривой.

369. *Примѣчаніе II.* Въ формулахъ преобразованія, выведенныхъ въ I книгѣ, IV главѣ, мы предполагали, что точка M опредѣляется положительнымъ радіусомъ векторомъ и полярнымъ угломъ, заключающимся между 0 и 2π. Оставляя сперва радіусъ векторъ положительнымъ, за полярный уголъ можно взять какой-нибудь изъ угловъ, образуемыхъ направленіемъ OM съ осью OX (*фиг.* 235), принимая уголъ съ знакомъ + или —, смотря по тому, будетъ ли прямая, при переходѣ изъ положенія OX, въ положеніе OM, вращаться отъ OX къ OY или въ противоположномъ направленіи. Это приводитъ къ тому, чтобы увеличивать или уменьшать уголъ, обозначаемый первоначально черезъ ω, на число кратное 2π; такъ какъ синусы и косинусы при этомъ не измѣняются, то формулы остаются тѣ же. Положимъ теперь, что точка M опредѣляется отрицательнымъ радіусомъ векторомъ; тогда уголъ ω будетъ

Фиг. 235.

одинъ изъ угловъ, образуемыхъ направленіемъ OM′ съ OX. Проекція OM на OX есть $(-\rho).\cos(\pi+\omega)$ или $\rho\cos\omega$; такимъ образомъ получимъ $x=\rho\cos\omega$ и точно также $y=\rho\sin\omega$. Слѣдовательно, эти формулы общія. Если полярная ось OX′ не совпадаетъ съ OX, то положеніе этой оси опредѣляется угломъ α, который она образуетъ съ OX. Если въ формулахъ $x=\rho\cos\omega$, $y=\rho\sin\omega$, относящихся къ полярной оси OX, замѣнимъ ω черезъ $\omega'+\alpha$, то получимъ $x=\rho\cos(\omega'+\alpha)$ $y=\rho\sin(\omega'+\alpha)$.

Фиг. 236.

Положимъ, что оси координатъ косоугольныя, и возьмемъ OX за полярную ось (*фиг.* 236); тогда формулы преобразованія получимъ, проектируя линіи OM и OPM послѣдовательно на перпендикуляръ OX и на перпендикуляръ OY,

$$x=\frac{\rho\sin(\theta-\omega)}{\sin\theta},\ y=\frac{\rho\sin\omega}{\sin\theta}.$$

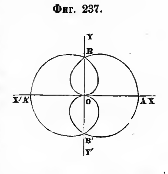
370. *Примѣчаніе III.* Въ томъ случаѣ, когда, измѣняя ω отъ 0 до 2π, получимъ всю кривую, находимъ симметрію относительно полярной оси OX, когда величины α и $2\pi-\alpha$, даваемыя ω, даютъ снова одну и ту же величину ρ, или когда величины α и $\pi-\alpha$ даютъ равныя величины ρ и съ обратными знаками. Точно также получимъ симметрію относительно перпендикуляра OY, когда углы α и $\pi-\alpha$ даютъ одну и ту же величину ρ или углы α и $2\pi-\alpha$ даютъ равныя величины и съ обратными знаками. Наконецъ симметрію, относительно полюса, получимъ, когда углы α и $\pi+\alpha$ даютъ одну и ту же величину ρ.

Но если для полученія всей кривой будетъ необходимо измѣнять ω далѣе 2π, тогда симметрія можетъ представиться иначе. Напримѣръ, если будетъ необходимо измѣнять ω отъ 0 до 4π, то симметрія, относительно полярной оси, будетъ тогда, когда углы α и $2\pi-\alpha$ или α и $4\pi-\alpha$ дадутъ для ρ равныя величины или когда углы α и $\pi-\alpha$ или α и $3\pi-\alpha$ дадутъ для ρ величины равныя и съ обратными знаками. Если предѣлы ω будутъ очень пространны, то число сравненій будетъ увеличиваться.

Разсмотримъ, напримѣръ, кривую, опредѣляемую уравненіемъ $\rho=\cos\frac{\omega}{2}$. Когда x увеличивается до двухъ разъ 2π, тогда направленіе радіуса вектора снова будетъ то же; сверхъ того, такъ какъ $\frac{\omega}{2}$ увеличивается до 2π, ρ снова получаетъ ту же величину, и мы найдемъ точку, уже полученную прежде; слѣдовательно, ω надобно измѣнять отъ 0 до 4π. Если ω будетъ увеличиваться отъ 2π, то радіусъ векторъ возвра-

тится къ тому же положенію; но такъ какъ $\frac{\omega}{2}$ увеличивается только до π, то ϱ сохраняетъ ту же числовую величину, перемѣняя знакъ; отсюда заключаемъ, что часть геометрическаго мѣста, опредѣляемаго величинами ω, заключающимися между 2π и 4π, симметрична, относительно полюса, части, опредѣляемой величинами ω, заключающимися между 0 и 2π; другими словами, полюсъ есть центръ кривой. При $\omega = \alpha$ и $\omega = 2\pi - \alpha$, величины ϱ равны и имѣютъ обратные знаки; такимъ образомъ получаемъ двѣ точки, расположенныя симметрично относительно перпендикуляра OY, проведеннаго къ полярной оси (*фиг.* 237). Эта прямая YO есть ось кривой. Когда перемѣнное ω увеличивается отъ 0 до π, ϱ уменьшается отъ 1 до 0, и мы получимъ дугу ABO, касающуюся прямой OX′ въ точкѣ O. Величины ω, заключающіяся между π и 2π, дадутъ дугу OBA′, симметричную первой относительно OY, а величины ω, заключающіяся между 2π и 4π, опредѣляютъ кривую A′B′OB′A, симметричную ABOBA′ относительно полюса. Такимъ образомъ кривая состоитъ изъ четырехъ равныхъ дугъ. Полярная ось есть также ось кривой; это можно видѣть прямо, замѣчая, что при величинахъ ω, α и $4\pi - \alpha$, величины ϱ будутъ равны.

Фиг. 237.

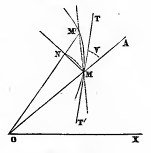


Касательная.

371. Направленіе касательной MT, проведенной въ точкѣ M, опредѣляется угломъ V, который она образуетъ съ продолженіемъ MA радіуса вектора.

Пусть ρ и ω будутъ координаты точки M; $\rho + \Delta\rho$ и $\omega + \Delta\omega$ координаты сосѣдней точки M′ (*фиг.* 238). Проведемъ сѣкущую MM′, и изъ полюса, какъ центра, радіусомъ OM опишемъ дугу круга MN; уголъ MOM′ есть приращеніе $\Delta\omega$ полярнаго угла, NM′ есть приращеніе $\Delta\rho$ радіуса вектора. Изъ треугольника NMM′ находимъ

Фиг. 238.



$$\frac{\sin OM'M}{\sin NMM'} = \frac{\text{хордѣ } MN}{M'N} + \frac{\text{хордѣ } MN}{\text{дуга } MN} \times \frac{\text{дуга } MN}{M'N} = \frac{\text{хордѣ } MN}{\text{дуга } MN} \cdot \frac{\varrho\Delta\omega}{\Delta\varrho}.$$

Если сѣкущую будемъ поворачивать около точки M такъ, чтобы точка M′ безпредѣльно приближалась къ точкѣ M, то предѣлъ сѣкущей MM′ будетъ касательная MT; предѣлъ хорды MN будетъ касательная, проведенная къ дугѣ круга, и слѣдовательно, перпендикуляръ къ радіусу OA; такимъ образомъ получимъ

$$\lim OM'M = OMT' = V,$$

$$\lim NMM' = \frac{\pi}{2} - V;$$

сверхъ того извѣстно, что предѣлъ отношенія дуги круга къ ея хордѣ равенъ единицѣ; поэтому вмѣсто предъидущаго уравненія получимъ

$$\frac{\sin V}{\cos V} = \rho \lim \frac{\Delta\omega}{\Delta\rho}, \text{ или } \operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\lim \frac{\Delta\rho}{\Delta\omega}} = \frac{\rho}{\rho'},$$

гдѣ ρ' означаетъ производную отъ ρ, разсматривая его, какъ функцію отъ ω.

Въ предъидущей фигурѣ мы предполагали, что радіусъ векторъ возрастаетъ вмѣстѣ съ угломъ ω; если онъ будетъ уменьшаться, то изъ треугольника NMM' (*фиг.* 239) находимъ

$$\frac{\sin OM'M}{-\sin NMM'} = \frac{\text{хордѣ } MN}{\text{дуга } MN} \times \frac{\text{дуга } MN}{-M'N} = \frac{\text{хордѣ } MN}{\text{дугѣ } MN} \times \frac{\rho\Delta\omega}{\Delta\rho};$$

Фиг. 239.

такъ какъ углы OM'M, NMM' предѣлами имѣютъ V и $V - \frac{\pi}{2}$, то снова получимъ ту же формулу.

Когда ω возрастаетъ, тогда подвигаемся на кривой въ извѣстномъ направленіи; V означаетъ уголъ, который образуетъ касательная, проведенная по направленію движенія, съ направленіемъ опредѣляемымъ угломъ ω. Очевидно также, что эта же формула остается справедливою и для того случая, когда радіусъ векторъ будетъ отрицательный.

372. *Замѣчаніе*. Если радіусъ векторъ обращается въ нуль при частной величинѣ ω, напримѣръ при ω_0, то получимъ вѣтвь кривой OC, проходящей черезъ полюсъ, а касательная, проведенная къ этой вѣтви въ полюсѣ, будетъ прямая OA, опредѣляемая угломъ ω_0. Дѣйствительно, если возьмемъ сосѣднюю точку M и если сѣкущую OM повернемъ такъ, чтобы точка M приблизилась къ точкѣ O, то ρ обратится въ нуль и сѣкущая будетъ приближаться къ направленію OA.

Фиг. 240.



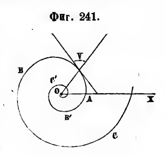
373. *Примѣръ I. Спираль Архимеда.* Уравненіе этой кривой есть $\rho = b\omega$ (§ 367), отсюда $\rho' = b$; слѣдовательно,

$$\operatorname{tg} V = \frac{\rho}{\rho'} = \frac{b\omega}{b} = \omega.$$

Если точка M будетъ двигаться отъ полюса по кривой, то уголъ V, который прежде былъ нуль, будетъ постоянно увеличиваться и приближаться къ прямому углу.

Примѣръ II. Логариѳмическая спираль. Логариѳмическою спиралью называется кривая, полярное уравненіе которой есть $\varrho = ae^{m\omega}$, гдѣ a означаетъ данную линію, а m число. Положимъ, что постоянное m есть число положительное. Если ω будетъ возрастать отъ 0 до безконечности, то ϱ будетъ постоянно увеличиваться отъ a до безконечности, и мы получимъ безконечную вѣтвь ABC..., образующую безконечное число оборотовъ около полюса. Если потомъ ω будемъ измѣнять отъ 0 до $-\infty$, то ϱ будетъ постоянно уменьшаться и приближаться къ нулю, и мы получимъ вторую безконечную вѣтвь AB'C'..., которая дѣлаетъ безконечное число оборотовъ около полюса, постоянно приближаясь къ этой точкѣ. Если постоянное m будетъ отрицательное, то положительныя величины ω дадутъ вѣтвь, приближающуюся къ полюсу, а отрицательныя величины — вѣтвь, удаляющуюся отъ него. Въ этомъ случаѣ $\varrho' = mae^{m\omega} = m\varrho$ откуда $\operatorname{tg} V = \frac{1}{m}$. Отсюда заключаемъ, что касательная къ кривой образуетъ съ радіусомъ векторомъ постоянный уголъ.

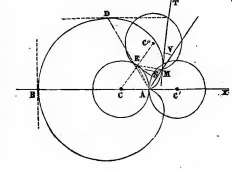
Фиг. 241.



374. *Примѣръ III. Эпициклоида.* Когда одинъ кругъ катится по неподвижному кругу, то точка движущагося круга опишетъ въ плоскости кривую, которая называется *эпициклоидою.*

Ограничимся тѣмъ случаемъ, когда оба круга равны. Пусть C будетъ неподвижный кругъ, C' начальное положеніе движущагося круга, a радіусъ; положимъ, что точка, которая при движеніи круга C' описываетъ эпициклоиду (*фиг.* 242), будетъ точка прикосновенія A. Когда движущійся кругъ приходитъ въ положеніе C'', точка A придетъ въ M, потому что дуги EA, EM равны. Возьмемъ точку A за полюсъ, продолженіе линіи CA за полярную ось; прямая AM, перпендикулярная къ касательной AN, общей къ двумъ кругамъ, параллельна CE; уголъ AEN равенъ половинѣ ACE, и слѣдовательно, половинѣ ω. Изъ треугольника ANE находимъ $AN = AE \sin\frac{\omega}{2}$; но $AE = 2a \sin\frac{\omega}{2}$; слѣдовательно,

Фиг. 242.



$$\varrho = 4a \sin^2\frac{\omega}{2} = 2a\,(1-\cos\,\omega).$$

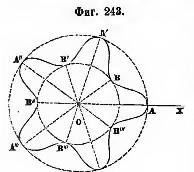
Эта кривая есть частный случай улиткообразной линіи Паскаля (§ 35). Въ нашемъ случаѣ мы имѣемъ $\varrho' = 2a \sin\omega$, откуда $\operatorname{tg} V = \operatorname{tg}\frac{\omega}{2}$ и слѣдовательно, $V = \frac{\omega}{2}$.

Легко видѣть, что нормаль, проведенная къ эпициклоидѣ въ какой-нибудь точкѣ M, проходитъ черезъ точку прикосновенія E, движущагося круга съ неподвижнымъ кругомъ; дѣйствительно, уголъ MEN равенъ $\frac{\omega}{2}$, а слѣдовательно V; поэтому прямая перпендикулярна къ MT.

375. *Примѣръ IV. Построить кривую* $\varrho = 4 + \cos 5\omega$.

Достаточно ω измѣнять отъ 0 до 2π. Радіусъ векторъ ϱ при этомъ постоянно будетъ заключаться между 3 и 5; слѣдовательно, описавъ изъ полюса, какъ центра, два круга радіусами равными 3 и 5, увидимъ, что кривая будетъ вся заключаться между двумя окружностями (*фиг.* 243). Когда ω измѣняется отъ 0 до $\frac{\pi}{5}$, ϱ уменьшается отъ 5 до 3, и мы получимъ дугу AB. При измѣненіи ω отъ $\frac{\pi}{5}$ до $\frac{2\pi}{5}$, ϱ увеличивается отъ 3 до 5, и мы получимъ дугу BA′ симметричную первой относительно линіи OB. Такимъ образомъ уголъ 5ω измѣняется отъ 0 до 2π. Если будемъ измѣнять ω отъ $\frac{2\pi}{5}$ до $\frac{4\pi}{5}$, то уголъ 5ω будетъ измѣняться отъ 2π до 4π, и однѣ и тѣ же величины ϱ будутъ повторяться въ одномъ и томъ же порядкѣ; такимъ образомъ получимъ вторую дугу A′B′A″, равную первой; потомъ третью и такъ далѣе. Послѣ пятой дуги; снова придемъ къ начальной точкѣ.

Фиг. 243.



Взявъ производную, получимъ $\operatorname{tg} V = -\frac{\varrho}{5 \sin 5\omega}$. Въ точкахъ A и B мы имѣемъ $\sin\ 5\omega = 0$, и слѣдовательно, $V = \frac{\pi}{2}$.

376. *Примѣръ V. Жукъ.* Концы прямой, имѣющей постоянную длину, двигаются по двумъ прямымъ OX, OY, перпендикулярнымъ между собою; изъ опредѣленной точки I, находящейся по линіи, раздѣляющей уголъ прямыхъ пополамъ, опускаемъ перпендикуляръ на движущуюся прямую; найти геометрическое мѣсто подошвы этого перпендикуляра (*фиг.* 244).

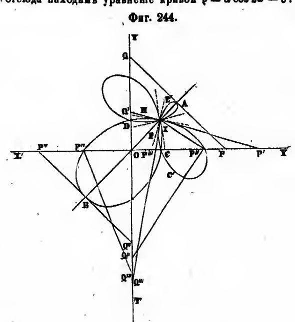
Очевидно, что геометрическое мѣсто будетъ симметрично, относительно линіи OI. Помѣстивъ сперва движущуюся прямую въ положеніе PQ, перпендикулярно къ линіи, раздѣляющей уголъ YOX пополамъ, получимъ точку A геометрическаго мѣста. Передвигаемъ прямую такъ, чтобы конецъ Q опускался по оси y; въ извѣстномъ положеніи P′Q′ прямая пройдетъ черезъ точку I, которая принадлежитъ геометрическому мѣсту; такимъ образомъ получимъ дугу AEI, касательная къ которой въ точкѣ I будетъ перпендикулярна къ P′Q′. Когда конецъ Q′ продолжаетъ опускаться, прямая совпадаетъ съ OX, и мы получимъ дугу IFC, которая проходитъ черезъ точку C, подошву перпендикуляра опущеннаго изъ точки I на OX. Далѣе конецъ Q двигается по OY′ и кривая проходитъ подъ OX; когда прямая займетъ такое положеніе P″Q″, что уголъ IP″Q″ будетъ прямой, и мы получимъ точку P″, получимъ такимъ образомъ дугу CGP.

Когда конецъ Q″ опускается далѣе, то кривая будетъ идти снова подъ OX; въ положеніи P‴Q‴ продолженная прямая проходитъ черезъ точку I; такимъ образомъ получимъ дугу P″I, касательная которой въ I перпендикулярна къ P‴Q‴. При дальнѣйшемъ движеніи, конецъ P‴ приближается къ точкѣ O, а прямая совпадетъ съ OI, тогда получимъ дугу IHD, которая проходитъ черезъ точку D, подошву перпендикуляра опущеннаго изъ точки I на OI. Далѣе конецъ P‴ двигается по OX′ и когда прямая займетъ такое положеніе PᴵᵛQᴵᵛ, что уголъ IPᴵᵛQᴵᵛ будетъ прямой, точка Pᴵᵛ будетъ принадлежать геометрическому мѣсту; такимъ образомъ получимъ дугу DPᵛᴵ.

Наконецъ, прямая въ положеніи Q^vP^v будетъ перпендикулярна къ линіи OB, раздѣляющей уголъ X'OY' пополамъ, и мы получимъ дугу $P^{IV}B$. Если, возвратясь къ первоначальному положенію PQ, будемъ двигать прямую въ обратномъ направленіи до предѣльнаго положенія P^vQ^v, то, очевидно, получимъ кривую симметричную предъидущей относительно прямой AB.

Возьмемъ точку I за полюсъ, а линію BA, дѣлящую углы YOX, Y'OX' пополамъ, за полярную ось; назовемъ черезъ c разстояніе OI и черезъ $2a$ длину движущейся прямой PQ; прямая, соединяющая точку O съ срединою гипотенузы PQ прямоугольнаго треугольника POQ, равна a; уголъ, образуемый этою прямою съ перпендикуляромъ h, опущеннымъ изъ точки O на гипотенузу, равенъ 2ω; сверхъ того имѣемъ $h = c\cos\omega + \rho$; отсюда находимъ уравненіе кривой $\rho = a\cos 2\omega - c.\cos\omega$.

Фиг. 244.



Выпуклость и вогнутость.

377. Разсмотримъ на дугѣ кривой точку M, координаты которой суть ω_0 и ρ_0; касательная въ этой точкѣ выражается уравненіемъ $r = \frac{q}{\cos(\omega - \beta)}$, называя черезъ q длину перпендикуляра, опущеннаго изъ полюса на касательную, и черезъ β уголъ, образуемый этимъ перпендикуляромъ съ полярною осью (§ 82).

Положеніе кривой относительно касательной вблизи точки M зависитъ, при одной и той же величинѣ ω, отъ знака разности $r - \rho$ радіусовъ векторовъ, или отъ разности $\frac{1}{\rho} - \frac{1}{r}$, предполагая, что эти радіусы векторы будутъ положительны. Назовемъ черезъ z эту послѣднюю разность.

Въ точкѣ M, очевидно, величина z равна нулю; первая ея производная

$$z' = \left(\frac{1}{\varrho}\right)' - \left(\frac{1}{r}\right)' = \left(\frac{1}{\varrho}\right)' + \frac{\sin(\omega - \beta)}{q}$$

также равна нулю, потому что въ точкѣ M (§ 371)

$$\left(\frac{1}{\varrho}\right)' = -\frac{\varrho'}{\varrho^2} = -\frac{\cos V}{\varrho_0}, \ \sin(\omega_0 - \beta) = \cos V, \ q = \varrho_0 \sin V.$$

Вторая производная

$$z'' = \left(\frac{1}{\varrho}\right)'' + \frac{\cos(\omega - \beta)}{q} = \left(\frac{1}{\varrho}\right)'' + \frac{1}{r}.$$

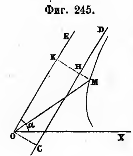
въ точкѣ M равна $\frac{1}{\varrho} + \left(\frac{1}{\varrho}\right)''$.

Повторивъ здѣсь тѣ же разсужденія, какъ въ § 342, увидимъ, что если это количество будетъ положительное, то разность z, вблизи точки M, будетъ положительная, и, слѣдовательно, кривая будетъ расположена съ той стороны касательной, гдѣ находится полюсъ, и наоборотъ, если это количество будетъ отрицательное, то разность z будетъ отрицательная и кривая будетъ расположена съ другой стороны касательной. Когда величина $\frac{1}{\varrho} + \left(\frac{1}{\varrho}\right)''$ перемѣнитъ знакъ, получимъ точку перегиба.

Асимптоты.

378. Разсмотримъ безконечную вѣтвь, асимптотическую къ прямой CD (*фиг.* 245). Если полюсъ соединимъ съ точкою M кривой и если предположимъ, что точка M безпредѣльно удаляется по кривой, то линія OM предѣломъ будетъ имѣть асимптоту LO. Такимъ образомъ, *когда радіусъ векторъ ϱ при частной величинѣ ω, напримѣръ при α, дѣлается безконечнымъ, и если полученная такимъ образомъ вѣтвь будетъ имѣть асимптоту, то эта асимптота будетъ параллельна направленію, опредѣленному тѣмъ угломъ α, который обращаетъ ϱ въ безконечность.*

Фиг. 245.



Чтобы опредѣлить разстояніе OG асимптоты отъ прямой OL, изъ точки M кривой, опускаемъ перпендикуляръ MK на эту прямую; тогда изъ треугольника MOK находимъ

$$MK = OM \sin KOM = \varrho \sin(\alpha - \omega).$$

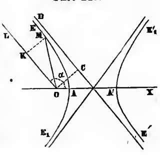
Если произведеніе $\rho \sin(\alpha - \omega)$ не будетъ приближаться ни къ какому предѣлу, то безконечная вѣтвь не будетъ имѣть асимптоты. Если, наоборотъ, это произведеніе будетъ приближаться къ конечному предѣлу d, то вѣтвь кривой будетъ имѣть асимптотою прямую CD, находящуюся на разтояніи d отъ радіуса OL; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ разстояніе MK предѣломъ имѣетъ d, то разстояніе MH предѣломъ будетъ имѣть нуль.

Если безконечная вѣтвь получается тогда, когда ω будетъ увеличиваться до α, то очевидно, что, если эта вѣтвь будетъ имѣть асимптоту, то эта асимптота будетъ расположена относительно OL такъ, какъ показано на фигурѣ. Если безконечная вѣтвь получится тогда, когда ω будетъ уменьшаться до α, то асимптота будетъ расположена по другую сторону OL, и разстояніе ея отъ OL будетъ предѣломъ произведенія $\rho \sin(\omega - \alpha)$.

Мы предполагали, что вѣтвь кривой опредѣляется положительнымъ радіусомъ векторомъ; если бы она опредѣлялась отрицательнымъ радіусомъ векторомъ, то въ первомъ случаѣ получили бы $MK = -\rho \sin(\alpha - \omega)$, во второмъ $MK = -\rho \sin(\omega - \alpha)$.

379. *Примѣръ V. Гипербола.* Полярное уравненіе этой кривой (§ 263) есть $\rho = \frac{p}{1 + e\cos\omega}$, въ которомъ e болѣе 1. Пусть α будетъ уголъ, косинусъ котораго равенъ $-\frac{1}{e}$; при возрастаніи ω отъ 0 до α, ρ возрастаетъ отъ $\frac{p}{1+e}$ до ∞, и мы получимъ безконечную вѣтвь AE. При измѣненіи ω отъ α до π, ρ сдѣлается отрицательнымъ и будетъ измѣняться отъ $-\infty$ до $-\frac{p}{e-1}$; такимъ образомъ получимъ безконечную вѣтвь E′A′. Величины ω, заключающіяся между π и 2π, даютъ двѣ вѣтви, симметричныя предъидущимъ относительно полярной оси.

Фиг. 246.



Разстояніе MK точки одной изъ вѣтвей AE, A′E′ отъ прямой OL выразится

$$MK = \frac{p\sin(\alpha - \omega)}{1 + e\cos\omega} = \frac{p\sin(\alpha - \omega)}{e\left(\frac{1}{e} + \cos\omega\right)} = \frac{p\sin(\alpha - \omega)}{e(\cos\omega - \cos\alpha)}$$

преобразивъ разность $\cos\omega - \cos\alpha$ въ произведеніе и замѣнивъ $\sin(\alpha - \omega)$ черезъ $2\sin\frac{\alpha - \omega}{2}\cos\frac{\alpha - \omega}{2}$, и сокративъ на общаго множителя $\sin\frac{\alpha - \omega}{2}$, получимъ

$$\mathrm{MK} = \frac{p\cos\frac{\alpha-\omega}{2}}{e\sin\frac{\alpha+\omega}{2}}.$$

Это разстояніе предѣломъ имѣетъ $\mathrm{OC} = \frac{p}{e\sin\alpha}$, и такимъ образомъ мы получимъ асимптоту CD. Асимптота двухъ другихъ вѣтвей расположена симметрично относительно полярной оси.

Излишекъ разстоянія MK надъ его предѣломъ a выражается

$$\delta = \frac{p}{e}\left(\frac{\cos\frac{\alpha-\omega}{2}}{\sin\frac{\alpha+\omega}{2}} - \frac{1}{\sin\alpha}\right) = \frac{p}{e}\cdot\frac{2\sin\alpha\cos\frac{\alpha-\omega}{2} - 2\sin\frac{\alpha+\omega}{2}}{2\sin\alpha\sin\frac{\alpha+\omega}{2}};$$

Замѣнимъ произведеніе $2\sin\alpha\cos\frac{\alpha-\omega}{2}$ суммою

$$\sin\frac{3\alpha-\omega}{2} + \sin\frac{\alpha+\omega}{2},$$

получимъ

$$\delta = \frac{p}{e}\cdot\frac{\sin\frac{3\alpha-\omega}{2} - \sin\frac{\alpha+\omega}{2}}{2\sin\alpha\sin\frac{\alpha+\omega}{2}};$$

если потомъ числителя преобразуемъ въ произведеніе, то окончательно получимъ

$$\delta = \frac{p\sin\frac{\alpha-\omega}{2}\cos\alpha}{e\sin\alpha\sin\frac{\alpha+\omega}{2}} = \frac{p\sin\frac{\omega-\alpha}{2}}{e^2\sin\alpha\sin\frac{\omega+\alpha}{2}}.$$

При измѣненіи ω отъ 0 до α, разность δ будетъ отрицательная; такимъ образомъ вѣтвь AE заключается между параллельными OL и CD. Но когда ω измѣняется отъ α до π, разность δ будетъ положительная, и вѣтвь E'A' будетъ находиться внѣ параллельныхъ.

380. *Примѣръ VI. Наклоненная строфоида.* Въ построеніи прямой строфоиды, какъ было показано въ § 31, мы предполагали, что прямыя OX и OY перпендикулярны между собой. Положимъ теперь, что эти прямыя составляютъ между собою уголъ θ (*фиг.* 247); черезъ опредѣленную точку A, находящуюся на одной изъ нихъ, проводимъ какую-нибудь сѣкущую AD, на которой отъ точки D откладываемъ линіи DM и DN, равныя DO, и найдемъ геометрическое мѣсто точекъ M и N.

Когда сѣкущая обращается въ тупомъ углѣ XOY до тѣхъ поръ, пока сдѣлается параллельною OY, точка M опишетъ дугу OMB, оканчивающуюся въ точкѣ B на линіи OB, перпендикулярной къ OY; при этомъ точка N опишетъ безконечную вѣтвь ON. Если возьмемъ разстояніе OG равное OA, и чрезъ точку G проведемъ линію H'H параллельно OY, то линія HH' будетъ асимптота къ вѣтви ON; въ самомъ дѣлѣ, такъ

какъ наклонная линія FN равная AM предѣломъ имѣетъ AB, то разстояніе точки N отъ прямой предѣломъ имѣетъ нуль.

Обращаемъ теперь сѣкущую въ остромъ углѣ XOY′; тогда перпендикуляръ, возстановленный изъ средины OA, пересѣчетъ OY′ въ точкѣ C такъ, что $CA = CO$; когда сѣкущая занимаетъ положеніе AC, тогда одна изъ точекъ придетъ въ A, другая въ E; такимъ образомъ, при обращеніи сѣкущей отъ AO къ AC, получимъ дугу OM′A, касающуюся прямой AC въ точкѣ A, и дугу OE. При дальнѣйшемъ движеніи сѣкущей, прямая OD′ становится болѣе AD′ или D′F′, и точка N′ будетъ находиться за асимптотою; такимъ образомъ получимъ безконечную вѣтвь EN′ и дугу AM″B, которая въ точкѣ B совпадаетъ съ дугою OMB. Очевидно, что касательная, проведенная въ точкѣ O, раздѣляетъ углы, образуемые прямыми OX и OY пополамъ.

Фиг. 247.

Возьмемъ точку O за полюсъ, прямую OX за полярную ось, черезъ a назовемъ разстояніе OA и черезъ θ уголъ YOX; такъ какъ углы DOM и DMO равны $\theta - \omega$, и уголъ OAD равенъ $\theta - 2\omega$, то изъ треугольника OMA получимъ

$$(1) \qquad \varrho = \frac{a \sin(\theta - 2\omega)}{\sin(\theta - \omega)}.$$

Изъ этого уравненія легко найдемъ всѣ свойства, которыя мы вывели изъ геометрическаго опредѣленія кривой.

Если же прямую OY возьмемъ за полярную ось, то уравненіе кривой будетъ

$$(2) \qquad \varrho = \frac{a \sin(2\omega + \theta)}{\sin \theta}.$$

381. *Примѣръ VII. Найти геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія касательныхъ, проведенныхъ изъ данной точки* P *къ различнымъ кривымъ втораго порядка, которыя фокусами имѣютъ двѣ данныя точки* F *и* F′.

Фиг. 248.

Возьмемъ за оси прямую F′F (*фиг.* 248) и перпендикуляръ, возставленный изъ средины этой прямой. Общее уравненіе коническихъ сѣченій, имѣющихъ фокусами точки F и F′, есть

$$(1) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

гдѣ c означаютъ разстояніе OF, и a перемѣнный параметръ. Если a болѣе c, то кривая будетъ эллипсъ; если a меньше c, то кривая будетъ гипербола. Пусть α, β будутъ координаты данной точки P; тогда уравненіе хорды прикосновеній касательныхъ, проведенныхъ изъ точки P къ коническому сѣченію (1), будетъ

(2) $$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{a^2-c^2}=1.$$

Исключивъ изъ уравненій (1) и (2) параметръ a, получимъ уравненіе геометрическаго мѣста. Если эти уравненія вычтемъ по-членно, то получимъ

$$\frac{x^2-\alpha x}{a^2}+\frac{y^2-\beta y}{a^2-c^2}=0;$$

откуда

$$a^2=\frac{c^2(x^2-\alpha x)}{x^2+y^2-\alpha x-\beta y};\quad a^2-c^2=\frac{-c^2(y^2-\beta y)}{x^2+y^2-\alpha x-\beta y};$$

внеся въ уравненіе (2), получимъ уравненіе геометрическаго мѣста

(3) $$(x^2+y^2-\alpha x-\beta y)(\beta x-\alpha y)+c^2(x-\alpha)(y-\beta)=0.$$

Геометрическое мѣсто есть третьяго порядка, оно проходитъ черезъ данную точку P, черезъ фокусы F и F′ и черезъ проекціи точки P на прямыя OX, OY.

Если оси перенесемъ въ точку P параллельно самимъ себѣ, то уравненіе геометрическаго мѣста будетъ

(4) $$(x^2+y^2+\alpha x+\beta y)(\beta x-\alpha y)+c^2xy=0.$$

Если эти координаты преобразуемъ въ полярныя, принимая за полюсъ точку P, а за полярную ось прямую PX′, то получимъ

(5) $$\rho=\frac{(c^2+b^2-\alpha^2)\sin 2\omega+2\alpha\beta\cos 2\omega}{2(\alpha\sin\omega-\beta\cos\omega)}.$$

Съ помощію вспомогательныхъ угловъ φ и φ_1, опредѣляемыхъ изъ формулъ

$$\varphi=\frac{\beta}{\alpha},\ \operatorname{tg}\varphi_1=\frac{2\alpha\beta}{c^2+\beta^2-\alpha^2};$$

это уравненіе получитъ видъ

(6) $$\rho=\frac{d\sin(2\omega+\varphi_1)}{\sin(\omega-\varphi)},$$

гдѣ буква d означаетъ величину.

$$d=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{(c^2+\beta^2-\alpha^2)^2+4\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Если полярную ось повернемъ на уголъ φ, то уравненіе (6) сдѣлается тожественнымъ съ уравненіемъ (2) наклонной строфоиды (§ 380).

Такъ какъ уголъ φ равенъ POA, то асимптота параллельна прямой OP. Между разсматриваемыми однофокусными кривыми находятся гипербола и эллипсъ, проходящіе черезъ точку P; отсюда заключаемъ, что точка P принадлежитъ геометрическому мѣсту, и что касательныя въ этой точкѣ суть линіи PQ, PQ′, раздѣляющія углы, образуемые прямыми PF и PF′ пополамъ. Строфоида опредѣляется двумя прямыми PE, PI и точкою I, находящеюся на одной изъ нихъ. Прямая PE извѣстна; прямую же PI получимъ, замѣтивъ, что касательная PQ есть линія, раздѣляющая уголъ EPI пополамъ;

точку I найдемъ помощію одной изъ точекъ геометрическаго мѣста, напримѣръ помощію точки A; прямая IA должна быть такая, чтобы KA = KP; слѣдовательно, точка K есть средина діагонали OP.

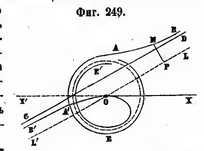
Предъидущая кривая есть также геометрическое мѣсто подошвъ нормалей, проведенныхъ изъ точки P къ кривымъ второй степени, которыя фокусами имѣютъ точки F и F'; дѣйствительно, такъ какъ однофокусные эллипсъ и гипербола пересѣкаются подъ прямымъ угломъ, то касательная къ одной есть нормаль къ другой.

382. *Примѣръ VIII. Построить кривую*

$$\varrho = a\frac{2\omega}{2\omega - 1}.$$

При $\omega = 0$ величина ϱ обращается въ нуль; при $\omega = \frac{1}{2}$, ϱ обращается въ безконечность. Проводимъ черезъ полюсъ прямую L'L, которая съ полярною осью составила бы уголъ равный $\frac{1}{2}$ (*фиг.* 249). При измѣненіи ω отъ 0 до $\frac{1}{2}$, ϱ будетъ отрицательное и измѣняется отъ 0 до $-\infty$, и мы получимъ безконечную вѣтвь OA'B', касательную къ полярной оси и расположенную въ углѣ X'OL'. Когда ω переходитъ $\frac{1}{2}$ и увеличивается отъ $\frac{1}{2}$ до ∞, ϱ дѣлается положительнымъ и уменьшается отъ ∞ до a: такимъ образомъ получимъ первую безконечную вѣтвь AB; потомъ вторую AE, которая дѣлаетъ безконечное число оборотовъ около круга, описаннаго изъ полюса, какъ центра, радіусомъ равнымъ a, постоянно приближаясь къ кругу. Когда ω измѣняется отъ 0 до $-\infty$, ϱ остается положительнымъ и увеличивается отъ 0 до a, и мы получимъ вѣтвь OE' внутри круга; эта вѣтвь дѣлаетъ безконечное число оборотовъ, постоянно приближаясь къ кругу.

Фиг. 249.



Разсмотримъ одну изъ безконечныхъ вѣтвей A'B', AB. Разстояніе MP точки одной изъ этихъ вѣтвей отъ прямой L'L выражается

$$\varrho \sin\left(\omega - \frac{1}{2}\right) = a\omega\frac{\sin\left(\omega - \frac{1}{2}\right)}{\omega - \frac{1}{2}};$$

предѣлъ этой величины, когда ω приближается къ $\frac{1}{2}$, есть $\frac{a}{2}$. Слѣдовательно, обѣ вѣтви A'B', AB имѣютъ асимптотою прямую CD, находящуюся отъ LL на разстояніи $\frac{a}{2}$.

Если положимъ $\omega = \frac{1}{2} + \omega'$, то излишекъ разстоянія MP надъ его предѣломъ будетъ

$$\delta = \frac{a}{2\omega'}[(1 - 2\omega')\sin\omega' - \omega'].$$

При $\omega' = 0$ величина, находящаяся въ скобкахъ, обращается въ нуль; первая производная ея также обращается въ нуль; но вторая производная имѣетъ положительную величину. Если ω' будетъ увеличиваться отъ нуля, то отсюда заключаемъ, что первая производная начинаетъ увеличиваться, и, слѣдовательно, она положительна и точно такъ же, какъ величина находящаяся въ скобкахъ; такимъ образомъ при положительныхъ, достаточно малыхъ величинахъ ω', разность δ есть величина положительная. Точно также увидимъ, что при очень малыхъ отрицательныхъ величинахъ ω' разность δ будетъ величина отрицательная, что впрочемъ видно прямо. Такимъ образомъ обѣ безконечныя вѣтви расположены относительно асимптоты такъ, какъ показано на фигурѣ; кромѣ того очевидно, что эта асимптота пересѣкается кривою въ безконечномъ числѣ точекъ.

383. *Примѣръ IX. Построить кривую*

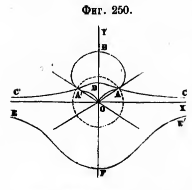
$$\varrho = 1 \pm \sqrt{\frac{2\sin\omega - 1}{\sin\omega}}.$$

Такъ какъ при возрастанiи ω отъ 2π, радiусъ векторъ снова получаетъ одну и ту же величину, то достаточно ω измѣнять отъ 0 до 2π. Чтобы радiусъ векторъ былъ положителенъ, надобно, чтобы дробь, находящаяся подъ радикаломъ, была положительная. При величинахъ ω: $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$ числитель измѣняетъ знакъ, знаменатель — при величинахъ 0 и π. Расположивъ эти углы по порядку ихъ величины

$$0, \frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \pi, 2\pi,$$

видимъ, что количество, находящееся подъ корнемъ, будетъ отрицательное отъ 0 до $\frac{\pi}{6}$, положительнымъ—отъ $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{5\pi}{6}$, отрицательнымъ—отъ $\frac{5\pi}{6}$ до π, положительнымъ отъ π до 2π. Такимъ образомъ всю кривую получимъ, измѣняя ω отъ $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{5\pi}{6}$ и отъ π до 2π. Сверхъ того замѣчаемъ, что дополнительныя величины ω даютъ тѣ же величины ϱ; поэтому кривая симметрична относительно перпендикуляра OY, проведеннаго къ полярной оси OX (*фиг.* 250).

Фиг. 250.



Изъ полюса, какъ центра, радiусомъ, равнымъ единицѣ, опишемъ кругъ; этотъ кругъ раздѣлитъ пополамъ каждую изъ хордъ, проходящихъ черезъ центръ; при измѣненiи ω отъ $\frac{\pi}{6}$ до $\frac{\pi}{2}$, величина радикала, которую мы означимъ черезъ ϱ_1, полагая $\varrho = 1 + \varrho_1$, будетъ возрастать отъ 0 до 1; такимъ образомъ мы получимъ двѣ дуги AB и AO. которыя въ точкѣ A сливаются, касаясь въ этой точкѣ прямой OA; дуга AO касается въ точкѣ O прямой YO. Измѣняя ω отъ $\frac{\pi}{2}$ до $\frac{5\pi}{6}$, получимъ дугу BA'O, симметричную BAO относительно прямой OY.

Когда ω измѣняется отъ π до $\frac{3\pi}{2}$, ϱ_1 уменьшается отъ ∞ до $\sqrt{3}$, и мы получимъ

двѣ безконечныя вѣтви EF и CD; измѣняя ω отъ $\frac{3\pi}{2}$ до 2π, получимъ двѣ вѣтви EF', DC', симметричныя предъидущимъ; эти безконечныя вѣтви суть асимптоты къ полярной оси.

384. *Замѣчаніе*. Перемѣнное разстояніе MK точки M безконечной вѣтви (*фиг*. 245) отъ OL, при которомъ ρ обращается въ безконечность, выражается

$$\pm \rho \sin (\omega - \alpha);$$

когда ω приближается къ α, первый производитель возрастаетъ безпредѣльно, а второй приближается къ нулю. Въ предъидущихъ примѣрахъ можно бы было найти, во что обратится это произведеніе при величинахъ ω, близкихъ къ α; въ случаѣ же большаго затрудненія употребляютъ другой способъ.

Назовемъ черезъ q перпендикуляръ, опущенный изъ полюса на асимптоту; тогда, не обращая вниманія на знакъ, получимъ

$$q = \lim \rho \sin (\omega - \alpha),$$

и слѣдовательно,

$$\frac{1}{q} = \lim \frac{\omega - \alpha}{\sin (\omega - \alpha)} \cdot \frac{\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\omega - \alpha}.$$

Предѣлъ перваго отношенія равенъ единицѣ. Если $\frac{1}{\rho}$ будемъ разсматривать какъ функцію отъ ω, то числитель втораго отношенія выразитъ приращеніе, которое получаетъ эта дробь, когда полярный уголъ переходитъ отъ величины α къ величинѣ ω; слѣдовательно, предѣлъ этого втораго отношенія равенъ производной отъ $\frac{1}{\rho}$, и при $\omega = \alpha$ получимъ

$$\frac{1}{q} = \left(\frac{1}{\rho}\right)'.$$

Величина ρ обыкновенно представляется въ видѣ $\rho = \frac{F(\omega)}{f(\omega)}$, потому что при $\omega = \alpha$ знаменатель обращается въ нуль, между тѣмъ какъ числитель сохраняетъ конечную величину, неравную нулю. Отсюда находимъ производную

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)' = \frac{F(\omega) f'(\omega) - f(\omega) F'(\omega)}{F^2(\omega)},$$

которая, при $\omega = \alpha$, обращается въ $\frac{f'(\alpha)}{F(\alpha)}$. Такимъ образомъ получаемъ формулу

$$q = \frac{F(\alpha)}{f'(\alpha)}.$$

которая въ практикѣ очень удобна.

ПРИМѢРЫ.

1. Найти геометрическое мѣсто вершины перемѣнной параболы, которая имѣетъ данный фокусъ и которая касается коническаго сѣченія, имѣющаго тотъ же фокусъ (улиткообразная линія).

2. Даны неподвижная точка O и неподвижная прямая OP; найти геометрическое мѣсто вершины M перемѣннаго треугольника MON, который выполняетъ слѣдующія условія; сторона ON имѣетъ постоянннную длину a, сторона $NM = a\sqrt{2}$, наконецъ углы удовлетворяютъ отношенію (cos MON — 20 MN) = cos MOP (лемниската); доказать, что касательная, проведенная въ какой-нибудь точкѣ M геометрическаго мѣста, проходитъ черезъ центръ круга, описаннаго около треугольника, который опредѣляетъ эту точку.

3. Треугольникъ ABC вписанъ въ данный кругъ, вершина A остается неподвижною и уголъ A постояннымъ; спрашивается геометрическое мѣсто центра круга, вписаннаго въ треугольникъ ABC (улитка).

4. Найти геометрическое мѣсто вершины постояннаго угла, обѣ стороны котораго касаются двухъ данныхъ окружностей (улитка).

5. Найти геометрическое мѣсто фокусовъ параболъ, которыя имѣютъ общую хорду и общую касательную, параллельную этой хордѣ.

6. Данъ неизмѣняемый кругъ; перемѣнный кругъ касается перваго въ данной точкѣ; спрашивается геометрическое мѣсто точки прикосновенія на этомъ послѣднемъ кругѣ общей касательной къ двумъ кругамъ.

7. Найти геометрическое мѣсто вершинъ или фокусовъ равносторонней гиперболы, центръ которой неподвиженъ, и которая проходитъ черезъ данную точку.

8. Найти геометрическое мѣсто центра данной равносторонней гиперболы, которая должна проходить черезъ двѣ опредѣленныя точки.

9. Данъ прямой уголъ YOX и опредѣленная точка P не биссектрисѣ этого угла; спрашивается геометрическое мѣсто подошвы перпендикуляра, опущеннаго изъ точки P на перемѣнную сѣкущую, которая отсѣкаетъ въ углѣ треугольникъ постоянной площади.

10. Въ предъидущей задачѣ параболу замѣнимъ гиперболою; возьмемъ точку N на одной изъ двухъ осей кривой; найти геометрическое мѣсто.

11. Парабола обращается около ея фокуса; спрашивается геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія касательныхъ, проведенныхъ параллельно данной прямой.

12. Найти геометрическое мѣсто средины хорды, нормальной къ данной гиперболѣ.

13. Данъ эллипсъ, черезъ центръ круга постояннаго радіуса проходитъ діаметръ эллипса; найти геометрическое мѣсто точекъ касательныхъ общихъ къ кругу и эллипсу.

14. Дана равносторонняя гипербола, центръ круга, который постоянно проходитъ черезъ центръ гиперболы, описываетъ асимптоту; найти геометрическое мѣсто точекъ пересѣченія сѣкущихъ.

15. Геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія касательныхъ, проведенныхъ изъ данной точки къ кругамъ, которые касаются данной прямой въ данной точкѣ.

16. Геометрическое мѣсто точекъ прикосновенія касательныхъ, проведенныхъ изъ данной точки къ кругамъ, проходящимъ черезъ данную точку и касательнымъ данной прямой.

17. Найти геометрическое мѣсто срединъ хордъ, вписанныхъ въ данную гиперболу, и касающихся круга концентричнаго гиперболѣ.

18. Построить геометрическія мѣста, выражаемыя уравненіями

$$y^4 - x^4 + 2ax^2y = 0,\ x^4 + y^4 - 2ay^2 - 2bx^2y = 0,$$
$$(x^2 + y^2)^2 - 6axy^2 - 2ax^3 + 2a^2x^2 = 0,\ y = a + b\,(x - c)^m,$$
$$x^4 + y^4 - 3x^3 - 4x^2 = 0,\ x^3y^3 + y - x = 0,$$
$$y^4 - x^4 - 2bxy^2 + 2ax^3 = 0,\ y^4 - x - 3x^2y^2 + 2x = 0,$$
$$y^4 - x^4 - 96a^2y^2 + 100a^2x^2 = 0,\ 2x^3 - y^3 + (y - x)^2 = 0.$$

19. Построить кривыя, выражаемыя уравненіями

$$2\sin y - \sin x = 0,\ \sin x \sin y = \frac{1}{2},$$
$$y = \frac{e^x}{x},\ y = \frac{\sin^2 x}{x},\ y = x^x,\ x^y = y^x.$$

20. Построить кривыя, выражаемыя уравненіями

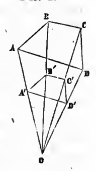
$$\varrho = \frac{\sin\omega}{2\omega\cos - 1},\ \varrho = 1 \pm \sqrt{\frac{\sin 3\omega}{\cos\omega}}$$
$$\varrho^2\cos\omega - 2\varrho\sin\omega + \cos^2\omega = 0,\ \varrho^2\cos\omega - 4\varrho\sin\omega - \operatorname{tg}\omega = 0,$$
$$\varrho = \cos\omega \pm \sqrt{\frac{1 - 2\cos\omega}{\sin\omega}}.$$

ГЛАВА V.

О подобіи.

385. Въ элементарной геометріи подобными многоугольниками называются такіе два многоугольника, у которыхъ углы соотвѣтственно равны и стороны, заключающія равные углы, пропорціональны. Такое опредѣленіе нельзя распространить на кривыя фигуры. Разсмотримъ два подобныя многоугольника ABCD, A'B'C'D' (*фиг.* 251), и положимъ, что второй повернутъ такимъ образомъ, что сторона A'B' будетъ параллельна сходственной ей сторонѣ AB; тогда B'C', C'D',... будутъ также параллельны сходственнымъ имъ сторонамъ BC, CD,... точно также и сходственныя діагонали A'C', AC будутъ параллельны. Если точки A и A' соединимъ и если на этой прямой возьмемъ такую

Фиг. 251.



точку O, чтобы $\frac{OA}{OA'} = \frac{AB}{A'B'}$, то двѣ какія-нибудь сходственныя вершины будутъ находиться на прямой, проходящей черезъ точку O; тогда получимъ равныя отношенія

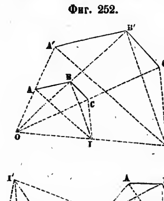
$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OA}{OB'} = \frac{CO}{OC'} = \dots = \frac{AB}{A'B'}.$$

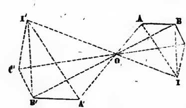
Этимъ свойствомъ мы воспользуемся для общаго опредѣленія подобія.

Опредѣленіе подобія.

386. Возьмемъ какую-нибудь систему точекъ A,B,C,... расположенныхъ въ плоскости; эти точки могутъ быть отдѣльными однѣ отъ другихъ или могутъ образовать непрерывныя линіи. Изъ точки O, взятой произвольно на плоскости, проведемъ къ различнымъ точкамъ системы радіусы OA, OB, OC,... и на этихъ радіусахъ возьмемъ такія точки A′, B′, C′,... чтобы

Фиг. 252.





$$\frac{OA}{OA'} = \frac{OB}{OB'} = \frac{OC}{OC'} = \dots = k;$$

система полученныхъ такимъ образомъ точекъ, называется *подобною* данной системѣ и сходственно *расположенной*.

Если бы точки A′, B′, C′,... мы взяли на продолженіяхъ радіусовъ векторовъ въ обратномъ направленіи, то обѣ системы были бы *подобны* и *расположены обратно*. Повернувъ около точки O на 180°, вторая система совпадаетъ съ одной изъ подобныхъ и сходственно расположенныхъ системъ.

Для краткости M. Chasles это подобіе по виду и по положенію называетъ *прямымъ* соотвѣтствіемъ въ первомъ случаѣ, и *обратнымъ* во второмъ случаѣ. Точка O называется *центромъ подобія* двухъ системъ; число k называется *отношеніемъ подобія* и *сходственными* точками называются точки A и A′, находящіяся на одномъ и томъ же радіусѣ. Если отношеніе k будетъ измѣняться отъ O до ∞ и также положеніе центра O подобія, то получимъ всѣ системы, соотвѣтственныя данной системѣ.

Система будетъ *подобна* данной системѣ, когда она равна одной изъ системъ, соотвѣтствующихъ данной системѣ.

Свойства соотвѣтственныхъ фигуръ.

387. Такъ какъ прямыя OA′, OB′ раздѣлены въ A и B въ одномъ и томъ же отношеніи, то прямая A′A′ параллельна AB, и мы получимъ

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{OA}{O'B'} = k.$$

Такимъ образомъ *прямая, соединяющая двѣ точки* A *и* B *первой системы, и прямая, соединяющая двѣ сходственныя точки* A′ *и* B′ *второй системы, параллельны и находятся въ постоянномъ отношеніи* k.

Пусть A, B, C будутъ три точки на прямой линіи, прямыя A′B′, A′C′, соотвѣтственно параллельныя AB и AC, совпадаютъ; слѣдовательно, *если три точки находятся на прямой линіи, то сходственныя имъ точки также находятся на прямой*, отсюда слѣдуетъ, *что соотвѣтственная фигура прямой есть прямая, параллельная первой.* Если первая прямая будетъ проходить чрезъ центръ подобія, то двѣ прямыя совпадутъ. Такъ какъ соотвѣтственныя прямыя параллельны, то очевидно, что *уголъ двухъ прямыхъ равенъ углу соотвѣтственныхъ прямыхъ.*

Такъ какъ хорды, соединяющія сходственныя точки двухъ соотвѣтственныхъ кривыхъ, параллельны, то онѣ приближаются къ параллельнымъ направленіямъ, когда обѣ точки одной и той же кривой безпредѣльно сближаются; отсюда заключаемъ, что *касательныя, проведенныя къ двумъ соотвѣтствующимъ кривымъ въ сходственныхъ точкахъ, параллельны.*

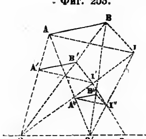
388. *Если обѣ системы будутъ такія, что прямыя, проведенныя изъ точки* I *къ различнымъ точкамъ первой системы, и прямыя, проведенныя изъ точки* I′ *къ различнымъ точкамъ второй, будутъ соотвѣтственно параллельны и находиться въ постоянномъ отношеніи* k; *то обѣ эти системы будутъ соотвѣтственныя.*

Въ самомъ дѣлѣ, возьмемъ на линіи I′I такую точку O, чтобы $\frac{OI}{OI'} = k$; тогда радіусы OA, OA′ будутъ на прямой линіи и въ постоянномъ отношеніи k; слѣдовательно, обѣ системы соотвѣтственныя и точка O есть центръ подобія.

389. *Двѣ системы, соотвѣтственныя третьей, соотвѣтственны между собой.*

Съ помощію центра подобія O и отношенія k построимъ первую систему $A'B' \ldots I'$ соотвѣтственную системѣ $AB \ldots I$ (фиг. 253); при помощи центра O' и отношенія k' построимъ вторую систему $A''B'' \ldots I''$. Такъ какъ прямыя $I'A'$, $I''A''$, соотвѣтственно параллельны IA, то онѣ параллельны между собою. Сверхъ того мы имѣемъ

Фиг. 253.



$$\frac{IA}{I'A'} = k, \quad \frac{IA}{I''A''} = k, \quad \text{откуда} \quad \frac{I'A'}{I''A''} = \frac{k'}{k}.$$

Такимъ образомъ прямыя $I'A'$, $I''A''$ параллельны между собой и находятся въ постоянномъ отношеніи; слѣдовательно, по предъидущей теоремѣ двѣ системы A' и A'' соотвѣтственны.

Двѣ системы A' и A'', соотвѣтственныя третьей A и построенныя въ одномъ и томъ же отношеніи, равны между собою; дѣйствительно, если $k = k'$, то параллельные радіусы $I'A'$ и $I''A''$ будутъ равны, а обѣ системы можно наложить. Отсюда заключаемъ, что съ помощію только одного центра O, измѣняя отношеніе k отъ o до ∞, можно построить всѣ системы, соотвѣтственныя данной системѣ.

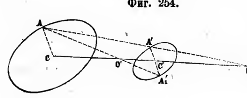
Если двѣ системы A' и A'' будутъ прямо или обратно соотвѣтственны относительно системы A, то онѣ будутъ между собой прямо соотвѣтственны; но если одна будетъ прямо соотвѣтственна, а другая обратно, то между собой они будутъ обратны соотвѣтственны.

Центры подобія трехъ системъ, соотвѣтственныхъ по двѣ, находятся на прямой линіи. Въ самомъ дѣлѣ, прямая OO', принимая, что она принадлежитъ къ первой системѣ, имѣетъ сходственными во второй и въ третьей системѣ самую эту прямую, потому что она проходитъ черезъ центры O и O'. Слѣдовательно, эта прямая сходственна сама себѣ въ двухъ послѣднихъ системахъ и, слѣдовательно, она проходитъ черезъ центръ ихъ подобія O''.

390. *Когда двѣ фигуры, имѣющія центръ, прямо соотвѣтственны, то онѣ также обратно соотвѣтственны и наоборотъ.*

Пусть C и C' будутъ центры фигуръ (*фиг.* 254); A и A' двѣ сходственныя точки. На продолженіи $C'A'$ возьмемъ такую точку A'_1, чтобы $C'A'_1 = C'A'$; тогда точка A'_1 будетъ принадлежать также второй фигурѣ; но $\frac{CA}{C'A'} = k$,

Фиг. 254.



слѣдовательно $\frac{CA}{C'A'_1} = k$; такъ какъ сходственные радіусы CA и C'A', направлены въ разныя стороны, то обѣ кривыя обратно соотвѣтственны.

Отсюда слѣдуетъ, что обѣ фигуры имѣютъ два центра подобія, одинъ прямой O, помѣщенный на продолженіи линіи центровъ, другой обратный или внутренній O', помѣщенный въ промежуткѣ CC'.

Когда три фигуры, имѣющія центры, соотвѣтственны по двѣ, тогда онѣ имѣютъ три центра прямаго подобія и три центра обратнаго подобія. Три центра прямаго подобія находятся на прямой линіи; точно также два центра обратнаго подобія и центръ прямаго подобія находятся также на прямой линіи.

391. Такъ какъ сходственныя стороны двухъ соотвѣтственныхъ многоугольниковъ имѣютъ постоянно отношеніемъ число k, то периметры ихъ находятся въ томъ же отношеніи; такимъ образомъ *отношеніе периметровъ двухъ соотвѣтственныхъ многоугольниковъ равно отношенію подобія.*

Если изъ двухъ сходственныхъ вершинъ двухъ соотвѣтственныхъ треугольниковъ опустимъ перпендикуляры на противоположныя стороны, то эти перпендикуляры будутъ сходственныя прямыя въ двухъ системахъ, ихъ отношеніе будетъ равно k, и, слѣдовательно, отношеніе площадей треугольниковъ будетъ равно k^2.

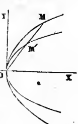
Разложивъ оба соотвѣтственные многоугольника на треугольники, соотвѣтственные по два, увидимъ, что отношеніе площадей фигуръ будетъ также равно k^2; такимъ образомъ *отношеніе площадей двухъ соотвѣтственныхъ многоугольниковъ равно квадрату отношенія подобія.*

Обѣ предъидущія теоремы справедливы также для плоскихъ фигуръ, ограниченныхъ какими-нибудь соотвѣтственными контурами.

392. *Примѣры*. Мы видѣли, что всѣ кривыя, соотвѣтственныя данной кривой S получаются съ помощію только одного центра подобія O, взятаго произвольно въ ея плоскости. Вотъ примѣры:

1. *Кривая* S *есть кругъ*. Если центръ круга возьмемъ за центръ подобія, то вторая кривая будетъ кругъ, радіусъ котораго можетъ имѣть какую угодно величину.

Фиг. 255.



2. Кривая S есть парабола (*фиг.* 255). Если кривую отнесемъ къ ея оси и къ касательной, проведенной къ вершинѣ, то координаты x и y какой-нибудь точки M этой кривой будутъ удовлетворять уравненію $y^2 = 2px$. Если вершину возьмемъ за центръ подобія и если черезъ x' и y' назовемъ координаты соотвѣтственной точки M', то получимъ

$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{\text{OM}}{\text{OM}'}=k$, откуда $x=kx'$, $y=ky'$; соотвѣтственная кривая выражается уравненіемъ $y'^2=\frac{2p}{k}x'$; это есть парабола, параметръ которой можетъ имѣть какую угодно величину, потому что k есть произвольное отношеніе; отсюда заключаемъ, что *двѣ какія-нибудь параболы подобны.*

3. Кривая S есть эллипсъ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Если центръ кривой возьмемъ за центръ подобія, то соотвѣтственная кривая, выражаемая уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{1}{k^2},$$

будетъ эллипсъ, оси котораго могутъ имѣть какія-нибудь величины, пропорціональныя величинамъ осямъ перваго эллипса. Отсюда заключаемъ, что *два эллипса подобны, когда ихъ оси пропорціональны.*

Та же теорема справедлива также для гиперболы.

4. Кривая S есть логариѳмическая спираль $\rho=ae^{m\omega}$. Если полюсъ возьмемъ за центръ подобія, то соотвѣтственныя кривыя будутъ имѣть уравненіемъ $\rho=\frac{ae^{m\omega}}{k}$; если положимъ $k=e^{m\alpha}$, то это уравненіе будетъ $\rho=ae^{m(\omega-\alpha)}$; оно выражаетъ данную спираль, когда ее повернемъ около полюса на уголъ α. Отсюда слѣдуетъ, что единственная кривая, подобная логариѳмической спирали, есть эта самая спираль; первой точкѣ M кривой соотвѣтствуетъ другая точка M′ той же кривой, и эту точку M′ можно взять произвольно, потому что k есть число произвольное.

Уравненіе соотвѣтственныхъ кривыхъ.

393. Пусть

$$(1)\ f(x,y)=0$$

будетъ уравненіе кривой S. Возьмемъ начало координатъ за центръ подобія и построимъ помощію отношенія k кривую S′, соотвѣтственную первой. Если черезъ x и y означимъ координаты какой-нибудь точки M первой кривой; черезъ x' и y' координаты сходственной точки M′ второй кривой, то изъ подобныхъ треугольниковъ OPM, O′P′M′ найдемъ

Фиг. 256.

$$\frac{x}{x'}=\frac{y}{y'}=\frac{\text{OM}}{\text{O'M'}}=k.$$

Внеся въ уравненіе (1), получимъ уравненіе

(2) $$f(kx',\ ky') = 0,$$

которое выражаетъ всѣ кривыя, соотвѣтственныя данной кривой, и которыя центромъ соотвѣтствія имѣютъ начало координатъ. Если соотвѣтствіе будетъ прямое, то въ этомъ уравненіи надобно для k давать положительную величину, и отрицательную, когда соотвѣтствіе будетъ обратное.

Оставивъ кривую S неподвижною, перенесемъ кривую S′ въ плоскости такимъ образомъ, чтобы начало координатъ O пришло въ $O'(p,\ q)$, оси остались бы параллельными ихъ первоначальному направленію; тогда кривая S′ выразится уравненіемъ относительно осей O′X′ и O′Y′

$$f(kx',\ ky') = 0,$$

а относительно неподвижныхъ осей OX и OY уравненіемъ

(3) $$f[k(x-p),\ k(y-q)] = 0.$$

Въ этомъ новомъ положеніи кривая S′ соотвѣтственна кривой S; потому что радіусы векторы, проведенные изъ точекъ O и O′, параллельны и находятся въ постоянномъ отношеніи k. Слѣдовательно, уравненіе (3) выражаетъ всѣ кривыя, соотвѣтственныя данной кривой, при всякомъ положеніи центра подобія.

394. Въ то время, когда переносимъ начало O′, повернемъ оси на уголъ α; тогда кривая S′ займетъ какое-нибудь положеніе въ плоскости и будетъ подобна данной. Кривая S′, отнесенная къ подвижнымъ осямъ O′X′ и O′Y′, выражается уравненіемъ $f(kx',\ ky') = 0$; посредствомъ формулъ преобразованія

$$x' = (x-p)\cos\alpha + (y-q)\sin\alpha,$$
$$y' = -(x-p)\sin\alpha + (y-q)\cos\alpha,$$

предполагая, что оси взаимно перпендикулярны, получимъ уравненіе кривой относительно двухъ неподвижныхъ осей OX и OY. Это уравненіе выражаетъ всѣ кривыя, подобныя данной.

395. Для примѣра найдемъ условія для двухъ кривыхъ втораго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$
$$A'x^2 + B'xy + C'y^2 + D'x + E'y + F' = 0,$$

чтобы онѣ были соотвѣтственны. Общее уравненіе кривыхъ, соотвѣтственныхъ первой кривой, есть (§ 393)

$$Ak^2x^2 + Bk^2xy + Ck^2y^2 - (Bk^2q + 2Ak^2p - Dk)x - (Bk^2p + 2Ck^2q - Ek)\,y + (Ak^2p^2 + Bk^2pq + Ck^2q^2 - Dkp - Ekq + F) = 0.$$

Сравнивая это уравненіе съ вторымъ, получимъ

$$\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'} = \frac{-Bq + 2Ap + \frac{D}{k}}{D'} = \frac{-Bp - 2Cq + \frac{E}{k}}{E'}$$

$$= \frac{Ap^2 + Bpq + Cq^2 - \frac{D}{k}p - \frac{E}{k}q + \frac{F}{k^2}}{F}$$

Исключивъ изъ этихъ пяти уравненій три параметра p, q, k, получимъ условныя уравненія; но такъ какъ первыя два уравненія $\frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$ не содержатъ этихъ параметровъ, то они выразятъ два условныя уравненія. Слѣдовательно, *для того, чтобы двѣ кривыя втораго порядка были соотвѣтственны, надобно, чтобы коеффиціенты членовъ второй степени были пропорціональны.*

396. Остается изслѣдовать, будутъ-ли величины параметровъ p, q, k дѣйствительныя и конечныя; этотъ вопросъ можно рѣшить слѣдующимъ образомъ. Такъ какъ коеффиціенты членовъ второй степени пропорціональны, то ихъ можно сдѣлать равными, умноживъ всѣ члены одного изъ уравненій на приличнаго множителя; слѣдовательно, возьмемъ оба уравненія въ видѣ

(4) $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$
(5) $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + D'x + E'y + F' = 0.$$

Мы будемъ различать нѣсколько случаевъ смотря по знаку $B^2 - 4AC$.

1. $B^2 - 4\,AC = 0$. Оба геометрическія мѣста будутъ принадлежать къ роду параболы; если эти два геометрическія мѣста дѣйствительно будутъ параболами, то они будутъ подобны, потому что всѣ параболы подобны; сверхъ того оси двухъ кривыхъ, имѣя одинаковой угловой коеффиціентъ $-\frac{B}{2C}$, параллельны, и, слѣдовательно, кривыя соотвѣтственны.

2. $B^2 - 4AC < 0$. Геометрическія мѣста принадлежатъ къ роду эллипса. Если для каждой кривой оси перенесемъ параллельно ихъ самимъ себѣ въ центръ кривой, то уравненія (4) и (5) будутъ вида

(6) $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F_1 = 0,$$
(7) $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + F'_1 = 0.$$

Оси кривыхъ, направленія которыхъ опредѣляются уравненіемъ $tg\,2\alpha = \frac{B}{A-C}$(§. 141), параллельны; если оси координатъ повернемъ на уголъ α, то уравненіе (6) и (7) будутъ вида

(8) $$Mx^2 + Ny^2 + F_1 = 0,$$
(9) $$Mx^2 + Ny^2 + F_1' = 0.$$

Коеффиціенты M и N, величины которыхъ опредѣляются уравненіями

$$M + N = A + C, \quad M - N = \pm\sqrt{B^2 + (A - C)^2},$$

имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ. Чтобы уравненія (8) и (9) выражали два дѣйствительные эллипса, надобно, чтобы величины F_1, F'_1 имѣли одинъ и тотъ же знакъ, и, кромѣ того, чтобы этотъ знакъ былъ обратный предъидущему. Когда это условіе выполняется, оси двухъ эллипсовъ будутъ имѣть одно и то же отношеніе $\sqrt{\frac{N}{M}}$ и эллипсы будутъ соотвѣтственны.

3. $B^2 - 4AC > 0$. Оба геометрическія мѣста принадлежатъ къ роду гиперболы. Сдѣлавъ тѣ же преобразованія, какъ въ предъидущемъ случаѣ, получимъ уравненія (8) и (9), въ которыхъ M и N будутъ имѣть обратные знаки. Когда величины F_1 и F'_1 не равны нулю, тогда каждое изъ уравненій выразитъ гиперболу. Если F_1 F'_1 будутъ имѣть одинаковые знаки, то дѣйствительныя оси двухъ кривыхъ будутъ параллельны, и такъ какъ отношеніе осей одно и то же, то кривыя будутъ соотвѣтственны. Когда F_1 и F_1' имѣютъ разные знаки, одна изъ гиперболъ, будетъ подобна сопряженной другой. Во всѣхъ случаяхъ обѣ кривыя имѣютъ параллельныя асимптоты.

Изъ предъидущаго заключаемъ, что когда *коеффиціенты при членахъ второй степени въ двухъ уравненіяхъ втораго порядка пропорціональны и когда эти уравненія выражаютъ двѣ дѣйствительныя кривыя, то эти кривыя соотвѣтственны; однакоже, когда кривыя будутъ гиперболы, можетъ случиться, что одна будетъ соотвѣтственна сопряженной другой.*

Общее уравненіе одного рода кривыхъ.

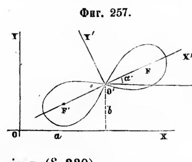
397. *Кривыми одного и того же рода* называются кривыя, заключающіяся въ одномъ и томъ же геометрическомъ опредѣленіи, и которыя

отличаются другъ отъ друга только величинами параметровъ, которые входятъ въ общее опредѣленіе. Общее уравненіе кривыхъ разсматриваемаго рода есть уравненіе, которое въ системѣ координатъ даетъ всѣ эти кривыя, какое бы ни было ихъ положеніе въ плоскости, когда даемъ различныя величины перемѣннымъ параметрамъ, которые оно содержитъ. Такимъ образомъ, когда неподвижныя оси будутъ прямоугольныя, общее уравненіе круга будетъ $(x-a)^2+(y-b)-r^2=0$. Это уравненіе заключаетъ три перемѣнныхъ параметра, именно радіусъ r и двѣ координаты a и b центра.

398. Часто сначала отыскиваютъ уравненіе кривой относительно частныхъ осей, которыя выбираемъ такъ, чтобы упростить вычисленіе; тогда, чтобы получить общее уравненіе, относимъ его къ неподвижнымъ осямъ посредствомъ преобразованія координатъ.

Лемнискату мы опредѣляли, какъ геометрическое мѣсто такихъ точекъ, произведеніе разстояній каждой изъ нихъ отъ двухъ точекъ F и F′ равнялось бы крадрату половины прямой F′F (*фиг.* 257). Если за начало координатъ возьмемъ средину O′ прямой F′F, за оси координатъ O′F и перпендикуляръ къ O′F и если черезъ $2c$ означимъ разстояніе F′F, то кривая, отнесенная къ своимъ частнымъ перемѣннымъ осямъ, выразится уравненіемъ (§ 339)

Фиг. 257.



$$(x'^2+y'^2)^2+2c^2(y'^2-x'^2)=0.$$

Потомъ кривую относимъ къ неподвижнымъ прямоугольнымъ осямъ OX, OY, посредствомъ формулъ преобразованія

$$x'=(x-a)\cos\alpha+(y-b)\sin\alpha,$$
$$y'=-(x-a)\sin\alpha+(y-b)\cos\alpha,$$

въ которыхъ a и b означаетъ координаты точки O′ относительно неподвижныхъ осей и α уголъ прямой O′F съ OX. Такимъ образомъ получимъ уравненіе

$$F(x, y, c, a, b, \alpha)=0,$$

содержащее четыре произвольные параметра, и которое выражаетъ всѣ лемнискаты; это есть общее уравненіе вида.

Общее уравненіе кривыхъ одного вида относительно неподвижныхъ осей содержитъ тремя параметрами болѣе, чѣмъ уравненіе тѣхъ же кривыхъ, отнесенныхъ къ осямъ, имѣющихъ съ кривыми опредѣленное соотношеніе. Пусть n будетъ полное число параметровъ; эту систему параметровъ всегда можно замѣнить такою другою системою, чтобы измѣненія трехъ изъ нихъ перемѣщали бы кривую въ ея плоскости, а измѣненія $n - 3$ другихъ измѣняли бы ея видъ или ея размѣры.

399. Число точекъ и вообще число условій, необходимыхъ для совершеннаго опредѣленія кривой даннаго рода, равно числу произвольныхъ параметровъ, которое содержитъ общее уравненіе рода (§ 269). Сдѣланныя замѣчанія относительно кривыхъ второй степени (§ 281) о кратныхъ условіяхъ прилагаются также и здѣсь. Всякій разъ необходимо предварительно убѣдиться въ томъ, что параметры, которые входятъ въ уравненіе, не могутъ быть приведены къ меньшему числу. Разсмотримъ, напримѣръ, геометрическое мѣсто такихъ точекъ, отношеніе разстояній которыхъ отъ двухъ опредѣленныхъ точекъ, координаты которыхъ мы означимъ черезъ (a, b) (a', b'), было бы постоянно и равно k. Это геометрическое мѣсто, уравненіе котораго есть

$$(1) \qquad (x-a)^2 + (y-b)^2 - k^2[(x-a')^2 + (y-b')^2] = 0,$$

есть окружность круга. Уравненіе (1) содержитъ пять параметровъ; но если его развернемъ и расположимъ, то получимъ

$$(2) \quad x^2 + y^2 - 2\,\frac{a-k^2a'}{1-k^2}\,x - 2\,\frac{b-k^2b'}{1-k^2}\,y + \frac{a^2+b^2k^2(a'^2+b'^2)}{1-k^2} = 0.$$

Только три коеффиціента содержатъ параметры; если ихъ означимъ черезъ A, B, C, то уравненіе (2) получитъ видъ

$$(3) \qquad x^2 + y^2 + \mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C} = 0.$$

Для опредѣленія коеффиціентовъ A, B, C, и, слѣдовательно, окружности, достаточно трехъ точекъ. Если потомъ захотимъ опредѣлить a, b, a', b', k, то получимъ три уравненія съ пятью неизвѣстными; такъ какъ эти уравненія неопредѣленны, то два неизвѣстныхъ можно взять произвольно; это значитъ, что для одной и той же окружности можно найти безконечное число паръ такихъ двухъ точекъ, чтобы отношеніе разстояній каждой точки окружности отъ этихъ двухъ опредѣленныхъ точекъ было постоянно.

400. Изъ геометрическаго опредѣленія рода кривыхъ само по себѣ видно число произвольныхъ параметровъ, которое содержитъ общее его

уравненіе. Для опредѣленія круга необходимо знать центръ, положеніе котораго опредѣляется двумя координатами, и радіусъ; такимъ образомъ всѣхъ постоянныхъ или произвольныхъ параметровъ будетъ три. Для опредѣленія лемнискаты нужно знать двѣ опредѣленныя точки, что даетъ четыре постоянныя; для опредѣленія эллипса, надобно знать кромѣ того сумму радіусовъ векторовъ; поэтому кривая зависитъ отъ пяти параметровъ. Въ опредѣленіи Архимедовой спирали входятъ полюсъ, который даетъ два постоянныя, положеніе прямой въ то мгновеніе, когда движущаяся линія проходитъ черезъ полюсъ, и отношеніе; слѣдовательно, всѣхъ постоянныхъ будетъ четыре.

401. Всякій цѣлый многочленъ m-ой степени относительно двухъ перемѣнныхъ x и y содержитъ $\frac{(m+1)(m+2)}{2}$ членовъ; отсюда заключаемъ, что для опредѣленія алгебраической кривой m порядка надобно $\frac{(m+1)(m+2)}{2}-1$ или $\frac{m(m+3)}{2}$ точекъ. Напримѣръ, для опредѣленія кривой третьей степени надобно 9 точекъ, для опредѣленія кривой четвертой степени надобно 14 точекъ.

Изъ этого видно, что всякое уравненіе третьей степени можно представить въ видѣ

$$\alpha_1\,\alpha_2\,\alpha_3 - k\beta^2\gamma = 0, \tag{4}$$

гдѣ α_1, α_2, α_3, β, γ означаютъ цѣлыя функціи первой степени, а k — произвольный параметръ; потому что эти уравненія содержатъ одинадцать произвольныхъ параметровъ; можно даже взять произвольно одну изъ пяти линейныхъ функцій, такъ какъ остается еще девять параметровъ. Три прямыя $\alpha_1=0$, $\alpha_2=0$, $\alpha_3=0$ суть касательныя, проведенныя къ кривой въ точкахъ, въ которыхъ онѣ пересѣкаются прямою $\beta=0$; а точки, въ которыхъ эти касательныя пересѣкаются прямою $\gamma=0$ принадлежатъ также кривой. Взявъ β произвольно, найдемъ слѣдующую теорему: если кривую третьяго порядка пересѣчемъ какою-нибудь прямою $\beta=0$, и къ тремъ точкамъ пересѣченія проведемъ касательныя къ кривой, то каждая изъ касательныхъ пересѣчетъ кривую въ новой точкѣ, и эти три точки будутъ находиться на прямой линіи. Взявъ γ произвольно, найдемъ слѣдующую другую теорему: если кривую третьяго порядка пересѣчемъ прямою $\gamma=0$; и если черезъ каждую точку пересѣченія проведемъ касательныя къ кривой, то точки прикосновенія этихъ касательныхъ будутъ находиться по три на прямой линіи.

Положимъ, что прямая $\beta = 0$ удаляется въ безконечность; тогда три касательныя $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$ предѣлами будутъ имѣть три асимптоты къ кривой; каждая изъ этихъ асимптотъ пересѣкаетъ кривую только въ одной точкѣ, и эти три точки находятся на прямой линіи.

Уравненіе

(5) $$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 - k\beta^3 = 0,$$

которое содержитъ девять произвольныхъ параметровъ, выражаетъ всѣ кривыя третьяго порядка. Три точки, въ которыхъ прямая $\beta = 0$ пересѣкаетъ кривую, суть точки перегиба; касательныя въ этихъ точкахъ суть прямыя $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 0$.

Всѣ кривыя третьяго порядка можно также выразить уравненіемъ

(6) $$\alpha(\alpha - a\gamma)(\alpha - b\gamma) - k\beta^2\gamma = 0,$$

которое также содержитъ девять произвольныхъ параметровъ. Прямая $\gamma = 0$ есть касательная къ точкѣ перегиба ($\alpha = 0$, $\gamma = 0$), три касательныя $\alpha = 0$, $\alpha - a\gamma = 0$, $\alpha - b\gamma = 0$, проведенныя къ точкамъ, въ которыхъ прямая $\beta = 0$ пересѣкаетъ кривую, проходятъ черезъ эту точку перегиба. Взявъ перспективу на плоскости, можно удалить въ безконечность такую прямую, какую угодно, напримѣръ, касательную $\gamma = 0$ къ точкѣ перегиба; для этого въ уравненіи, которое приводится къ виду $\alpha(\alpha - a)(\alpha - b) - k\beta^2 = 0$, достаточно положить $\gamma = 1$; если за ось x возьмемъ прямую $\beta = 0$, а за ось y прямую $\alpha = 0$, то получимъ уравненіе $ky^2 = x(x - a)(x - b)$, которое мы разсматривали въ § 337.

Всякое уравненіе четвертой степени можно представить въ видѣ

(7) $$\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4 - k\beta^2\varphi = 0,$$

гдѣ φ означаетъ многочленъ второй степени, потому что уравненіе содержитъ 16 параметровъ; можно даже β взять произвольно, потому что остается 14 параметровъ. Такимъ образомъ, когда кривую четвертаго порядка пересѣкаемъ какой-нибудь прямою и если къ четыремъ точкамъ пересѣченія проведемъ касательныя, и если возьмемъ двѣ другія точки, въ которыхъ касательная пересѣкаетъ кривую, то получимъ восемь точекъ, расположенныхъ на коническомъ сѣченіи $\varphi = 0$.

Кривыя четвертаго порядка имѣютъ четыре асимптоты; каждая изъ нихъ пересѣкаетъ кривую въ двухъ точкахъ; и эти восемь точекъ находятся на коническомъ сѣченіи.

Условія подобія двухъ фигуръ.

402. Разсмотримъ рядъ кривыхъ одного и того же рода, въ опредѣленіе которыхъ входитъ только одинъ линейный параметръ A, мѣру котораго мы означимъ черезъ a, и пусть

(1) $$f(x, y, a) = 0$$

будетъ уравненіе, которое выражаетъ всѣ эти кривыя, не обращая вниманія на ихъ положеніе въ плоскости. Если уравненіе (1) мы получили, не означая линейную единицу, то оно необходимо будетъ однородно относительно x, y, a. Когда перемѣняемъ линейный параметръ A, что приводитъ къ тому, чтобы при той же единицѣ измѣнять число a, тогда уравненіе (1) опредѣлитъ рядъ соотвѣтственныхъ кривыхъ. Дѣйствительно, пусть A_0 будетъ параметръ, имѣющій мѣрою a_0; этому параметру соотвѣтствуетъ частная кривая

(2) $$f(x, y, a_0) = 0.$$

Тогда кривыя, соотвѣтственныя кривой (2), принимая начало координатъ за центръ подобія и k за произвольное отношеніе, выражаются уравненіемъ (§ 393)

(3) $$f(kx, ky, a_0) = 0.$$

Означимъ черезъ A_1 второй параметръ, имѣющій мѣрою такое число a_1, что $\frac{a^0}{a_1} = k$; тогда уравненіе (3) можно написать

$$f(kx, ky, ka_1) = k^m f(x, y, a_1) = 0,$$

или

(4) $$f(x, y, a_1) = 0;$$

эти уравненія выражаютъ, что кривыя, соотвѣтственныя кривой (2), суть различныя кривыя, которыя получимъ, измѣняя параметръ A.

403. Положимъ вообще, что для опредѣленія всѣхъ кривыхъ одного рода, не обращая вниманія на ихъ положеніе въ плоскости, надобно n линейныхъ параметровъ A, B, ...; означимъ черезъ a, b, c,... мѣры этихъ линій, относительно произвольной единицы; тогда уравненіе кривыхъ рода

(5) $$f(x, y, a, b \ldots) = 0$$

будетъ однородно относительно x, y, a, b,... Кривыя, опредѣляемыя уравненіемъ (5) и которыя соотвѣтствуютъ двумъ рядамъ пропорціональныхъ параметровъ A_0, B_0,... и A_1 B_1,... соотвѣтственны; если черезъ k означимъ отношеніе параметровъ

$$\frac{a_0}{a_1} = \frac{b_0}{b_1} = \ldots = k,$$

то кривыя соотвѣтственны кривой

$$f(x, y, a_0 \ldots b_0, \ldots) = 0$$

выразятся уравненіемъ

$$f(kx, ky, ka_1, kb_1, \ldots) = k^m f(x, y, a_1, b_1, \ldots) = 0,$$

или

$$f(x, y, a_1, b_1, \ldots) = 0.$$

Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что когда кривая, не обращая вниманія на ея положеніе въ плоскости, опредѣляется одною длиною, тогда всѣ кривыя рода будутъ подобны. Напримѣръ, такъ какъ кругъ опредѣляется его радіусомъ, парабола—разстояніемъ фокуса отъ директрисы, лемниската—разстояніемъ фокусовъ, Архимедова спираль — длиною пути, который проходитъ движущаяся точка по прямой во время обращенія этой прямой, то всѣ окружности подобны, точно также всѣ параболы, всѣ лемнискаты и т. д.

Такъ какъ эллипсъ опредѣляется двумя осями, то условіе подобія двухъ эллипсовъ будетъ то, чтобы эти оси были пропорціональны, какъ мы это уже знаемъ (§ 392). То же самое относительно двухъ гиперболъ.

ГЛАВА VI.

Графическое рѣшеніе уравненій.

404. Разсмотримъ два уравненія съ двумя неизвѣстными x и y

(1) $\varphi(x, y) = 0$, (2) $\psi(x, y) = 0$;

каждое изъ нихъ опредѣляетъ кривую. Систему этихъ двухъ уравненій можно замѣнить безконечнымъ числомъ равнозначащихъ системъ; возьмемъ въ частности систему

(3) $\chi(x, y) = 0$, (4) $f(x) = 0$

въ которой одно изъ уравненій не содержитъ болѣе перемѣннаго y; эту систему получимъ, исключивъ y изъ двухъ данныхъ уравненій. Дѣйствительные корни уравненія (4) суть абсциссы точекъ общихъ кривымъ (1) и (2). Однако, если система уравненій (3) и (4) удовлетворялась бы парою величинъ вида $x = \alpha$, $y = \beta + \gamma i$, въ которыхъ величины: α, β, γ дѣйствительныя, то эти величины удовлетворяли бы системѣ уравненій (1) и (2); но тогда величина α не будетъ абсциссою дѣйствительной точки, общей двумъ кривымъ. Исключеніе, на которое мы указали, никогда не представляется, когда уравненіе $\varphi(x, y) = 0$ будетъ алгебраическое уравненіе, содержащее перемѣнное y только въ первой степени.

Если хотимъ рѣшить уравненіе $f(x) = 0$ съ однимъ неизвѣстнымъ, то можно выбрать изъ безконечнаго числа, различными способами, кривыя, опредѣляемыя уравненіями (1) и (2). Для этого надо только удовлетворить одному условію, именно: чтобы, исключивъ y изъ уравненія (1) и (2) получили данное уравненіе. Первое соединеніе есть $y = f(y)$, $y = 0$, что приводится къ тому, чтобы разсматривать величины неизвѣстнаго, какъ абсциссы точекъ пересѣченія кривой $y = f(x)$ съ осью x. Это соединеніе часто есть простѣйшее. Въ алгебрѣ доказывается, что если неизвѣстное y исключимъ изъ двухъ алгебраическихъ уравненій, съ двумя неизвѣстными степени которыхъ суть m и n, то уравненіе относительно x будетъ вообще степени mn. Слѣдовательно, если данное уравненіе будетъ алгебраическое, и если хотимъ найти его корни посредствомъ алгебраическихъ кривыхъ, то произведеніе степеней уравненій двухъ кривыхъ должно быть равно степени рѣшаемаго уравненія. Приложимъ этотъ способъ къ рѣшенію уравненія четвертой степени.

405. Уравненіе четвертой степени легко приводится къ виду

$$(5) \qquad x^4 + px^2 + qx + r = 0;$$

можно принимать, что это уравненіе произошло отъ исключенія y изъ двухъ уравненій второй степени

$$(6) \qquad x^2 - my = 0, \quad (7)\ m^2y^2 + pmy + qx + r = 0,$$

изъ которыхъ каждое выражаетъ параболу. Такъ какъ уравненіе (6) содержитъ только y въ первой степени, то всѣ дѣйствительные корни уравненія (5) выражаютъ абсциссы дѣйствительныхъ точекъ, общихъ двумъ кривымъ.

Параболу (7) можно замѣнить другою кривою втораго порядка, проходящею черезъ точки, общія кривымъ (6) и (7). Общее уравненіе кри-

выхъ второй степени, удовлетворяющихъ этому условію (§ 275), есть

(8) $$kx^2 + m^2y^2 + qx + m(p-k)y + r = 0,$$

гдѣ k есть произвольный параметръ. Если возьмемъ $k = m^2$, то кривая (8) можетъ быть только окружностію круга; координаты a и b центра и радіусъ R этой окружности найдемъ отъ формулъ

(9) $$a = -\frac{q}{2m^2},\ b = \frac{m^2-p}{2m},\ R^2 = a^2 + b^2 \frac{r}{m^2}.$$

Если величина R^2 будетъ положительная, то уравненіе (8) выразитъ дѣйствительный кругъ, а дѣйствительныя корни уравненія (5) будутъ абсциссы точекъ пересѣченія этого круга съ параболою (6). Если величина R^2 будетъ отрицательная, то уравненіе (8) не будетъ имѣть дѣйствительныхъ рѣшеній (§ 85), и точно также система уравненій (6) и (7) или система равнозначущей съ уравненіями (5) и (6) не будетъ имѣть дѣйствительныхъ корней; такимъ образомъ четыре корня даннаго уравненія суть мнимыя.

406. Разсмотримъ теперь уравненіе третьей степени, приведенное къ виду

$$x^3 + px + q = 0.$$

Если это уравненіе умножимъ на x, въ слѣдствіе чего взойдетъ корень $x = 0$, на который не будемъ обращать вниманія, то получимъ уравненіе четвертой степени $x^4 + px^2 + qx = 0$, къ которому приложимъ предъидущій способъ. Такъ какъ величина R^2 въ этомъ случаѣ равна $a^2 + q^2$, то она всегда будетъ положительная. Кругъ и парабола проходятъ черезъ начало координатъ; абсцисса этой точки есть корень $x = 0$, которымъ надобно пренебречь.

Одна и та же парабола $x^2 - my = 0$ можетъ служить для рѣшенія всѣхъ уравненій третьей и четвертой степени; только кругъ измѣняетъ, смотря по величинамъ коеффиціентовъ даннаго уравненія. Этотъ способъ можно употреблять съ выгодою только тогда, когда приходится послѣдовательно рѣшить большее число уравненій; тогда съ тщаніемъ чертятъ параболу, имѣющую произвольный параметръ; и въ каждомъ частномъ примѣрѣ останется только опредѣлить кругъ.

407. Если неизвѣстное x будетъ линія, и если единица длины не обозначена, то уравненіе $f(x) = 0$ будетъ однородное, относительно неизвѣстнаго x и различныхъ извѣстныхъ линій. Въ этомъ случаѣ, когда уравненіе будетъ четвертой степени, и если коеффиціенты p, q, r будутъ раціональныя функціи или ирраціональныя функціи второй степени

данныхъ линій, то, взявъ за параметръ m параболы произвольную линію, можно будетъ построить помощію линейки и циркуля координаты центра и радіусъ круга.

Но если уравненіе будетъ числовое, т. е. если коеффиціенты будутъ данныя числа, то за m беремъ опредѣленное число, дѣлаемъ напримѣръ $m=1$ и строимъ параболу и кругъ, по произвольному масштабу; абсцисса одной изъ точекъ пересѣченія, взятая по этому масштабу, дастъ величину неизвѣстнаго числа x.

Извѣстно, что рѣшеніе двухъ уравненій второй степени съ двумя неизвѣстными x и y, или нахожденіе точекъ пересѣченія двухъ кривыхъ втораго порядка приводится къ рѣшенію уравненія четвертой степени съ однимъ неизвѣстнымъ. Слѣдовательно, это можно рѣшить съ помощію опредѣленной параболы и круга. Однако, если одна изъ кривыхъ втораго порядка уже начерчена, то ее можно употребить съ кругомъ.

408. *Примѣръ I.* Черезъ данную точку P, координаты которой суть x_1 и y_1 провести нормаль къ параболѣ $y^2-2px=0$. Координаты x и y подошвы нормали опредѣляются двумя уравненіями

$$y^2-2px=0,\quad xy-(x_1-p)\,y-py_1=0.$$

Если всѣ члены послѣдняго уравненія умножимъ на y и если y^2 замѣнимъ черезъ $2px$, то получимъ новую параболу $x^2-(x_1-p)\,x-\frac{y_1y}{2}=0$; сложивъ почленно уравненія двухъ параболъ, получимъ кругъ $x^2+y^2-(x_1+p)\,x-\frac{y_1y}{2}=0$. Точки, въ которыхъ этотъ кругъ пересѣкаетъ данную параболу, будутъ подошвами нормалей (§ 306).

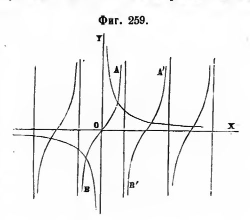
Фиг. 258.

Примѣръ II. Рѣшить числовое уравненіе $x^3-2x-5=0$. Помощію масштаба строимъ параболу $x^2=y$; опишемъ кругъ, центръ котораго C имѣетъ координатами $a=\frac{5}{2}$, $b=\frac{3}{2}$ и который проходитъ черезъ начало координатъ. Этотъ кругъ пересѣкаетъ параболу только въ одной точкѣ M; слѣдовательно, данное уравненіе имѣетъ только одинъ дѣйствительный корень, который есть абсцисса OP точки M. Измѣривъ эту длину помощію также масштаба, получимъ $x=2{,}09$.

Примѣръ III. Рѣшить уравненіе $x^3-5x+1=0$. Опишемъ кругъ, центръ котораго C имѣетъ координатами $a=-\frac{1}{2}$, $b=3$ и который проходитъ черезъ начало координатъ; этотъ кругъ пересѣкаетъ параболу въ трехъ точкахъ; отсюда заключаемъ, что уравненіе имѣетъ три дѣйствительные корня; измѣривъ абсциссы, найдемъ, что два положителяные корня равны 0,20 и 2,13 приблизительно до одной сотой.

Примѣръ IV. Разсмотримъ трансцендентное уравненіе $x \operatorname{tg} x = 1$. Это уравненіе мы получимъ, исключивъ y изъ двухъ уравненій $y = \operatorname{tg} x$, $xy = 1$. Первое изъ этихъ уравненій выражаетъ кривую, состоящую изъ безконечнаго числа равныхъ вѣтвей, асимптоты которыхъ перпендикулярны къ оси x; второе выражаетъ равностороннюю гиперболу. Очевидно что вѣтвь справа гиперболы по крайней мѣрѣ пересѣкаетъ одинъ разъ каждую изъ вѣтвей OA, B'A'... трансцендентной кривой; сверхъ того на каждой вѣтви находится только одна точка пересѣченія, потому что при измѣненіи x, ординаты двухъ кривыхъ измѣняются въ обратныхъ направленіяхъ; если при извѣстной величинѣ x ординаты будутъ равны, то они при всякой различной величинѣ будутъ необходимо не равны. Корни уравненія по два равны и съ обратными знаками; первый положительный корень заключается между 0 и $\frac{\pi}{2}$, второй между π и $\frac{3\pi}{2}$, третій между 2π и $\frac{5\pi}{2}$ и т. д...; слѣдовательно, число корней безконечное. Назвавъ черезъ x_n n-ой корень, увидимъ, что разность между x_n и $(n-1)\pi$ будетъ очень мала, когда n будетъ очень велико. Для перваго корня кривая даетъ величину 0,86 приблизительно до одной сотой.

Фиг. 259.



Можно бы было также взять два уравненія $y = \operatorname{tang}\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$, $y = x$, и $y = \operatorname{tang} x'$, $y = \frac{\pi}{2} - x'$, полагая $\frac{\pi}{2} - x = x'$. Тогда гипербола замѣнилась бы прямою линіею.

409. *Замѣчанія.* Посредствомъ графическихъ способовъ, которые мы изложили, нельзя опредѣлить величины неизвѣстныхъ съ большою точностію; въ этомъ случаѣ приближеніе будетъ болѣе одной сотой корня.

Иногда для опредѣленія числа дѣйствительныхъ корней уравненія пользуются двумя кривыми, начерченными грубо. Но пока мы не можемъ подробно сказать о видѣ двухъ кривыхъ, до тѣхъ поръ мы не можемъ сдѣлать никакого строгаго заключенія объ этомъ построеніи. Вообще описаніе кривыхъ и опредѣленіе точекъ ихъ пересѣченія представляетъ тѣ же затрудненія, какъ и данный вопросъ.

КОНЕЦЪ ГЕОМЕТРІИ НА ПЛОСКОСТИ.

ГЕОМЕТРІЯ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

КНИГА ПЯТАЯ.

ГЛАВА I.

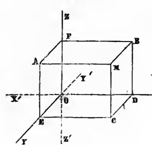
Координаты.

Положеніе точки въ пространствѣ опредѣляется *тремя* величинами, которыя называются *координатами* точки.

Прямолинейныя координаты.

410. Пусть XOY, YOZ, ZOX (*фиг.* 260) будутъ три неподвижныя плоскости, которыя пересѣкаются по прямымъ X′X, Y′Y, Z′Z; три перемѣщающіяся плоскости MD, ME, MF, параллельныя этимъ неподвижнымъ плоскостямъ, пересѣкаясь, опредѣляютъ точку M въ пространствѣ. Положеніе каждой перемѣщающейся плоскости опредѣляется ея разстояніемъ отъ неподвижной плоскости, которой она параллельна; это разстояніе отсчитывается параллельно пересѣченію двухъ другихъ неподвижныхъ плоскостей. Три разстоянія OD, OE, OF, которыя опредѣляютъ положеніе перемѣщающихся плоскостей, и которыя надо брать съ знаками + или —, смотря по тому, откладываются ли они по направленіямъ OX, OY, OZ или по противоположнымъ направленіямъ OX′, OY′, OZ′, суть три прямолинейныя ко-

Фиг. 260.



ординаты точки M; ихъ обыкновенно означаютъ буквами x, y, z. Три неподвижныя плоскости, пересѣкаясь взаимно, образуютъ восемь трегранныхъ угловъ; такимъ образомъ, чтобъ получить всѣ точки пространства, надо x, y, z измѣнять отъ $-\infty$ до $+\infty$.

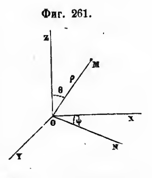
Перемѣщающіяся плоскости съ неподвижными плоскостями образуютъ параллелипипедъ, ребра котораго равны абсолютнымъ величинамъ координатъ точки M; точки A, B, C суть проекціи точки M на каждую изъ неподвижныхъ плоскостей; координаты одной изъ нихъ, напримѣръ A, относительно осей OZ, OY равны двумъ координатамъ y и z точки M. Точки D, E, F суть проекціи точки M на каждую изъ трехъ осей OX, OY, OZ; такимъ образомъ буквы x, y, z означаютъ проекціи радіуса OM на оси координатъ, если только проекціи будемъ разсматривать какъ положительныя въ томъ случаѣ, когда онѣ отсчитываются по направленіямъ OX, OY, OZ, и какъ отрицательныя, когда отсчитываются по противоположнымъ направленіямъ.

Обыкновенно берутъ три неподвижныя плоскости и, слѣдовательно, три оси взаимно перпендикулярныя; тогда параллелепипедъ будетъ прямоугольный и проекціи ороогональныя.

Полярныя координаты.

411. Пусть будутъ три перпендикулярныя между собой оси OX, OY, OZ (*фиг.* 261). Положеніе точки M можно опредѣлить длиною ρ радіуса вектора OM, угломъ φ, образуемымъ этимъ радіусомъ векторомъ съ осью OZ, и наконецъ угломъ ψ, образуемымъ плоскостію ZOM съ плоскостію координатъ ZOX. Если ON будетъ проекція OM на плоскость XOY, то уголъ XON будетъ мѣра двуграннаго угла ψ; его отсчитываютъ въ извѣстномъ направленіи, напримѣръ, поворачивая отъ OX къ OY.

Фиг. 261.

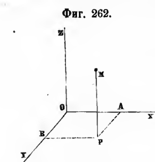


Выраженіе поверхностей уравненіями.

412. Разсмотримъ какую-нибудь поверхность въ пространствѣ. Черезъ точку O проведемъ три неподвижныя оси OX, OY, OZ (*фиг.* 262); въ плоскости XOY возьмемъ произвольную точку P и черезъ эту точку про-

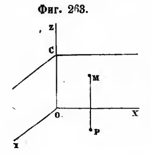
ведемъ линію PM, параллельную оси OZ до пересѣченія съ поверхностію въ точкѣ M; тогда длина ординаты PM будетъ совершенно опредѣлена. При перемѣщеніи точки P въ плоскости XOY, ордината PM будетъ измѣняться; но такъ какъ точка P перемѣщается произвольно въ плоскости, то ея координаты x и y будутъ два независимыя перемѣнныя; отсюда слѣдуетъ, что ордината z точки M поверхности есть функція двухъ другихъ координатъ x и y, разсматриваемыхъ какъ два независимыя перемѣнныя. Такимъ образомъ мы видимъ, что изъ геометрическаго опредѣленія поверхности можно вывести уравненіе между x, y, z, которое опредѣлитъ функцію z отъ x и y. Это уравненіе называется уравненіемъ поверхности.

Фиг. 262.

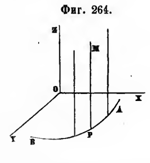


413. Положимъ, наоборотъ, что дано уравненіе $f(x, y, z) = 0$ между тремя перемѣнными; каждая система дѣйствительныхъ величинъ, которыя удовлетворяютъ этому уравненію, опредѣляетъ точку въ пространствѣ; совокупность же всѣхъ дѣйствительныхъ рѣшеній образуетъ систему точекъ, которая вообще составляетъ поверхность. Дѣйствительно, разсмотримъ прежде тотъ случай, когда уравненіе, содержащее только одну координату, напримѣръ z, будетъ вида $z = c$. Такъ какъ координаты x и y произвольны, то черезъ какую-нибудь точку P плоскости XOY проведемъ постоянную ординату PM (*фиг.* 263); геометрическое мѣсто точекъ M

Фиг. 263.



Фиг. 264.

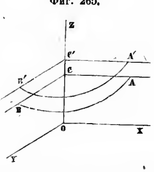


очевидно, есть плоскость, параллельная XOY. Положимъ теперь, что уравненіе содержитъ двѣ координаты, напримѣръ x и y. Уравненіе $f(x, y) = 0$ въ плоскости XOY выражаетъ вообще линію AB (*фиг.* 264). Черезъ какую-нибудь точку этой линіи проведемъ линіи PM, параллельную оси OZ; такъ какъ ордината z, которая не входитъ въ уравненіе, есть вели-

чина произвольная, то координаты всѣхъ точекъ прямой PM удовлетворяютъ уравненію. Слѣдовательно, уравненіе $f(x, y) = 0$ выражаетъ въ пространствѣ цилиндръ, параллельный оси OZ. Можетъ случиться, что уравненіе будетъ выражать одну или нѣсколько отдѣльныхъ точекъ въ плоскости; въ этомъ случаѣ оно выразитъ въ пространствѣ одну или нѣсколько прямыхъ.

Разсмотримъ наконецъ уравненіе $f(x, y, z) = 0$ между тремя координатами. На произвольномъ разстояніи $OC = c$ проведемъ плоскость параллельно плоскости XOY (*фиг.* 265); координаты x и y всѣхъ точекъ геометрическаго мѣста, расположенныхъ въ этой плоскости, должны удовлетворять уравненію $f(x, y, c) = 0$; но это уравненіе выражаетъ линію AB въ плоскости ACB. Если z дадимъ величину c', близкую къ c, то получимъ вторую линію A'B' въ плоскости A'C'B', которая будетъ мало отличаться отъ предъидущей. Вообще, когда z будетъ измѣняться непрерывно между извѣстными предѣлами, то мы получимъ непрерывный рядъ линій, которыя образуютъ поверхность.

Фиг. 265.



Этимъ способомъ доказывается не только существованіе поверхности, но довольно точно опредѣляется ея видъ посредствомъ ряда параллельныхъ сѣченій, которыя выражаютъ ихъ проекціями на одну изъ плоскостей координатъ.

Выраженіе линій.

414. Линію въ пространствѣ можно разсматривать, какъ пересѣченіе двухъ поверхностей; слѣдовательно, эта линія выразится системою двухъ совмѣстныхъ уравненій

$$f(x, y, z) = 0, \; f_1(x, y, z) = 0. \tag{1}$$

Систему (1) можно замѣнить безконечнымъ числомъ другихъ равнозначащихъ, напримѣръ, слѣдующими

$$f = 0, \; f - kf_1 = 0,$$

въ которомъ k означаетъ какое-нибудь постоянное, т. е. что поверхность

$f - kf_1 = 0$, проходитъ, какая бы ни была величина k, черезъ линію пересѣченія двухъ первыхъ. Если изъ двухъ уравненій (1) послѣдовательно исключимъ y и x, то получимъ два уравненія

(2) $$\varphi(x, z) = 0, \ \psi(y, z) = 0,$$

которыя выражаютъ два цилиндра, проектирующіеся по линіи на плоскость xz и на плоскость yz. Эти два цилиндра, пересѣкаясь, опредѣляютъ прямую.

Выражая фигуры въ пространствѣ алгебраическими символами, мы можемъ распространить на фигуры трехъ измѣреній аналитическія способы, которые мы употребляли при изученіи плоскихъ фигуръ.

Направленіе прямой.

415. Чтобы опредѣлить въ пространствѣ направленіе OI (*фиг.* 266), которое, положимъ, принадлежитъ прямой, проходящей черезъ начало координатъ, даются углы α, β, γ этого направленія съ тремя осями OX, OY, OZ положительныхъ координатъ. Для опредѣленія направленія прямой двухъ угловъ недостаточно, потому что если около OX и OY опишемъ два конуса, углы при вершинѣ которыхъ соотвѣтственно равны α и β, то эти два конуса пересѣкутся по направленію двухъ образующихъ, расположенныхъ симметрично относительно плоскости XOY; слѣдовательно, необходимо знать третій уголъ γ. Сверхъ того, очевидно, что эти всѣ три угла не могутъ быть произвольными, и когда два изъ нихъ извѣстны, третій можетъ имѣть только двѣ различныя величины. Вмѣсто угловъ можно взять ихъ косинусы, потому что между 0 и π можетъ быть только одинъ уголъ, имѣющій данный косинусъ. Синусы, наоборотъ, имѣютъ двоякое значеніе.

Фиг. 266.

416. Разсмотримъ прежде случай, когда координаты прямоугольныя. Означимъ черезъ x, y, z координаты какой-нибудь точки M прямой OI и черезъ l назовемъ разстояніе OM; координаты точки M суть ребра OD, OE, OF прямоугольнаго параллелепипеда, діагональ котораго есть OM, взятыя съ приличными знаками; эти координаты суть также ортогональныя проекціи діагонали OM на оси; слѣдовательно,

$$x = l\cos\alpha, \ y = l\cos\beta, \ z = l\cos\gamma.$$

Но извѣстно, что квадратъ діагонали прямоугольнаго параллелепипеда равенъ суммѣ квадратовъ трехъ его реберъ, т. е. $x^2 + y^2 + z^2 = l^2$; замѣнивъ x, y, z ихъ величинами и сокративъ общаго множителя l, получимъ соотношеніе

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1, \tag{1}$$

которое существуетъ между косинусами угловъ, образуемыхъ линіею съ прямоугольными осями.

417. Означивъ черезъ α', β', γ' углы, которые образуетъ вторая линія OI′ съ тѣми же осями, опредѣлимъ уголъ V двухъ линій OI, OI′. Такъ какъ проекціи прямой OM и ломаной ODCM на прямую OI′ равны, то получимъ

$$l\cos V = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma',$$

или, замѣнивъ x, y, z ихъ величинами,

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma'. \tag{2}$$

Отсюда видимъ, что линіи OI, OI′ будутъ перпендикулярны между собой, когда удовлетворяется слѣдующее условіе

$$\cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma' = 0. \tag{3}$$

418. Положимъ теперь, что оси косоугольныя, и черезъ λ, μ, ν означимъ три угла YOZ, ZOX, XOY, которые образуютъ оси между собой. Проектируя ортогонально на каждую изъ трехъ осей прямую OM и ломаную ODCM, получимъ

$$\begin{cases} l\cos\alpha = x + y\cos\nu + z\cos\mu, \\ l\cos\beta = x\cos\nu + y + z\cos\lambda, \\ l\cos\gamma = x\cos\mu + y\cos\lambda + z; \end{cases} \tag{4}$$

проектируя эти же линіи на прямую OI, получимъ

$$l = x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma. \tag{5}$$

Опредѣливъ изъ уравненій (4) величины x, y, z,

$$x = \frac{\cos\alpha(1-\cos^2\lambda) + \cos\beta(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + \cos\gamma(\cos\lambda\cos\nu - \cos\mu)}{1-\cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}\, l, \tag{6}$$

и, внеся ихъ въ уравненіе (6), получимъ соотношеніе

$$\begin{aligned} \cos^2\alpha\sin^2\lambda + \cos^2\beta\sin^2\mu + \cos^2\gamma\sin^2\nu + 2\cos\alpha\cos\beta(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) \\ + 2\cos\beta\cos\gamma(\cos\mu\cos\nu - \cos\lambda) + 2\cos\gamma\cos\alpha(\cos\nu\cos\lambda - \cos\mu) \\ = 1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu. \end{aligned} \tag{7}$$

между тремя углами, образуемыми какою-нибудь линіею съ косоугольными осями. Если въ уравненіи (5) замѣнимъ $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ ихъ величинами, найденными изъ уравненія (4), то получимъ формулу

$$l^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2yz\cos\lambda + 2zx\cos\mu + 2xy\cos\nu, \tag{8}$$

которая опредѣляетъ разстояніе OM.

Проектируя на прямую OI′ прямую OM и ломаную ODCM, получимъ

$$l\cos V = x\cos\alpha' + y\cos\beta' + z\cos\gamma';$$

замѣнивъ x, y, z ихъ величинами (6), получимъ формулу

$$\cos V = \frac{\left\{\begin{array}{l}\cos\alpha\cos\alpha'\sin^2\lambda + \cos\beta\cos\beta'\sin^2\mu + \cos\gamma\cos\gamma'\sin^2\nu \\ + (\cos\alpha\cos\beta' + \cos\beta\cos\alpha')(\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) + \ldots\end{array}\right\}}{1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu}, \tag{9}$$

которая опредѣляетъ уголъ между двумя линіями OI и OI′.

Общій знаменатель или детерминантъ можно представить въ замѣчательной формѣ, которую надобно знать:

$$\begin{aligned}
&1 - \cos^2\lambda - \cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu \\
&= (1-\cos^2\lambda)(1-\cos^2\mu) - \cos^2\lambda\cos^2\mu - \cos^2\nu + 2\cos\lambda\cos\mu\cos\nu \\
&= \sin^2\lambda\sin^2\mu - (\cos\lambda\cos\mu - \cos\nu)^2 \\
&= \sin\lambda\sin\mu - \cos\lambda\cos\mu + \cos\nu)(\sin\lambda\sin\mu + \cos\lambda\cos\mu - \cos\nu) \\
&= [\cos\nu - \cos(\lambda+\mu)][\cos(\lambda-\mu) - \cos\nu] \\
&= 4\sin\frac{\lambda+\mu+\nu}{2}\sin\frac{\mu+\nu-\lambda}{2}\sin\frac{\nu+\lambda-\mu}{2}\sin\frac{\lambda+\mu-\nu}{2}.
\end{aligned}$$

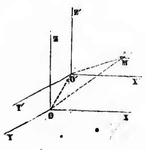
ГЛАВА II.

Преобразованіе координатъ.

Перемѣщеніе начала.

419. Три оси OX, OY, OZ желаемъ замѣнить тремя другими осями O′X′, O′Y′, O′Z′, соотвѣтственно параллельными первымъ и имѣющими то же направленіе (*фиг.* 267). Положеніе новыхъ осей опредѣлится координатами a, b, c новаго начала O′ относительно прежнихъ осей. Назовемъ черезъ x, y, z координаты какой-нибудь точки M въ пространствѣ относительно прежнихъ осей; черезъ x', y', z' координаты той же точки относительно новыхъ осей. Проектируя послѣдовательно на каждую отъ трехъ первоначальныхъ осей парал-

Фиг. 267.



лельно плоскости двухъ другихъ прямую OM и ломаную OO′M, получимъ

(1) $$x = a + x',\ y = b + y',\ z = c + z'.$$

Перемѣна направленія осей.

420. Разсмотримъ теперь тотъ случай, когда измѣняемъ направленіе осей, оставляя начало то же. Означимъ черезъ a, b, c косинусы угловъ, образуемыхъ осью OX′ съ тремя осями OX, OY, OZ; черезъ a', b', c' и a'', b'', c'' косинусы угловъ, образуемыхъ осями OY′ и OZ′ съ тремя осями OX, OY, OZ, и наконецъ черезъ λ, μ, ν углы YOZ, ZOX, XOY (*фиг.* 268).

Фиг. 268.

Пусть M будетъ какая-нибудь точка въ пространствѣ; черезъ точку M проведемъ линію MC параллельно оси OZ, и черезъ точку C, въ которой эта прямая пересѣкаетъ плоскость XOY, линію CD параллельно оси OY; тогда три величины OD, DC, CM, взятыя съ приличными знаками, будутъ координаты x, y, z точки M относительно прежнихъ осей. Черезъ точку M проведемъ линію MC′ параллельно оси OZ′, и черезъ точку C′, въ которой она пересѣкаетъ плоскость X′OY′, проведемъ линію C′D′, параллельную оси OY′. Тогда три величины OD′, D′C′, C′M, взятыя съ приличными знаками, будутъ координаты x', y', z' точки M относительно новыхъ осей. Проектируя двѣ ломаныя линіи ODCM, OD′C′M послѣдовательно на каждую изъ трехъ осей OX, OY, OZ, получимъ три уравненія.

(2) $$\begin{cases} x + y\cos\nu + z\cos\mu = ax' + a'y' + a''z', \\ x\cos\nu + y + z\cos\lambda = bx' + b'y' + b''z', \\ x\cos\mu + y\cos\lambda + z = cx' + c'y' + c''z', \end{cases}$$

изъ которыхъ можно для x, y, z найти выраженія первой степени относительно x', y', z'. Детерминантъ этихъ уравненій одинаковъ съ детерминантомъ уравненій § 418.

Надобно помнить, что a, b, c не произвольныя величины, но связаны условнымъ уравненіемъ; точно также a', b', c' и a'', b'', c''. Между этими же величинами получили бы три новыя отношенія, если бы захо-

тѣли, чтобы новыя оси были прямоугольныя, или вообще чтобы онѣ составляли между собою данные углы.

421. Если прежнія оси были прямоугольныя, то получимъ

$$\cos\lambda = \cos\mu = \cos\gamma = \cos\frac{\pi}{2} = 0,$$

и уравненіе (2) приметъ видъ

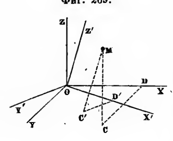
$$(3) \qquad \begin{cases} x = ax' + a'y' + a''z', \\ y = bx' + b'y' + b''z', \\ z = cx' + c'y' + c''z'. \end{cases}$$

Тогда соотношенія между косинусами будутъ

$$(4) \qquad \begin{cases} a^2 + b^2 + c^2 = 1, \\ a'^2 + b'^2 + c'^2 = 1, \\ a''^2 + b''^2 + c''^2 = 1. \end{cases}$$

Если новыя оси будутъ также прямоугольныя (*фиг.* 269), то кромѣ того получимъ соотношенія

Фиг. 269.



$$(5) \qquad \begin{cases} aa' + bb' + cc' = 0, \\ a'a'' + b'b'' + c'c'' = 0, \\ a''a + b''b + c''c = 0. \end{cases}$$

Если обѣ части уравненій (3) умножимъ на a, b, c, потомъ на a', b', c' и a'', b'', c'' и если сложимъ, то, принимая во вниманіе уравненія (4) и (5), получимъ

$$\begin{aligned} x' &= ax + by + cz \\ y' &= a'x + b'y + c'z \\ z' &= a''x + b''y + c''z. \end{aligned}$$

Эти формулы можно получить прямо, проектируя ломаныя линіи ODCM, OD'C'M на оси OX', OY', OZ'.

Такъ какъ новыя оси прямоугольныя, то величины (a, a', a''), (b, b', b''), (c, c', c''), которыя означаютъ косинусы угловъ, образуемыхъ направленіями OX, OY, OZ съ новыми осями, должны удовлетворять уравненіямъ

$$(7)\quad \begin{cases} a^2 + a'^2 + a''^2 = 1, \\ b^2 + b'^2 + b''^2 = 1, \\ c^2 + c'^2 + c''^2 = 1, \end{cases} \qquad (8)\quad \begin{cases} ab + a'b' + a''b'' = 0, \\ bc + b'c' + b''c'' = 0, \\ ca + c'c' + c''a'' = 0, \end{cases}$$

аналогичнымъ уравненіямъ (4) и (5).

422. Изъ предъидущихъ соотношеній между девятью косинусами находимъ большое число другихъ, между которыми мы перечислимъ слѣдующія, наиболѣе полезныя. Два послѣднія изъ уравненій (5) опредѣляютъ отношенія величинъ a'', b'', c''; отсюда находимъ

$$\frac{a''}{bc' - cb'} = \frac{b''}{ca' - ac'} = \frac{c''}{ab' - ba'} = \pm \frac{\sqrt{a''^2 + b''^2 + c''^2}}{\sqrt{(bc' - ac')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2}}.$$

Но

$$(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2$$
$$= (a^2 + b^2 + c^2)(a'^2 + b'^2 + c'^2) - (aa' + bb' + cc')^2 = 0.$$

Отсюда

$$(9)\qquad \frac{a''}{bc' - cb'} = \frac{b''}{ca' - ac'} = \frac{c''}{ab' - ba'} = \pm 1.$$

Надобно брать тотъ или другой знакъ, смотря по расположенію трегранного угла OX'Y'Z'. Если OX' совпадаетъ съ OX, OY' съ QY, то OZ' будетъ имѣть направленіе OZ, или обратное направленіе. Для этого частнаго положенія мы имѣемъ въ первомъ случаѣ $a = b' = c'' = 1$, $a' = a'' = b = b'' = c = c' = 0$ и надобно взять знакъ $+$; во второмъ случаѣ надобно взять знакъ $-$. Если трегранный уголъ перемѣщается непрерывно, то углы и, слѣдовательно, ихъ косинусы также измѣняются непрерывно; поэтому передъ каждымъ изъ двучленовъ надо взять одинъ и тотъ же знакъ, если этотъ двучленъ не обращается въ нуль; такъ какъ три двучлена не могутъ въ одно время равняться нулю, то заключаемъ, что при всякомъ положеніи трегранного угла надо брать одинъ и тотъ же знакъ.

Если составимъ детерминантъ уравненій (3) или (6), то вслѣдствіи уравненія (9) получимъ

$$ab'c'' + ac'b'' + ca'b'' - ba'c'' + bc'a'' - cb'a''$$
$$= (bc' - cb')a'' + (ca' - ac')b'' + (ab' - ba')c'' = \pm 1.$$

Формулы Эйлера.

423. Предъидущія формулы преобразованія одной прямоугольной системы въ другую прямоугольную имѣютъ то преимущество, что онѣ симметричны относительно угловъ; хотя угловъ девять, но въ дѣйствительности только три изъ нихъ произвольные; вотъ почему никогда ненадобно терять изъ виду соотношеній, связывающихъ ихъ. Эта зависимость девяти косинусовъ, въ извѣстныхъ случаяхъ, составляетъ затрудненіе доказать сходство двухъ выраженій. Слѣдовательно, нашли формулы, въ которые входятъ только три постоянныя; выборъ изъ нихъ естественно указывается во многихъ вопросахъ механики и астрономіи, гдѣ предлагаютъ новыя формулы.

Фиг. 270.

Положеніе новыхъ осей можно опредѣлить угломъ ψ, образуемымъ слѣдомъ OA плоскости $X'OY'$ на плоскости XOY съ OX, наклоненіемъ θ плоскости $X'OY'$ къ плоскости XOY, которое измѣряется угломъ ZOZ'; наконецъ, угломъ φ оси OX' съ слѣдомъ OA (*фиг* 270).

Первую систему можно привести ко второй системѣ посредствомъ трехъ послѣдовательныхъ вращеній. Сначала прежнія оси повернемъ около OZ на уголъ ψ; въ то время, какъ ось OZ остается неподвижною, оси OX и OY поворачиваются въ ихъ плоскости на уголъ ψ; слѣдовательно, ось OX займетъ положеніе OA или OX_1, а OY извѣстное положеніе OY_1. Замѣтимъ, что ось OZ', перпендикулярная къ плоскости $X'OY'$ и, слѣдовательно, къ слѣду OA, находится въ плоскости Y_1OZ, перпендикулярной къ OA. Дѣйствительно, повернемъ на уголъ θ около OA; въ то время, какъ ось OX_1 остается неподвижною, обѣ оси OY_1 и OZ поворачиваются въ ихъ плоскости на уголъ θ; слѣдовательно, OZ займетъ положеніе OZ', а OY_1 извѣстное положеніе OY_2, находящееся въ плоскости $X'OY'$. Наконецъ, повернемъ на уголъ φ около OZ'; такъ какъ при этомъ обѣ оси OX_1, OY_2 повернутся въ ихъ плоскости на уголъ φ, то ясно, что OX_1 придетъ въ OX', а OY_2 въ OY'. Послѣ этихъ трехъ послѣдовательныхъ поворотовъ прежнія оси совпадутъ съ новыми осями.

Такимъ образомъ получимъ четыре системы осей; именно $OXYZ$, OX_1Y_1Z, OX_1Y_2Z', $OX'Y'Z'$. Двѣ смежныя системы имѣютъ общую ось; отъ одной къ другой перейдемъ по формуламъ преобразованія геометріи на плоскости (§ 50). Такимъ образомъ посредствомъ послѣдовательныхъ преобразованій получимъ

$$x = x_1 \cos\psi - y_1 \sin\psi, \quad y_1 = y_2 \cos\theta - z' \sin\theta, \quad x_1 = x' \cos\varphi - y \sin\varphi,$$
$$y = x_1 \sin\psi + y_1 \cos\psi, \quad z = y_2 \sin\theta + z' \cos\theta, \quad y_2 = x' \sin\varphi + y \cos\varphi.$$

Исключивъ вспомогательныя величины x_1, y_1, y_2, получимъ

$$(10)\quad \begin{cases} x = x'(\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi\cos\theta) + y'(-\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta) \\ \quad + z'\sin\psi\sin\theta. \\ y = x'(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta) + y'(-\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta) \\ \quad + z'(-\cos\psi\sin\theta). \\ z = x'\sin\varphi\sin\theta + y'\cos\varphi\sin\theta + z'\cos\theta. \end{cases}$$

Эти формулы извѣстны подъ именемъ формулъ *Эйлера*.

Сравнивъ эти формулы съ формулами (3) § 411, получимъ слѣдующія уравненія

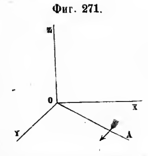
$$(11)\quad \begin{cases} a = \cos\varphi\cos\psi - \sin\theta\sin\psi\cos\theta, \\ b = \cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi\cos\theta, \\ c = \sin\varphi\sin\theta, \\ a' = -\sin\varphi\cos\psi - \cos\varphi\sin\psi\cos\theta, \\ b' = -\sin\varphi\sin\psi + \cos\varphi\cos\psi\cos\theta, \\ c' = \cos\theta\sin\theta, \\ a'' = \sin\psi\sin\theta, \\ b'' = -\cos\psi\sin\theta, \\ c'' = \cos\theta; \end{cases}$$

откуда

$$\tang \varphi = \frac{c}{c'}, \ \tang \psi = -\frac{a''}{b''}.$$

424. *Замѣчаніе.* Если тѣло вращается около неподвижной оси, то вращеніе можетъ происходить въ двухъ различныхъ направленіяхъ, которыя слѣдуетъ различать. Разсмотримъ, напримѣръ, вращеніе около оси OZ; въ слѣдствіе этого вращенія радіусъ OA, перпендикулярный къ OZ и движущійся около точки O, будетъ вращаться въ плоскости XOY (*фиг.* 271). Вообразимъ, что наблюдатель помѣщенъ на оси OZ такимъ образомъ, что ноги находятся въ O, а голова въ Z; этотъ наблюдатель будетъ видѣть, что радіусъ OA вращается или слѣва направо или справа налѣво; въ первомъ случаѣ вращеніе называется прямымъ относительно наблюдателя; во второмъ случаѣ обратнымъ. На фигурѣ вращеніе будетъ прямое, если OA будетъ вращаться отъ OX къ OY по направленію стрѣлки; обратное — если OA будетъ вращаться въ обратномъ направленіи.

Фиг. 271.



Двѣ системы прямоугольныхъ осей OXYZ, OXY'Z' не всегда могутъ совпадать. Чтобы это узнать, вообразимъ двухъ наблюдателей, одного, помѣщеннаго на OZ, другаго на OZ'; первый наблюдаетъ вращеніе отъ OX къ OY, второй отъ OX' къ OY'; если оба вращенія происходятъ въ одномъ и томъ же направленіи, напримѣръ въ прямомъ, какъ показано на фигурѣ, то обѣ системы осей могутъ совпасть. Дѣйствительно, если OZ помѣстимъ на OZ' и если повернемъ около общей оси такъ, чтобы OX совпала съ OX', то OY необходимо совпадетъ съ OY'; потому что OY и OY' вмѣстѣ образуютъ прямой уголъ съ OX или OX' въ томъ же направленіи. Но если оба вращенія будутъ имѣть обратное направленіе, то, совмѣстивъ OZ съ OZ', OX съ OX', увидимъ, что OY совмѣстилась не съ OY', но съ своимъ продолженіемъ.

Въ формулахъ Эйлера предполагается, что двѣ системы прямоугольныхъ осей имѣютъ одинаковое расположеніе, т. е. что онѣ могутъ совпадать. Прежнюю систему приводимъ къ новой системѣ посредствомъ трехъ прямыхъ вращеній. Уголъ ψ при вращеніи около OZ измѣняется отъ 0 до 2π; уголъ θ при вращеніи около OA заключается между 0 и π, если только на пересѣченіи плоскостей XOY и X'OY' было прилично выбрано направленіе OA; уголъ φ при вращеніи около OZ' измѣняется отъ 0 до 2π.

425. *Общія формулы.* Если въ одно время перемѣняемъ начало и направленіе осей, то, проведя черезъ новое начало O', координаты котораго относительно прежней системы суть a, b, c, три оси OX_1, OY_1, OZ_1 параллельно первымъ и по одному съ ними направленію, получимъ $x = a + x_1$, $y = b + y_1$, $z = c + z_1$; потомъ x_1, y_1, z_1 выразимъ по x', y', z' посредствомъ одного изъ вышенайденныхъ уравненій; слѣдовательно, чтобы получить общія формулы, достаточно въ этихъ уравненіяхъ замѣнить x, y, z соотвѣтственно черезъ $x - a$, $y - b$, $z - c$.

Раздѣленіе поверхностей на порядки.

426. Поверхности, какъ и плоскія линіи, дѣлятъ на поверхности алгебраическія и трансцендентныя, смотря по тому будутъ ли ихъ уравненія алгебраическія или трансцендентныя. Если уравненіе будетъ алгебраическое, то его можно всегда привести къ цѣлому виду, и отъ преобразованія прямолинейныхъ осей степень его не измѣнится. По числу, которое выражаетъ степень, уравненія поверхностей дѣлятъ на порядки; такимъ образомъ говорятъ, что поверхность есть перваго, втораго, третьяго и т. д. порядка, когда ея уравненіе есть первой, второй, третьей и т. д. степень. Чтобы алгебраическое уравненіе цѣлое и m-ой степени $f(x, y, z) = 0$ выражало дѣйствительно поверхность m-го порядка, надобно, чтобы его первая часть не разлагалась на произведеніе двухъ цѣлыхъ функцій, или чтобы оно было неприводимо. Два различныя неприводимыя уравненія выражаютъ двѣ поверхности, которыя могутъ имѣть одну или нѣсколько общихъ линій; но эти поверхности никогда не будутъ имѣть общихъ поверхностныхъ элементовъ; дѣйствительно, чтобы найти общія рѣшенія двухъ уравненій, нельзя брать произвольно два изъ перемѣнныхъ даже между очень сближенными предѣлами. Всякая плоскость пересѣкаетъ алгебраическую поверхность m-го порядка по алгебраической линіи, порядокъ которой не можетъ превышать m; дѣйствительно, если эту поверхность отнесемъ къ системѣ трехъ плоскостей координатъ, которыя составляютъ часть разсматриваемой поверхности, то уравненіе линіи пересѣченія относительно двухъ осей координатъ получимъ, замѣнивъ въ уравненіи поверхности одну изъ координатъ нулемъ; тогда многочленъ съ двумя перемѣнными, который отсюда получимъ, очевидно, не можетъ быть степени болѣе m. Слѣдовательно, прямая линія пересѣкаетъ поверхность m-го порядка по большей мѣрѣ въ m точкахъ, т. е. она расположена вся на поверхности.

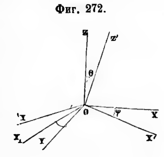
Такъ какъ поверхность перваго порядка пересѣкается какою-нибудь плоскостію по прямой линіи, то она есть плоскость.

Двѣ алгебраическія поверхности, степени которыхъ суть m и m', пересѣкаются по неразгибающейся кривой, которая пересѣкается плоскостію въ mm' точкахъ; потому что эта плоскость пересѣкаетъ обѣ поверхности по двумъ плоскимъ линіямъ порядка m и m', которыя, слѣдовательно, имѣютъ mm' общихъ точекъ. Неразгибающаяся кривая въ этомъ случаѣ называется mm' порядка.

Сѣченіе поверхности плоскостію.

427. Положимъ сперва, что плоскость проходитъ черезъ начало координатъ; положеніе ея опредѣлится угломъ ψ, который составляетъ ея слѣдъ OX' на плоскости XOY съ OX, и угломъ θ, который образуетъ съ OZ нормаль OZ', проведенная къ этой плоскости (*фиг.* 272). Черезъ точку O проведемъ прямую OY' перпендикулярно къ OX'; кривую пересѣченій мы отнесемъ къ двумъ прямоугольнымъ осямъ OX' и OY' расположеннымъ въ ея плоскости. Положимъ сперва, что первоначальныя оси поворачиваемъ около OZ на уголъ ψ, чтобы OX совмѣстить съ OX'; тогда OY займетъ въ плоскости XOY положеніе OY_1, перпендикулярное къ OX'; координата z не измѣняется; такимъ образомъ получимъ

Фиг. 272.



$$x = x' \cos\psi - y_1 \sin\psi, \qquad y = x' \sin\psi + y_1 \cos\psi.$$

Четыре прямыя OY_1, OY', OZ, OZ', перпендикулярныя къ OX', находятся въ одной и той же плоскости, перпендикулярной къ этой прямой; повернемъ вторую систему осей около OX' на уголъ θ, чтобы совмѣстить OY съ OY' и, слѣдовательно, OZ съ OZ'; координата x' не измѣняется; такимъ образомъ получимъ

$$y_1 = y' \cos\theta - z' \sin\theta, \; z = y' \sin\theta + z' \cos\theta.$$

Если разсмотримъ точку, находящуюся въ плоскости $X'OY'$, то ея координата z' будетъ равна нулю; поэтому послѣднія формулы приведутся къ $y_1 = y' \cos\theta$, $z = y' \sin\theta$, и мы получимъ также

$$(12) \qquad \begin{cases} x = x' \cos\psi - y' \sin\psi \cos\theta, \\ y = x' \sin\psi + y' \cos\psi \cos\theta, \\ z = y' \sin\theta. \end{cases}$$

Эти формулы можно вывести изъ формулъ Эйлера, сдѣлавъ въ нихъ $\varphi = 0$ и $z' = 0$. Если сѣкущая плоскость будетъ проходить не чрезъ начало координатъ, а чрезъ точку, координатами которая имѣетъ a, b, c,

то въ предъидущихъ формулахъ надо поставить $x - a$, $y - b$, $z - c$ вмѣсто x, y, z.

Преобразованіе прямолинейныхъ координатъ въ полярныя.

428. Такъ какъ полярная система, опредѣленная въ § 411, употребляется очень часто, то покажемъ, какимъ образомъ переходятъ отъ прямоугольной системы къ полярной системѣ, и обратно. Разсмотримъ случай, когда неподвижная ось есть OZ, плоскость XOZ есть неподвижная плоскость, отъ которой отсчитывается уголъ ψ (*фиг.* 273). Проекція OM на OZ есть $\rho \cos \theta$, проекція OP той же линіи на плоскость XOY есть $\rho \sin \theta$; наконецъ проекціи OP на оси OX и OY суть $\rho \sin \theta \cos \psi$, $\rho \sin \theta \sin \psi$. Слѣдовательно, если прямую OM и ломаную OPM будемъ проектировать на каждую изъ трехъ осей, то получимъ соотношенія

Фиг. 273.

(13) $$x = \rho \cos \psi \sin \theta, \; y = \rho \sin \psi \sin \theta, \; z = \rho \cos \theta.$$

Отсюда находимъ обратныя формулы

(14) $$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \operatorname{tang} \psi = \frac{y}{x}, \; \cos \theta = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \; .$$

Въ полярной системѣ направленіе OM вполнѣ опредѣляется двумя углами θ и ψ; поэтому ими очень часто пользуются. Въ астрономіи, если прямая OZ будетъ вертикалъ мѣста, плоскость ZOX меридіональная плоскость мѣста и если радіусъ OM будетъ лучъ звѣзды, то уголъ θ будетъ *зенитное разстояніе* этой звѣзды, а уголъ ψ ея *азимутъ*. Въ географіи OZ принимаютъ за линію полюсовъ; тогда θ будетъ дополненіе *широты*, а ψ *долгота*.

Разстояніе двухъ точекъ.

429. Мы уже нашли разстояніе начала координатъ отъ точки относительно прямоугольныхъ или косоугольныхъ координатъ. Пусть (x', y', z') (x'', y'', z'') будутъ координаты двухъ точекъ M′ и M″, l разстояніе этихъ

двухъ точекъ. Перенесемъ оси параллельно имъ самимъ въ точку M'. Если оси будутъ прямоугольныя, то получимъ (§ 416)

$$l = \sqrt{(x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2}.$$

Если оси будутъ косоугольныя, то получимъ (§ 418)

$$l = \sqrt{\begin{array}{l}(x''-x')^2 + (y''-y')^2 + (z''-z')^2 + 2(y''-y')(z''-z')\cos\lambda \\ +2(z''-z')(x''-x')\cos\mu + 2(x''-x')(y''-y')\cos\nu.\end{array}}$$

ГЛАВА III.

Плоскость и прямая линія.

ПЛОСКОСТЬ.

Построеніе уравненія первой степени.

430. Общее уравненіе первой степени съ тремя перемѣнными x, y, z есть

(1) $$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0.$$

Хотя мы видѣли (§ 426), что это уравненіе выражаетъ плоскость, но гораздо лучше доказать это предложеніе прямо. Уравненіе содержитъ три произвольные параметра, которые суть отношенія трехъ изъ величинъ A, B, C, D къ четвертой. Сверхъ того, если два изъ коеффиціентовъ A, B, C будутъ нули, то уравненіе приводится къ виду

$$\mathrm{C}z + \mathrm{D} = 0, \text{ или } z = -\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}};$$

это уравненіе выражаетъ плоскость, которая параллельна плоскости XOY, и которая пересѣкаетъ ось z на разстояніи $-\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{C}}$ отъ начала координатъ (§ 413). Если только одинъ изъ коеффиціентовъ, напримѣръ C, равенъ нулю, то получимъ уравненіе

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{D} = 0,$$

которое выражаетъ въ плоскости XOY прямую, а въ пространствѣ плоскость, параллельную OZ и проведенную черезъ эту прямую.

Положимъ наконецъ, что ни одинъ изъ коэффиціентовъ не равенъ нулю. Чтобы получить слѣды поверхности на три плоскости координатъ XOY, YOZ, ZOX, надо въ данномъ уравненіи сдѣлать $z=0$, или $x=0$, или $y=0$; такимъ образомъ мы получимъ три прямыя PQ, QR, RP (*фиг.* 274), имѣющія уравненіями

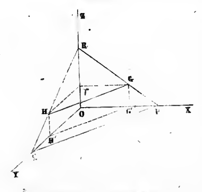
$$Ax+By+D=0,\quad By+Cz+D=0,\quad Ax+Cz+D=0.$$

Пересѣчемъ поверхности плоскостію $z=c$, параллельною плоскости XOY; тогда проекція пересѣченія на плоскость XOY выразится уравненіемъ

$$Ax+By+Cc+D=0;$$

это есть прямая G'H', параллельная PQ. Такъ какъ самое пересѣченіе, есть линія, по которой плоскость $z=c$, параллельная плоскости XOY, пересѣкаетъ плоскость проекцій, проведенную черезъ G'H', то это пересѣченіе есть прямая GH, параллельная G'H' и, слѣдовательно, параллельная PQ. Сверхъ того прямая GH пересѣкаетъ прямую PR въ точкѣ G. Слѣдовательно, можно разсматривать, что поверхность описывается прямою GH, которая двигается параллельно прямой PQ, опираясь постоянно на другую прямую PR; слѣдовательно, эта поверхность есть плоскость.

Фиг. 274.



431. Обратно, всякая плоскость выражается уравненіемъ первой степени между перемѣнными x, y, z. Дѣйствительно, если плоскость будетъ параллельна одной изъ плоскостей координатъ, напримѣръ XOY, то, означивъ чрезъ c координату z точки, въ которой она пересѣкаетъ ось OZ, уравненіе ея будетъ $z=c$. Во вторыхъ, если плоскость будетъ параллельна только одной изъ осей, напримѣръ OZ, то ея слѣдъ на плоскости XOY варазится уравненіемъ вида $Ax+By+D=0$, и это выражаетъ въ пространствѣ данную плоскость.

Наконецъ положимъ, что плоскость не будетъ параллельна ни одной изъ осей; пусть

$$z=ax+\gamma,\quad z=by+\gamma$$

будутъ уравненія ея слѣдовъ PR и QR на плоскостяхъ XOZ и YOZ.

Коэффиціенты уравненія

$$(1) \qquad Ax + By + Cz + D = 0$$

можно расположить такимъ образомъ, что бы она совпала съ данною плоскостію. Дѣйствительно, слѣды плоскости, выражаемой уравненіемъ (1), на плоскости XOZ и YOZ выражаются уравненіями

$$z = -\frac{A}{C}x - \frac{D}{C}, \quad z = -\frac{B}{C}y - \frac{D}{C};$$

эти слѣды совпадутъ съ линіями PR, QR данной плоскости, если

$$\frac{A}{C} = -a, \frac{B}{C} = -b, \frac{D}{C} = -\gamma,$$

или

$$A = -Ca, \quad B = -Cb, \quad D = -C\gamma.$$

Внеся эти величины въ уравненіе (1) и сокративъ послѣ множителя C, получимъ

$$z - ax - by - \gamma = 0.$$

Условія параллельности двухъ плоскостей.

432. Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ будутъ уравненія двухъ плоскостей. Чтобы эти плоскости были параллельны, необходимо, чтобы ихъ слѣды на двухъ плоскостяхъ координатъ были соотвѣтственно параллельны. Слѣды на плоскости XOZ выражаются уравненіями

$$Ax + Cz + D = 0, \quad A'x + C'z + D' = 0;$$

эти двѣ прямыя будутъ параллельны, если онѣ будутъ имѣть одинаковые угловые коэффиціенты, т. е. если $-\frac{C}{A} = -\frac{C'}{A'}$, или $\frac{A}{A'} = \frac{C}{C'}$. Точно также слѣды на плоскости YOZ будутъ параллельны, если $\frac{B}{B'} = \frac{C}{C'}$. Такимъ образомъ, чтобы двѣ плоскости были параллельны, надобно, чтобы

$$(2) \qquad \frac{A}{A'} = \frac{B}{B'} = \frac{C}{C'},$$

т. е. чтобы коэффиціенты перемѣнныхъ были пропорціональны.

Общее уравненіе плоскостей, проходящихъ черезъ данную точку.

433. Такъ какъ общее уравненіе первой степени содержитъ три произвольные параметра, то для опредѣленія плоскости нужны три условія.

Найдемъ прежде общее уравненіе плоскостей, проходящихъ черезъ данную точку M′, координаты которой суть x', y', z'. Пусть

(1) $$Ax + By + Cz + D = 0$$

будетъ уравненіе какой-нибудь плоскости. Чтобы эта плоскость проходила черезъ точку M′, надобно, чтобы координаты этой точки удовлетворяли уравненію плоскости; такимъ образомъ получимъ условіе

(3) $$Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$

изъ котораго опредѣляется одинъ изъ коеффиціентовъ, напримѣръ коеффиціентъ D. Замѣнивъ въ уравненіи (1) D его величиною, получимъ уравненіе

(4) $$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = 0,$$

которое содержитъ два произвольные параметра, т. е. отношеніе двухъ изъ трехъ коеффиціентовъ A, B, C къ третьему; это есть общее уравненіе плоскостей, проходящихъ черезъ точку M′.

Если чрезъ точку мы желали провести плоскость, параллельную данной плоскости, то уравненіе искомой плоскости будетъ вида (4); сверхъ того, какъ мы видѣли, надо взять коеффиціенты A, B, C пропорціональными или, проще, равными коеффиціентамъ при x, y, z въ уравненіи данной плоскости.

Плоскость, проходящая черезъ три данныя точки.

434. Чтобы плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ проходила черезъ три данныя точки $(x', y'; z')$, (x'', y'', z'') (x''', y''', z'''), надобно, чтобы удовлетворялись три условія

$$Ax' + By' + Cz' + D = 0,$$
$$Ax'' + By'' + Cz'' + D = 0,$$
$$Ax''' + By''' + Cz''' + D = 0$$

Изъ этихъ уравненій первой степени опредѣлимъ отношенія $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ трехъ коеффиціентовъ къ четвертому.

Если три данныя точки находятся на трехъ осяхъ координатъ, то уравненіе плоскости будетъ имѣть очень простой видъ. Назовемъ черезъ a, b, c координаты точекъ P, Q, R, въ которыхъ плоскость пересѣкаетъ оси. Точку P мы получимъ, положивъ въ уравненіи плоскости $y=0$ и $z=0$, такимъ образомъ найдемъ $a=-\frac{D}{A}$; точно также получимъ $b=-\frac{D}{B}$ и $c=-\frac{D}{C}$. Если отношенія $\frac{A}{D}$, $\frac{B}{D}$, $\frac{C}{D}$ замѣнимъ ихъ величинами $-\frac{1}{a}, -\frac{1}{b}, -\frac{1}{c}$, то уравненіе плоскости представится въ видѣ

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1. \tag{5}$$

Пересѣченіе трехъ плоскостей.

435. Отысканіе точки пересѣченія трехъ плоскостей приводится къ рѣшенію трехъ уравненій первой степени

$$\begin{aligned} A\,x+B\,y+C\,z+D&=0,\\ A'x+B'y+C'z+D'&=0,\\ A''x+B''y+C''z+D''&=0, \end{aligned}$$

съ тремя неизвѣстными x, y, z. Если три плоскости будутъ пересѣкаться только въ одной точкѣ, то три уравненія будутъ имѣть только одно конечное рѣшеніе. Если три плоскости не будутъ имѣть общей точки, что можетъ быть тогда, когда плоскости будутъ пересѣкаться по двѣ по прямымъ параллельнымъ между собою, или когда двѣ плоскости будутъ параллельны, то три уравненія не будутъ имѣть рѣшенія. Если три плоскости будутъ проходить черезъ одну прямую, или будутъ совпадать, то получимъ безконечное число рѣшеній; въ первомъ случаѣ можно произвольно взять одно; во второмъ два изъ перемѣнныхъ.

Углы, образуемые нормалью, проведенною къ плоскости съ осями.

436. До сихъ поръ мы не дѣлали никакого предположенія относительно координатъ; въ послѣдующемъ мы будемъ предполагать оси прямоугольными. Пусть $Ax+By+Cz+D=0$ будетъ уравненіе плоскости; координаты

a, b, c точекъ P, Q, R, въ которыхъ эта плоскость пересѣкаетъ оси, опредѣляются формулами

$$a = -\frac{D}{A},\ b = -\frac{D}{B},\ c = -\frac{D}{C}.$$

начала координатъ O опустимъ на плоскость перпендикуляръ OL (*фиг.* 275) и подошву L перпендикуляра соединимъ съ точками P, Q, R; такимъ образомъ получимъ прямоугольные треугольники OLP, OLQ, OLR. Разстояніе OL, которое мы означимъ черезъ l, есть проекція прямыхъ OP, OQ, OR на прямую OL. Если черезъ α, β, γ означимъ углы, образуемые прямою OL съ осями, то получимъ $l = a\cos\alpha = b\cos\beta = c\cos\gamma$; и, замѣнивъ a, b, c ихъ величинами, найдемъ

Фиг. 275.

$$(6)\qquad -\frac{l}{D} = \frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C}.$$

Такъ какъ $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$, то каждое изъ этихъ отношеній будетъ равно

$$\pm\frac{\sqrt{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}},$$

Отсюда находимъ

$$(7)\qquad \frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C} = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

Изъ этихъ формулъ опредѣляются углы, которые образуетъ нормаль, проведенная къ плоскости, съ осями координатъ, и слѣдовательно углы, которые образуетъ плоскость съ плоскостями координатъ. Двойной знакъ относится къ двумъ противоположнымъ направленіямъ нормали.

Уголъ двухъ плоскостей.

437. Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ будутъ уравненія двухъ плоскостей. Искомый уголъ равенъ углу нормалей, проведенныхъ къ двумъ даннымъ плоскостямъ изъ начала координатъ. Означимъ черезъ α, β, γ углы, образуемые первою нормалью съ осями;

черезъ α', β', γ' углы второй нормали и черезъ V искомый уголъ. Предполагая оси прямоугольными, получимъ (§ 417)

$$\cos V = \cos\alpha\cos\alpha' + \cos\beta\cos\beta' + \cos\gamma\cos\gamma',$$

откуда, по формулѣ (7),

(8) $$\cos V = \pm\frac{AA' + BB' + CC'}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{A'^2+B'^2+C'^2}}.$$

Чтобы эти двѣ плоскости были перпендикулярны между собой, необходимо, чтобы

(9) $$AA' + BB' + CC' = 0.$$

Разстояніе точки отъ плоскости.

438. Когда мы отыскивали углы, которые образуетъ нормаль OL, проведенная къ плоскости $Ax + By + Cz + D = 0$ съ осями (§ 436), мы чрезъ l означали длину этой нормали, и получили равныя отношенія

$$-\frac{l}{D} = \frac{\cos\alpha}{A} = \frac{\cos\beta}{B} = \frac{\cos\gamma}{C} = \frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}};$$

отсюда слѣдуетъ

(10) $$l = \frac{\pm D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

По этой формулѣ опредѣляется разстояніе начала координатъ отъ плоскости въ прямоугольныхъ координатахъ.

Отсюда легко получить разстояніе какой-нибудь точки M, координаты которой суть x_1, y_1, z_1. Если оси перенесемъ параллельно имъ самимъ въ точку M, то уравненіе плоскости будетъ

$$Ax' + By' + Cz' + (Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D) = 0.$$

Въ слѣдствіе формулы (10) разстояніе точки M отъ плоскости выразится

(11) $$l = \frac{\pm(Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Если въ уравненіи плоскости коэффиціенты замѣнимъ величинами пропорціональными, опредѣляемыми формулами (6), то уравненіе будетъ имѣть видъ

(12) $$x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma - l = 0.$$

Первая часть, въ которой x, y, z разсматриваются какъ координаты какой-нибудь точки пространства, выражаетъ разстояніе этой точки отъ плоскости; здѣсь надо принимать знаки $+$ или $-$, смотря потому будутъ ли точки и начало координатъ находиться по обѣимъ сторонамъ плоскости или по одной.

ПРЯМАЯ ЛИНІЯ.

Проекція прямой.

439. Самый простой способъ опредѣлять прямую въ пространствѣ состоитъ въ томъ, чтобы разсматривать ее, какъ пересѣченіе двухъ плоскостей. Слѣдовательно прямая выразится двумя уравненіями первой степени

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A'x + B'y + C'z + D' = 0$$

Если изъ этихъ двухъ уравненій исключимъ y или x, то получимъ два уравненія вида

(1) $$x = az + p, \; y = bz + q;$$

это суть уравненія плоскостей, которыя проектируютъ прямую на плоскости XOZ или на плоскость YOZ. Каждое изъ этихъ уравненій можно также разсматривать какъ уравненіе ея проекціи въ ея плоскости.

Если въ уравненіяхъ (1) сдѣлаемъ $z = 0$, то получимъ координаты $x = p$, $y = q$ слѣда прямой на плоскость XOY.

Если двѣ прямыя будутъ параллельны, то ихъ проекціи будутъ соотвѣтственно параллельны, и угловые коэффиціенты a и b будутъ одинаковы въ уравненіяхъ этихъ прямыхъ.

Отюда видимъ, что общее уравненіе прямой содержитъ четыре произвольные параметра a, b, p, q.

Общее уравненіе прямыхъ, проходящихъ черезъ данную точку.

440. Чтобы прямая

(1) $$x = az + p, \; y = bz + q$$

проходила черезъ данную точку M, которая координатами имѣетъ x', y', z', надобно, чтобы координаты этой точки удовлетворяли двумъ уравненіямъ

прямой; отсюда находимъ два уравненія $x' = az' + p$, $y' = bz' + q$, которыя опредѣляютъ два параметра, напримѣръ p и q. Замѣнивъ p и q ихъ величинами, получимъ уравненія

$$x - x' = a\,(z - z'),\ y - y' = b\,(z - z'), \tag{2}$$

въ которыхъ два параметра a и b произвольные и которыя выражаютъ всѣ прямыя, проходящія черезъ данную точку.

Прямая, проходящая черезъ двѣ данныя точки.

441. Уравненія (2) выражаютъ какую-нибудь прямую, проходящую черезъ точку M; эта прямая пройдетъ черезъ вторую точку M', которая координатами имѣетъ x'', y'', z'', если удовлетворяются условію

$$x'' - x' = a\,(z'' - z'),\ y'' - y' = b\,(z'' - z');$$

отсюда находимъ

$$a = \frac{x'' - x'}{z'' - z'},\ b = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}:$$

и уравненія искомой прямой будутъ

$$x - x' = \frac{x'' - x'}{z'' - z'}(z - z'),\ y - y' = \frac{y'' - y'}{z'' - z'}(z - z'), \tag{3}$$

или

$$\frac{x - x'}{x'' - x'} = \frac{y - y'}{y'' - y'} = \frac{z - z'}{z'' - z'}. \tag{4}$$

Уравненія (2) и (3) мы получимъ непосредственно, замѣчая, что если прямая проходитъ черезъ точку, то проекціи прямой проходятъ черезъ проекціи точки.

Пересѣченіе прямой съ плоскостію.

442. Координаты точки пересѣченія прямой съ плоскостію мы найдемъ точно такъ же, какъ координаты точки пересѣченія трехъ плоскостей, т. е. рѣшивъ три уравненія первой степени съ тремя неизвѣстными. Если уравненія прямой будутъ

$$x = az + p,\ y = bz + q,$$

а уравненіе плоскости

$$Ax + By + Cz + D = 0,$$

то, исключивъ x и y, получимъ координату z точки пересѣченія

$$z = -\frac{Ap + Bq + D}{Aa + Bb + C}$$

Если

(5) $$Aa + Bb + C = 0,$$

то z будетъ равняться безконечности, т. е. точка пересѣченія удаляется въ безконечность, и прямая будетъ параллельна плоскости.

Если въ одно и то же время мы имѣемъ

(6) $$Aa + Bb + C = 0,\ Ap + Bq + D = 0,$$

то величина z будетъ неопредѣленная, и прямая будетъ имѣть безконечное число точекъ, общихъ съ плоскостію, т. е. она будетъ находиться въ плоскости. Первое изъ условій (6) выражаетъ, что прямая параллельна плоскости; второе, что слѣдъ прямой на плоскости xy, координатами который имѣетъ (p, q, o), находится въ плоскости.

Условіе пересѣченія двухъ прямыхъ.

443. Двѣ прямыя, расположенныя произвольно въ пространствѣ, вообще не пересѣкаются; чтобы онѣ пересѣкались, надобно, чтобы ихъ уравненія

$$\begin{cases} x = az + p \\ y = bz + q \end{cases} \qquad \begin{cases} x = a'z + p' \\ y = b'z + q' \end{cases}$$

удовлетворялись однѣми и тѣми же величинами x, y, z; это будетъ только тогда, когда удовлетворяется условіе

(7) $$(a - a')(q - q') - (b - b')(p - p') = 0,$$

которое получается отъ исключенія x, y, z.

Общее уравненіе плоскостей, проходящихъ черезъ прямую пересѣченія двухъ данныхъ плоскостей.

444. Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ будутъ уравненія двухъ плоскостей; уравненіе

$$(8) \qquad (Ax + By + Cz + D) - k(A'x + B'y + C'z + D') = 0,$$

въ которомъ k есть произвольный параметръ, выразитъ всѣ плоскости, проходящія черезъ прямую пересѣченія двухъ первыхъ плоскостей. Очевидно, что при всякой величинѣ параметра k, плоскость, выражаемая уравненіемъ (8), пройдетъ черезъ прямую пересѣченія данныхъ плоскостей, потому что это уравненіе удовлетворяется координатами каждой изъ точекъ общихъ двумъ плоскостямъ. Очевидно, также, что уравненіе (8) выражаетъ всѣ плоскости, проходящія черезъ прямую пересѣченія двухъ данныхъ плоскостей, потому что одна какая-нибудь изъ этихъ плоскостей опредѣляется прямою пересѣченія и точкою (x', y', z'), взятою произвольно въ пространствѣ; параметръ k можно опредѣлить такъ, чтобы плоскость (8) проходила черезъ эту точку; отсюда получаемъ условіе

$$(Ax' + By' + Cz' + D) - k(A'x' + B'y' + C'z' + D') = 0,$$

изъ котораго опредѣляется величина k. Слѣдовательно, искомая плоскость выразится уравненіемъ

$$(9) \qquad \frac{Ax + By + Cz + D}{Ax' + By' + Cz' + D} = \frac{A'x + B'y + C'z + D'}{A'x' + B'y' + C'z' + D'}.$$

Черезъ данную прямую провести плоскость перпендикулярную къ данной плоскости.

445. Пусть $Ax + By + Cz + D = 0$, $A'x + B'y + C'z + D' = 0$ будутъ уравненія данной прямой, $A''x + B''y + C''z + D'' = 0$ уравненіе данной плоскости. Такъ какъ искомая плоскость должна проходить черезъ прямую, то она выразится уравненіемъ вида

$$(Ax + By + Cz + D) - k(A'x + B'y + C'z + D') = 0.$$

Эта плоскость будетъ перпендикулярна къ данной плоскости, если будетъ

удовлетворено условіе (§ 437)

$$A''(A - kA') + B''(B - kB') + C''(C - kC') = 0;$$

отсюда находимъ

$$k = \frac{A''A + B''B + C''C}{A'A'' + B'B'' + C'C''};$$

слѣдовательно, искомая плоскость выразится уравненіемъ

$$(10) \qquad \begin{aligned}(A'A'' + B'B'' + C'C'')(Ax + By + Cz + D) \\ = (A''A + B''B + C''C)(A'x + B'y + C'z + D).\end{aligned}$$

Три данныя плоскости образуютъ трехгранный уголъ; черезъ одно изъ реберъ его мы провели плоскость, перпендикулярную къ противоположной грани. Плоскости, проведенныя черезъ два другіе ребра перпендикулярно къ противоположнымъ гранямъ, выразятся точно также уравненіями

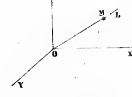
$$(A''A + B''B + C''C)(A'x + B'y + C'z) + D') = (AA' + BB' + CC')(A''x + B''y + C''z + D''),$$
$$(AA' + BB' + CC')\ A''x + B''y + C''z + D'') = (A'A'' + B'B'' + C'C'')(Ax + By + Cz + D).$$

Сложивъ почленно первыя два уравненія, получимъ третье; отсюда заключаемъ, что три плоскости проходятъ черезъ одну прямую.

Углы прямой съ осями.

446. Въ вопросахъ, относящихся къ прямой линіи, которые мы изложили до сихъ поръ, исключая предъидущаго вопроса, мы не дѣлали никакого предположенія относительно координатъ; во всемъ послѣдующемъ мы будемъ предполагать координаты прямоугольными.

Фиг. 276.



Пусть $x = az + p$, $y = bz + q$ будутъ уравненія прямой. Линія OL, проведенная черезъ начало координатъ (*фиг.* 276) параллельно этой прямой, выразится уравненіемъ

$$x = az, \ y = bz.$$

Означимъ черезъ α, β, γ углы, образуемые прямою OL съ осями. На этой прямой возьмемъ точку M, находящуюся на разстояніи l отъ начала

координатъ. Такъ какъ координаты x, y, z точки M суть ортоганальныя проекціи прямой OM на оси, то получимъ

$$x = l\cos\alpha,\; y = l\cos\beta,\; z = l\cos\gamma.$$

Если эти величины внесемъ въ уравненія прямой OL, то найдемъ

$$\cos\alpha = a\cos\gamma,\; \cos\beta = b\cos\gamma,$$

и слѣдовательно,

(11) $$\frac{\cos\alpha}{a} = \frac{\cos\beta}{b} = \frac{\cos\gamma}{1} = \frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

Двойной знакъ относится къ двумъ направленіямъ прямой.

Черезъ данную точку провести прямую, которая съ осями составляла бы данные углы.

447. Положимъ, что черезъ точку M', координаты которой суть x', y', z', надобно провести прямую, которая съ осями прямоугольныхъ координатъ образовала бы углы α, β, γ. Искомая прямая выразится уравненіями вида

$$x - x' = a(z - z'),\; y - y' = a(z - z'),$$

но

$$a = \frac{\cos\alpha}{\cos\gamma},\; b = \frac{\cos\beta}{\cos\gamma},$$

слѣдовательно,

(12) $$\frac{x-x'}{\cos\alpha} = \frac{y-y'}{\cos\beta} = \frac{z-z'}{\cos\gamma}.$$

Эти уравненія можно вывести прямо. Если черезъ x, y, z означимъ координаты какой-нибудь точки M прямой и черезъ ρ разстояніе M'M, то разности $x - x'$, $y - y'$, $z - z'$ будутъ проекціи линіи M'M на оси координатъ. Съ другой стороны, если линію M'M будемъ откладывать отъ точки M' по направленію, которое съ осями дѣлаетъ углы α, β, γ, то эти проэкціи будутъ равны $\rho\cos\alpha$, $\rho\cos\beta$, $\rho\cos\gamma$; если линію M'M будемъ откладывать по противоположному направленію, то эти проекціи будутъ равны $-\rho\cos\alpha$, $-\rho\cos\beta$, $-\rho\cos\gamma$. Слѣдовательно, во всѣхъ случаяхъ мы имѣемъ

$$x - x' = \rho\cos\alpha,\; y - y' = \rho\cos\beta,\; z - z' = \rho\cos\gamma,$$

или

$$\frac{x-x'}{\cos\alpha}=\frac{y-y'}{\cos\beta}=\frac{z-z'}{\cos\gamma}=\rho,$$

принимая ρ за величину положительную или отрицательную, смотря потому идетъ ли она по первому направленію или по противоположному.

Уголъ двухъ прямыхъ.

448. Пусть

$$\begin{cases}x=az+p,\\y=bz+q,\end{cases}\quad\begin{cases}x=a'z+p',\\y=b'z+q',\end{cases}$$

будутъ уравненія двухъ прямыхъ. Сначала опредѣлимъ углы (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$, образуемые каждой изъ нихъ съ осями, потомъ по извѣстной формулѣ (§ 417) выразимъ уголъ V, который онѣ составляютъ между собой. Такимъ образомъ получимъ

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{1}=\frac{\pm1}{\sqrt{a^2+b^2+1}},$$

$$\frac{\cos\alpha'}{a'}=\frac{\cos\beta'}{b'}=\frac{\cos\gamma'}{1}=\frac{\pm1}{\sqrt{a'^2+b'^2+1}},$$

откуда

(13) $$\cos V=\pm\frac{aa'+bb'+1}{\sqrt{a^2+b^2+1}\sqrt{a'^2+b'^2+1}}.$$

Прямыя будутъ между собою перпендикулярны тогда, когда удовлетворяется условіе

(14) $$aa'+bb'+1=0.$$

Уголъ прямой съ плоскостію.

449. Пусть $x=az+p$, $y=bz+q$ будутъ уравненія прямой; $Ax+By+Cz+D=0$ уравненіе плоскости. Уголъ V прямой съ плоскостію есть дополнительный углу, который образуетъ прямая съ нормалью, проведенною къ плоскости.

Если черезъ α, β, γ назовемъ углы, образуемые прямой съ осями; черезъ α', β', γ' углы, образуемые нормалью, проведенною къ плоскости съ тѣми же осями, то получимъ

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{1}=\frac{\pm 1}{\sqrt{a^2+b^2+1}}.$$

$$\frac{\cos\alpha'}{A}=\frac{\cos\beta'}{B}=\frac{\cos\gamma'}{C}=\frac{\pm 1}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}},$$

и слѣдовательно,

(15) $$\sin V=\frac{\pm(Aa+Bb+C)}{\sqrt{(A^2+B^2+C^2)\ (a^2+b^2+1)}}.$$

Условія перпендикулярности прямой съ плоскостію.

450. Пусть $x=az+p$, $y=bz+q$ будутъ уравненія прямой, $Ax+By+Cz+D=0$ уравненіе плоскости. Означивъ черезъ α, β, γ углы прямой съ осями, черезъ α', β', γ' углы перпендикуляра проведеннаго къ плоскости, съ тѣми же осями, получимъ

$$\frac{\cos\alpha}{a}=\frac{\cos\beta}{b}=\frac{\cos\gamma}{1},$$

$$\frac{\cos\alpha'}{A}=\frac{\cos\beta'}{B}=\frac{\cos\gamma'}{C}.$$

Если прямая будетъ перпендикулярна къ плоскости, то углы α, β, γ будутъ соотвѣтственно равны угламъ α', β', γ' и раздѣливъ предъидущія отношенія по два, получимъ

(16) $$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{1}.$$

Изъ соотношеній (1) легко выводимъ теорему, которой пользуются въ начертательной геометріи; если прямая перпендикулярна къ плоскости, то проекція прямой на какую-нибудь плоскость перпендикулярна къ слѣду плоскости. Проекція прямой на плоскость XOZ выражается уравненіемъ $x=az+p$; уравненіе слѣда плоскости есть $Ax+Cz+D=0$; слѣдовательно, отношеніе $a=\frac{A}{C}$ выражаетъ, что двѣ прямыя взаимно перпендикулярны. Точно также отношеніе $b=\frac{B}{C}$ выражаетъ, что проекція прямой на плоскость ZOY перпендикулярна къ слѣду плоскости.

Черезъ данную точку провести прямую перпендикулярно къ данной плоскости.

451. Пусть x', y', z' будутъ координаты данной точки M,

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

уравненіе плоскости. Уравненіе искомой прямой будетъ вида

$$x - x' = a(z - z'),\ y - y' = b(z - z').$$

Эта прямая будетъ перпендикулярна къ данной плоскости, если удовлетворяются условія

$$\frac{A}{a} = \frac{B}{b} = \frac{C}{1};$$

отсюда находимъ

$$a = \frac{A}{C},\quad b = \frac{B}{C};$$

и, слѣдовательно, искомая прямая выразится уравненіями

$$x - x' = \frac{A}{C}(z - z'),\ y - y' = \frac{B}{C}(z - z'),$$

или

$$(17) \qquad \frac{x - x'}{A} = \frac{y - y'}{B} = \frac{z - z'}{C}.$$

Эти уравненія мы получимъ непосредственно, замѣчая, что числители пропорціональны косинусамъ угловъ, которые прямая образуетъ съ осями; между тѣмъ какъ знаменатели пропорціональны косинусамъ угловъ, которые образуетъ нормаль, проведенная къ плоскости, съ осями; такъ какъ прямая совпадаетъ съ нормалью, то эти два ряда величинъ пропорціональны.

452. Координаты подошвы перпендикуляра, т. е. точки P, въ которой перпендикуляръ пересѣкаетъ плоскость, опредѣлятся изъ двухъ уравненій (17) и изъ уравненія плоскости. Уравненіе плоскости можно представить въ видѣ

$$A(x - x') + B(y - y') + C(z - z') = -(Ax' + By' + Cz' + D);$$

сложивъ числителей и знаменателей равныхъ отношеній (17), умноживъ прежде два члена перваго на A, два члена втораго на B, третьяго на C, составимъ новое отношеніе, равное каждому изъ предъидущихъ

$$\frac{A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')}{A^2+B^2+C^2}=\frac{-(Ax'+By'+Cz'+D)}{A^2+B^2+C^2};$$

такимъ образомъ получимъ уравненія

$$(18) \qquad \frac{x-x'}{A}=\frac{y-y'}{B}=\frac{z-z'}{C}=\frac{-(Ax'+By'+Cz'+D)}{A^2+B^2+C^2},$$

которыя опредѣляютъ подошву перпендикуляра.
Длину перпендикуляра мы получимъ, замѣнивъ разности $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, ихъ величинами въ формулѣ

$$l=\sqrt{(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2};$$

тогда получимъ

$$l=\frac{\pm(Ax'+By'+Cz'+D)}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

Такимъ образомъ мы снова получимъ формулу, которую вывели прежде другимъ способомъ (§ 438).

Черезъ данную точку провесть плоскость, перпендикулярную къ данной прямой.

453. Пусть x', y', z' будутъ координаты данной точки M, $x=az+p$, $y=bz+q$ уравненія прямой. Искомая плоскость, проходящая черезъ точку M, выразится уравненіемъ вида

$$A(x-x')+B(y-y')+C(z-z')=0.$$

Эта плоскость будетъ перпендикулярна къ прямой, если будутъ удовлетворены условія

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{1}.$$

Замѣнивъ отношенія $\frac{A}{C}$ и $\frac{B}{C}$ ихъ величинами a и b, уравненіе искомой плоскости будетъ

$$(19) \qquad a(x-x')+b(y-y')+(z-z')=0,$$

Это уравненіе мы получимъ также непосредственно, замѣчая, что величины a, b, 1 пропорціональны косинусамъ угловъ, образуемыхъ данною прямою съ осями, между тѣмъ какъ величины $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, пропорціональны косинусамъ угловъ, образуемыхъ съ этими же осями пря-

мою, которая идетъ отъ точки M къ какой-нибудь точкѣ плоскости; такъ какъ эти два направленія перпендикулярны между собой, то сумма произведеній этихъ величинъ по двѣ должна равняться нулю.

454. Точку, въ которой плоскость пересѣкаетъ прямую, мы опредѣлимъ изъ уравненія плоскости и двухъ уравненій прямой; представивъ эти въ видѣ

$$x - x' = a(z - z') - (x' - az' - p),$$
$$y - y' = b(z - z') - (y' - bz' - q),$$

получимъ, замѣняя $x - x'$ и $y - y'$ въ уравненіи плоскости

$$z - z' = \frac{a(x' - az' - p) + b(y' - bz' - q)}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Съ помощію этихъ формулъ легко вычислимъ разстояніе MP точки отъ данной прямой; но гораздо легче мы его получимъ другимъ способомъ.

Черезъ данную точку провести прямую перпендикулярно данной прямой.

455. Пусть x', y', будутъ координаты данной точки M, $x = az + p$, $y = bz + q$ уравненія данной прямой. Искомая прямая есть пересѣченіе двухъ плоскостей, изъ которыхъ одна проведена черезъ данную точку и данную прямую, а другая проведена черезъ точку перпендикулярно къ данной прямой. Первая выражается уравненіемъ (§ 444)

$$\frac{x - az - p}{x' - az' - p} = \frac{y - bz - q}{y' - bz' - q};$$

вторая (§ 453)

$$a(x - x') + b(y - y') + (z - z') = 0.$$

Эти два уравненія выражаютъ искомую прямую.

Разстояніе точки отъ данной прямой.

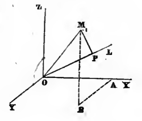
456. Условимся всегда называть черезъ x', y', z' координаты данной точки M. Положимъ прежде, что данная прямая OL проходитъ черезъ начало, и черезъ α, β, γ означимъ углы, которые она образуетъ съ осями прямоугольныхъ координатъ. Такъ какъ перпендикуляръ MP, опущенный изъ точки M на пряму OL, есть катетъ прямоугольнаго треугольника OMP (*фиг.* 277), то получимъ

$$l^2 = MP^2 = OM^2 - OP^2.$$

Разстояніе OM извѣстно: оно опредѣляется формулою

$$OM^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2.$$

Что же касается разстоянія OP, то это есть проекція прямой OM на прямую OL; выразивъ, что проекція прямой OM равна проекціи ломаной линіи OABM, стороны которой суть координаты x', y', z' точки M, найдемъ



Фиг. 277.

$$OP = x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma.$$

Такимъ образомъ получимъ

(20) $$l^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - (x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma)^2.$$

Эту формулу можно представить въ другомъ видѣ. Если $x'^2 + y'^2 + z'^2$ умножимъ на $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma$, т. е. на единицу, то получимъ

$$l^{2\prime} = (x'^2 + y'^2 + z'^2)(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma), \\ - (x' \cos\alpha + y' \cos\beta + z' \cos\gamma)^2;$$

исполнивъ дѣйствія и соединивъ прилично члены, получимъ формулу

(21) $$l^2 = (y' \cos\gamma - z' \cos\beta)^2 + (z' \cos\alpha - x' \cos\gamma)^2 \\ + (x' \cos\beta - y' \cos\alpha)^2.$$

Положимъ теперь, что данная прямая не проходитъ черезъ начало координатъ, и пусть

$$x = az + p,\ y = bz + q$$

будутъ уравненія этой прямой. Представимъ, что оси перенесены параллельно самимъ себѣ въ точку прямой, напримѣръ въ точку (p, q, o), въ которой она пересѣкаетъ плоскость XOY; такъ какъ координаты точки M относительно этихъ новыхъ осей суть $x' - p$, $y' - q$, z', то, прилагая формулу (21), получимъ

$$l^2 = [(y' - q)\cos\gamma - z' \cos\beta]^2 + [(x' - p)\cos\gamma - z' \cos\alpha]^2 \\ + [(x' - p)\cos\beta - (y' - q)\cos\alpha]^2;$$

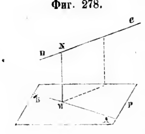
наконецъ, если $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$ замѣнимъ ихъ величинами, то получимъ формулу

(22) $$l^2 = \frac{(x - az' - p)^2 + (y' - bz' - q)^2 + [b(x' - p) - a(y' - q)]^2}{a^2 + b^2 + 1};$$

Кратчайшее разстояніе между двумя прямыми.

457. Пусть $x = az + p$, $y = bz + q$ будутъ уравненія прямой AB; $x = a'z + p'$, $y = b'z + q'$ уравненія прямой CD (*фиг.* 278). Извѣстно, что перпендикуляръ MN къ этимъ двумъ прямымъ есть кратчайшее ихъ разстояніе; извѣстно также, что длина l этого перпендикуляра MN равна разстоянію какой-нибудь точки прямой CD отъ плоскости P, проведенной черезъ прямую AB, параллельно CD. Поэтому найдемъ прежде уравненіе плоскости P; всякая плоскость, проведенная черезъ прямую AB, выражается уравненіемъ вида

Фиг. 278.



$$(x - az - p) - k(y - bz - q) = 0;$$

эта плоскость будетъ параллельна CD, если удовлетворяется условіе (§ 442)

$$a' - kb' - (a - kb) = 0;$$

отсюда $k = \frac{a - a'}{b - b'}$ и слѣдовательно плоскость P выразится уравненіемъ

$$(23) \qquad (b - q')(x - az - p) - (a - a')(y - bz - q) = 0.$$

Разстояніе отъ этой плоскости какой-нибудь точки прямой CD, напримѣръ точки (p', q', o), въ которой она пересѣкаетъ плоскость XOY, выразится (§ 438)

$$(24) \qquad l = \pm \frac{(b - b')(p - p') - (a - a')(q - q')}{\sqrt{(a - a')^2 + (b - b')^2 + (ab' - ba')^2}}.$$

Это есть кратчайшее разстояніе двухъ данныхъ прямыхъ.

458. Если надобно будетъ уравненіе общаго перпендикуляра MN, то нужно черезъ каждую изъ данныхъ прямыхъ AB, CD провести плоскость перпендикулярную къ плоскости P; эти двѣ плоскости, пересѣкаясь, опредѣлятъ прямую MN. Плоскость $(x - az - p) - k(y - bz - q) = 0$, проведенная черезъ прямую AB, будетъ перпендикулярна къ плоскости P, выражаемой уравненіемъ (23), если удовлетворяется условіе (§ 437)

$$(b - b') + k(a - a') - (a - kb)(ab' - ab') = 0;$$

отсюда опредѣляемъ величину k, и искомая плоскость выразится уравненіемъ

(25) $$(a-a')(x-az-p)+(b-b')(y-qz-q)$$
$$+(ab'-ba')[b(x-p)-a(y-q)]=0.$$

Плоскость, проведенная черезъ прямую CD, перпендикулярно къ плоскости P, точно также выражается уравненіемъ

(26) $$(a'-a)(x-a'z-p')+(b'-b)(y-b'z-q')$$
$$+(a'b-b'a)[b'(x-p')-a'(y-q')]=0.$$

Такимъ образомъ оба уравненія (25) и (26) выражаютъ общій перпендикуляръ NM.

Шаръ.

459. Такъ какъ поверхность шара есть геометрическое мѣсто точекъ, отстоящихъ отъ центра на постоянную величину равную радіусу, то она выразится относительно прямоугольныхъ координатъ уравненіемъ

$$(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2=r^2.$$

Если къ уравненію шара присоединимъ уравненіе плоскости, то получимъ уравненіе линіи пересѣченія, т. е. кругъ въ пространствѣ.

ПРИМѢРЫ.

1. Даны три прямоугольныя оси координатъ и точка на каждой изъ осей; найти въ функціи координатъ трехъ точекъ: 1) координаты центра круга, описаннаго около треугольника, который вершинами имѣетъ три точки; 2) координаты центра круга, вписаннаго въ тотъ же треугольникъ.

2. Дано коническое сѣченіе, найти въ пространствѣ геометрическое мѣсто такихъ точекъ, чтобы разстояніе каждой изъ нихъ отъ какой-нибудь точки коническаго сѣченія было раціональная функція координатъ коническаго сѣченія.

Разстояніе есть также раціональная функція координатъ искомой точки.

Если двѣ опредѣленныя точки геометрическаго мѣста соединимъ съ какою-нибудь точкою коническаго сѣченія, то сумма или разность разстояній будетъ постоянная.

3. Доказать, что если черезъ каждое изъ реберъ трегранного угла и бисектрису противоположной плоскости проведемъ плоскость, то полученныя такимъ образомъ три плоскости пересѣкутся по одной и той же прямой.

4. Данъ трегранный уголъ и прямая, проходящая черезъ его вершину; черезъ опредѣленную прямую и каждое ребро проводимъ плоскость, которая дѣлитъ противоположную плоскость на два угла; доказать, что произведеніе синусовъ трехъ несмежныхъ отрѣзковъ равно произведенію трехъ другихъ. (Обратно).

5. Данъ трегранный уголъ; черезъ вершину проводимъ какую-нибудь плоскость, которая на каждой плоскости опредѣляетъ два отрѣзка; доказать, что произведеніе синусовъ трехъ несмежныхъ отрѣзковъ равно произведенію трехъ другихъ съ обратнымъ знакомъ. (Обратно).

6. Найти площадь треугольника въ функціи координатъ вершинъ, предполагая оси прямоугольными.

7. Найти объемъ тетраэдра, одна изъ вершинъ котораго находится въ началѣ координатъ, въ функціи координатъ трехъ другихъ вершинъ.

8. Доказать, что три прямыя, соединяющія средины противоположныхъ сторонъ тетраэдра, проходятъ черезъ одну и ту же точку.

9. Найти уравненіе плоскости, проведенной черезъ точку оси x-овъ перпендикулярно къ этой оси, предполагая оси косоугольными.

10. Шесть плоскостей круговъ пересѣченія четырехъ шаровъ, взятыя по двѣ, пересѣкаются въ одной точкѣ.

ГЛАВА IV.

Происхожденіе поверхностей.

460. Поверхность иногда опредѣляютъ по свойству общему каждой ея точкѣ; въ этомъ случаѣ уравненіе поверхности мы получимъ, переводя аналитически это свойство. Но вообще поверхность опредѣляютъ движеніемъ линіи въ пространствѣ.

Пусть

$$F(x, y, z, a) = 0, \quad F_1(x, y, z, a) = 0$$

будутъ уравненія линіи, содержащія произвольный параметръ a; если a будемъ измѣнять непрерывно, то линія будетъ двигаться въ пространствѣ и образуетъ поверхность. Уравненіе этой поверхности мы получимъ, исключивъ параметръ a изъ двухъ уравненій движущейся линіи (§ 98).

Положимъ, что уравненія движущейся линіи

$$F(x, y, z, a, b) = 0, \quad F_1(x, y, z, a, b) = 0$$

содержатъ два произвольные параметра a и b, удовлятворяющія уравненію $\varphi(a, b) = 0$. Въ этомъ случаѣ только одинъ изъ этихъ параметровъ будетъ произвольный, и линія при движеніи образуетъ также поверхность, уравненіе которой получимъ, исключивъ два произвольные параметра a и b изъ трехъ предъидущихъ уравненій.

Вообще, если два уравненія движущейся линіи содержатъ n перемѣнныхъ параметровъ, которые должны удовлетворять $n-1$ условіямъ,

то эта линія образуетъ поверхность, уравненіе которой получимъ, исключивъ n перемѣнныхъ параметровъ изъ двухъ уравненій линіи и $n-1$ условій.

Движущаяся линія, которая образуетъ поверхность, называется *образующею*. Движеніе образующей обыкновенно опредѣляется такъ, чтобы она скользила по опредѣленнымъ неподвижнымъ линіямъ, которыя называются *управляющими*.

Пусть

$$f(x, y, z) = 0, \ f_1(x, y, z) = 0$$

будутъ уравненія управляющей; чтобы образующая пересѣкала управляющую, необходимо, чтобы четыре уравненія этихъ двухъ линій удовлетворялись однѣми и тѣми же величинами y, x, z; слѣдовательно если изъ этихъ четырехъ уравненій исключимъ x, y, z, то получимъ условное уравненіе между параметрами $a, b, \ldots$, которые содержатъ уравненія образующей. Каждая управляющая опредѣляетъ также условное уравненіе между перемѣнными параметрами. Такимъ образомъ, когда уравненія образующей содержитъ n перемѣнныхъ параметровъ, эта движущаяся линія должна перемѣщаться по $n-1$ управляющимъ.

Прямолинейными поверхностями называются поверхности, образуемыя движеніемъ прямой линіи. Такъ какъ общее уравненіе прямой линіи содержитъ четыре перемѣнныхъ параметра, то для опредѣленія движенія прямой линіи надобно имѣть три управляющія.

Прямолинейныя поверхности раздѣляются на два большіе порядка: поверхности разгибащіяся и поверхности неразгибающіяся; поверхность называется разгибающейся тогда, когда всѣ ея образующія суть касательныя къ одной и той же кривой, называемой *ребромъ возврата* поверхности. Между всѣми разгибающими поверхностями мы займемся поверхностями цилиндрическими и поверхностями коническими; потомъ мы представимъ нѣсколько примѣровъ поверхностей прямыхъ неразгибающихся.

Цилиндрическія поверхности.

461. *Цилиндрическою поверхностію* называется поверхность, образуемая прямою, которая двигается, оставаясь постоянно параллельной самой себѣ.

Образующая выразится уравненіями

$$x = az + p,\ y = bz + q,$$

въ которыхъ a и b суть постоянные параметры, p и q перемѣнные параметры. Движеніе образующей опредѣляется тѣмъ, чтобы она перемѣщалась по данной управляющей; отсюда находимъ условное уравненіе $\varphi(p, q) = 0$ между двумя перемѣнными параметрами p и q. Уравненіе поверхности мы получимъ, исключивъ эти два параметра изъ двухъ уравненій образующей и условнаго уравненія; если въ этомъ послѣднемъ p и q замѣнимъ ихъ величинами $x - az$, $y - bz$, найденными изъ двухъ первыхъ, то получимъ уравненіе цилиндрической поверхности

(1) $$\varphi(x - az, y - bz) = 0.$$

462. Вообще образующую можно выразить двумя уравненіями

$$ax + by + cz + d = \alpha,\ a'x + b'y + c'z + d' = \beta,$$

въ которыхъ только два параметра α и β произвольны; въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ эти уравненія суть уравненія плоскости, которая перемѣщается параллельно самой себѣ, то прямая пересѣченія сохраняетъ также то же направленіе. Оба параметра α и β связаны условнымъ уравненіемъ $\varphi(\alpha, \beta) = 0$; исключивъ оба параметра α и β, получимъ уравненіе цилиндрической поверхности

(2) $$\varphi(ax + by + cz + d,\ a'x + b'y + c'z + d') = 0.$$

Наоборотъ, всякое уравненіе вида (2) можетъ выражать только одну цилиндрическую поверхность. Дѣйствительно, если положимъ

$$ax + by + cz + d = \alpha, a'x + b'y + c'z + d' = \beta;$$

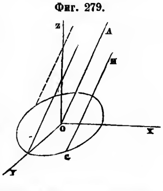
тогда данное уравненіе будетъ $\varphi(\alpha, \beta) = 0$; всякой системѣ дѣйствительныхъ величинъ α и β, удовлетворяющихъ этому уравненію, соотвѣтствуетъ прямая, имѣющая опредѣленное направленіе; совокупность этихъ прямыхъ образуетъ цилиндрическую поверхность.

Такимъ образомъ, *общее уравненіе цилиндрическихъ поверхностей есть какое-нибудь уравненіе между двумя многочленами первой степени относительно* x, y, z.

Можетъ случиться, что уравненіе $\varphi(\alpha, \beta = 0)$ допускаетъ только конечное число дѣйствительныхъ рѣшеній; въ этомъ случаѣ уравненіе (2)

выражаетъ мнимый цилиндръ съ опредѣленнымъ числомъ дѣйствительныхъ прямыхъ.

463. Положимъ, что управляющая поверхности есть плоская кривая, расположенная въ плоскости XOY (*фиг.* 279), и пусть $\varphi(x, y) = 0$ будетъ уравненіе этой кривой, относительно осей OX и OY; слѣдъ G образующей GH



Фиг. 279.

$$x = az + p,\quad y = bz + q,$$

на плоскости XOY координатами имѣетъ $x = p$, $y = q$; такъ какъ этотъ слѣдъ долженъ принадлежать управляющей, то отсюда мы получимъ условное уравненіе $\varphi(p, q) = 0$, и цилиндрическая поверхность выразится уравненіемъ $\varphi(x - az,\ y - bz) = 0$. Очевидно, что если плоская управляющая будетъ алгебраическая и m-го порядка, то цилиндрическая поверхность будетъ также алгебраическая и m-го порядка.

Коническія поверхности.

464. *Коническою поверхностію* называется поверхность, образуемая прямою, которая обращается около неподвижной точки. Означимъ черезъ x_0, y_0, z_0 координаты неподвижной точки, т. е. вершины конуса. Тогда уравненія образующей будутъ вида

$$\frac{x - x_0}{z - z_0} = a,\quad \frac{y - y_0}{z - z_0} = b,$$

гдѣ a и b суть два параметра. Движеніе образующей опредѣлится тѣмъ, что она должна двигаться по данной управляющей; отсюда получимъ условное уравненіе $\varphi(a, b) = 0$ между двумя перемѣнными параметрами a и b. Исключивъ a и b изъ этого уравненія и двухъ уравненій образующей, получимъ уравненіе конической поверхности

$$\varphi\left(\frac{x - x_0}{z - z_0},\ \frac{y - y_0}{z - z_0}\right) = 0. \tag{3}$$

Это уравненіе однородно относительно трехъ разностей $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$.

Обратно, всякое однородное уравненіе относительно трехъ разностей $x - x_0$, $y - y_0$, $z - z_0$ можетъ выражать только одну коническую поверхность. Въ самомъ дѣлѣ, это уравненіе можно представить въ видѣ (3); если потомъ положимъ

$$\frac{x-x_0}{z-z_0}=a,\quad \frac{y-y_0}{z-z_0}=b,$$

тогда данное уравненіе обратится въ $\varphi(a, b)=0$; каждой системѣ дѣйствительныхъ величинъ a и b, удовлетворяющихъ этому уравненію, соотвѣтствуетъ прямая, проходящая черезъ неподвижную точку (x_0, y_0, z_0); совокупность этихъ прямыхъ образуетъ коническую поверхность.

Если уравненіе $\varphi(a, b)=0$ будетъ имѣть только ограниченное число дѣйствительныхъ рѣшеній, то получимъ мнимый конусъ съ опредѣленнымъ числомъ дѣйствительныхъ прямыхъ. Если уравненіе не будетъ имѣть никакого дѣйствительнаго рѣшенія, то конусъ будетъ имѣть только одну дѣйствительную точку, его вершину.

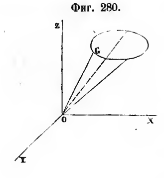
Если начало координатъ перенесемъ въ вершину конуса, то уравненіе конической поверхности приведется къ виду

$$\varphi\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right)=0. \tag{4}$$

Это уравненіе однородно относительно трехъ координатъ x, y, z.

Коническая поверхность есть разгибающаяся; ребра возврата приводятся къ одной точкѣ, вершинѣ. Цилиндрическая поверхность есть также разгибающаяся поверхность; ее можно разсматривать какъ предѣлъ конической поверхности, вершина которой удаляется въ безконечность.

Фиг. 280.



465. Разсмотримъ случай, когда управляющая будетъ плоская кривая. Возьмемъ вершину конуса за начало координатъ, и положимъ, что плоскость XOY параллельна плоскости кривой (*фиг.* 280). Пусть $z=c$, $\varphi(x, y)=0$ будутъ уравненія управляющей; $x=az$, $y=bz$ уравненія образующей; такъ какъ слѣдъ образующей на плоскости управляющей координатами имѣетъ $z=c$, $x=ac$, $y=bc$, то, чтобы эта точка G принадлежала управляющей, надобно, чтобы удовлетворялось условное уравненіе $\varphi(ac, bc)=0$. Исключивъ a и b изъ этого уравненія и уравненій образующей, получимъ уравненіе конической поверхности

$$\varphi\left(c\frac{x}{z}, c\frac{y}{z}\right)=0.$$

Очевидно, если плоская управляющая будетъ алгебраическая и m-го порядка, то коническая поверхность будетъ также алгебраическая и m-го порядка.

Конообразныя поверхности.

466. Конообразною поверхностію называется поверхность, образуемая прямою, которая двигается, оставаясь параллельной одной и той же плоскости, которая называется *управляющею* плоскостію, и скользя по неподвижной прямой, называемой *осью* конообразной поверхности, и по какой-нибудь второй управляющей.

Возьмемъ прямолинейную управляющую за ось z и положимъ, что плоскость XOY параллельна управляющей плоскости. Тогда образующая выразится уравненіями вида

$$z = \alpha, \; \frac{y}{x} = \beta.$$

Управляющая дастъ условное уравненіе $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ между двумя перемѣнными параметрами α и β. Поэтому уравненіе конообразной поверхности будетъ

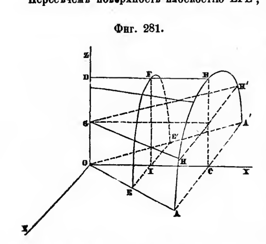
$$\varphi\left(z, \frac{y}{x}\right) = 0. \tag{5}$$

Исключая цилиндровъ, прямолинейныя поверхности, имѣющія управляющую плоскость, суть поверхности неразгибающіяся. Дѣйствительно, мы сказали, что разгибающаяся поверхность образуется движущеюся прямою, касающеюся данной кривой; проекція образующей на какую-нибудь плоскость, очевидно, останется касательною къ проекціи ребра возврата; но если образующая будетъ параллельна данной плоскости, то ея проекція на плоскость, перпендикулярную къ управляющей плоскости, будетъ параллельна ей самой и, слѣдовательно, не будетъ касательною къ кривой. Исключеніе составляетъ только цилиндрическая поверхность.

467. Положимъ, что ось OZ конообразной поверхности перпендикулярна къ управляющей плоскости (*фиг.* 281) и управляющая будетъ кругъ, расположенный въ плоскости, перпендикулярной управляющей плоскости. Проведемъ ось OX черезъ центръ C круга и возьмемъ плоскость YOZ параллельно плоскости круга; тогда уравненія этого круга будутъ вида $x = a$, $y^2 + z^2 = r^2$. Чтобы образующая GH опиралась на кругъ, надобно, чтобы параметры α и β удовлетворяли условію $a^2\beta^2 + \alpha^2 = r^2$. Слѣдовательно, коноида выражается уравненіемъ четвертой степени $x^2z^2 + a^2y^2 - r^2x^2 = 0$. Если поверхность пересѣчемъ плоскостію, параллельною управляющей плоскости, то, очевидно, получимъ двѣ образующія GH, GH'; уголъ этихъ двухъ образующихъ уменьшается по мѣрѣ того, какъ сѣкущая плоскость поднимается; наконецъ, коноида оканчивается ребромъ DB.

Пересѣчемъ поверхность плоскостію EFE′, параллельною плоскости круга; уравненіе плоскости есть $x = a'$; кривая пересѣченія $a'^2z^2 + a^2y^2 - a'^2r^2 = 0$ есть эллипсъ, полуось YF котораго постоянно равна r, а другая ось EE′ уменьшается до нуля, когда сѣкущая плоскость приближается къ оси коноиды.

Фиг. 281.



Какъ второй примѣръ конообразной поверхности разсмотримъ поверхность, образуемую прямою, которая двигается, оставаясь параллельною основанію прямаго круговаго цилиндра и опираясь на ось цилиндра и на улиткообразную линію, начерченную на цилиндрѣ. За ось z возьмемъ ось цилиндра, за оси x и y два взаимно перпендикулярные діаметра круга основанія, и изъ которыхъ одна, ось x, пересѣкаетъ улиткообразную линію. Образующая поверхности проектируется на плоскость основанія по направленію параллельнаго радіуса, который съ осью x составляетъ перемѣнный уголъ θ. Если черезъ h назовемъ ходъ улиткообразной линіи, то координаты точки улиткообразной линіи будутъ

$$x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta,\ z = h\frac{\theta}{2\pi};$$

эти три уравненія съ четырьмя перемѣнными θ, x, y, z можно разсматривать, какъ уравненія, выражающія улиткообразную линію. Уравненія образующей есть

$$z = h\frac{\theta}{2\pi},\ \frac{y}{x} = \operatorname{tang}\theta.$$

Исключивъ θ, получимъ уравненіе улиткообразной поверхности, имѣющей управляющую плоскость

$$z = \frac{h}{2\pi}\operatorname{arc\,tang}\frac{y}{x}.$$

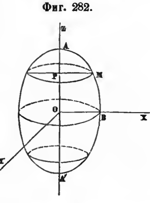
Это уравненіе въ соединеніи съ уравненіемъ цилиндра $x^2 + y^2 = r^2$ выражаетъ также улиткообразную линію.

Поверхности вращенія.

468. Поверхностію вращенія называется поверхность, образуемая обращеніемъ линіи около неподвижной оси, съ которой она неизмѣняемо соединена. Каждая точка M образующей описываетъ кругъ, плоскость котораго перпендикулярна къ оси, и центръ котораго есть подошва P перпендикуляра, опущеннаго изъ точки M на ось (*фиг.* 282). Круги описы-

ваемые различными точками образующей, называются ***параллелями*** поверхности. Сѣченія, сдѣланныя плоскостями, проходящими черезъ ось, равны между собой; это суть *меридіаны* поверхности. За образующую поверхности обыкновенно выбираютъ *меридіанальную кривую*.

Фиг. 282.



Поверхность вращенія можно также разсматривать, какъ поверхность, образуемую движеніемъ круга, имѣющаго перемѣнный радіусъ и центръ котораго описываетъ прямую плоскость, которая остается перпендикулярною къ этой прямой и которая пересѣкаетъ данную образующую. Возьмемъ сперва ось вращенія за ось z, предполагая координаты прямоугольными; тогда параллель поверхности выразится уравненіями вида

$$x^2 + y^2 = \alpha^2,\ z = \beta.$$

Выразивъ, что этотъ кругъ пересѣкаетъ данную образующую, получимъ условное уравненіе $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ между двумя перемѣнными параметрами α и β. Исключивъ α и β изъ этого уравненія и двухъ уравненій параллели, получимъ уравненіе

$$\varphi(\sqrt{x^2 + y^2},\ z) = 0, \tag{6}$$

поверхности вращенія.

469. Найдемъ, напримѣръ, уравненіе поверхности, образуемой прямою AB, обращающеюся около оси OZ (*фиг.* 283). Возьмемъ ось вращенія за ось z, общій перпендикуляръ къ оси и прямой AB въ одномъ изъ его положеній за ось y, а перпендикуляръ къ плоскости YOZ за ось x. Тогда прямая AB въ этомъ частномъ положеніи выразится уравненіями

Фиг. 283.

$$y = a,\ x = mz,$$

гдѣ a есть кратчайшее разстояніе OA, m — тангенсъ угла ZOB′, образуемаго осью OZ съ прямою OB′, параллельною AB. Чтобы параллельный кругъ $x^2 + y^2 = \alpha^2$, $z = \beta$ пересѣкался съ прямою AB, надобно удовлетворить условному уравненію $a^2 + m^2\beta^2 = \alpha^2$, которое получимъ, исключивъ x, y, z изъ уравненій прямой и уравненій круга; исключивъ два перемѣнные параметра α и β изъ условнаго уравненія и уравненій круга, получимъ уравненіе поверхности вращенія

$$x^2 + y^2 - m^2z^2 = a^2.$$

Если въ этомъ уравненіи сдѣлаемъ $y = 0$, то получимъ слѣдъ поверхности на плоскость XOZ; это будетъ гипербола $x^2 - m^2z^2 = a^2$, поперечная ось OD которой направлена по OX и которая асимптотами имѣетъ прямыя OB′ и OC′, одинаково наклоненныя съ той и другой стороны къ OZ. Поэтому можно разсматривать, что эта поверхность образуется меридіанальною гиперболою, обращающеюся около ея мнимой оси. Вотъ почему она называется *гиперболоидомъ* вращенія объ одной полости.

Такъ какъ предъидущее уравненіе содержитъ угловой коэффиціентъ m только въ квадратѣ, то очевидно, что эта же поверхность образуется двумя прямыми AB и AC, перпендикулярными къ OA и одинаково наклоненными съ той и другой стороны къ прямой AZ′, параллельной OZ.

470. Разсмотримъ частный случай, когда образующая будетъ меридіанальная кривая. Эта кривая, которая, положимъ, помѣщена въ плоскости XOZ, выражается уравненіями $y = 0$, $\psi(x, z) = 0$. Если исключимъ x, y, z изъ этихъ двухъ уравненій и уравненія параллели $x^2 + y^2 = \alpha^2$, $z = \beta$, то получимъ условное уравненіе $\psi(\alpha, \beta) = 0$. Слѣдовательно, поверхность вращенія выразится уравненіемъ

$$(7) \qquad \psi(\sqrt{x^2 + y^2},\ z) = 0,$$

которое получимъ, замѣнивъ въ уравненіи меридіанальной кривой x черезъ $\sqrt{x^2 + y^2}$.

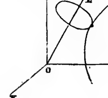
Напримѣръ, если меридіанальная кривая будетъ гипербола $x^2 - m^2z^2 = a^2$, то гиперболоидъ вращенія объ одной полости выразится уравненіемъ $x^2 + y^2 - m^2z^2 = a^2$.

Какъ второй примѣръ, разсмотримъ кольцо, т. е. поверхность, образуемую кругомъ, обращающимся около оси, которая находится въ его плоскости, но не проходитъ черезъ центръ. Возьмемъ ось вращенія за ось z, а за ось x перпендикуляръ, опущенный изъ центра круга на ось; такъ какъ уравненіе круга въ плоскости xz есть $(x - a)^2 + z^2 = r^2$, то уравненіе поверхности будетъ

$$(\sqrt{x^2 + y^2} - a)^2 + z^2 = r^2.$$

471. Положимъ теперь, что ось вращенія OL проходитъ черезъ начало координатъ, но сама имѣетъ какое-нибудь направленіе въ пространствѣ. Пусть $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$ будутъ уравненія этой прямой. Всякая параллель поверхности опредѣлится пересѣченіемъ шара, описаннаго изъ начала координатъ, какъ центра, съ плоскостію, перпендикулярною къ оси; слѣдовательно, этотъ кругъ выразится двумя уравненіями вида

Фиг. 284.



$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2,\ ax + by + cz + d = \beta.$$

Выразивъ, что параллель пересѣкаетъ данную обра-

зующую, получимъ условное уравненіе $\varphi(\alpha, \beta) = 0$ между двумя перемѣнными параметрами α и β. Исключивъ эти два параметра изъ условнаго уравненія и двухъ уравненій круга, получимъ уравненіе поверхности вращенія:

$$(8) \qquad \varphi(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2},\ ax + by + cz + d) = 0.$$

Это есть уравненіе между многочленомъ второй степени $x^2 + y^2 + z^2$ и какимъ-нибудь многочленомъ первой степени.

Обратно, всякое уравненіе этого вида выражаетъ поверхность вращенія около прямой, проходящей черезъ начало координатъ. Дѣйствительно, разсмотримъ прямую OL, которая имѣетъ уравненіями $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c}$, и положимъ

$$x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2,\ ax + by + cz + d = \beta;$$

тогда данное уравненіе (8) обратится въ $\varphi(\alpha, \beta) = 0$. Каждой системѣ дѣйствительныхъ величинъ α и β, удовлетворяющихъ этому уравненію, соотвѣтствуетъ кругъ, опредѣляемый пересѣченіемъ шара, центръ котораго находится въ началѣ координатъ, съ плоскостію, перпендикулярною къ прямой OL; центръ круга будетъ находиться на прямой OL, и геометрическое мѣсто круговъ образуетъ поверхность вращенія около этой прямой.

Положимъ, наконецъ, что ось вращенія не проходитъ черезъ начало. Возьмемъ неподвижную точку (x_0, y_0, z_0) на этой оси, уравненія которой тогда будутъ

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}.$$

Всякая параллель поверхности опредѣлится пересѣченіемъ шара $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = \alpha^2$, центръ котораго находится въ неподвижной точкѣ, съ плоскостію $ax + by + cz + d = \beta$, перпендикулярною къ оси; слѣдовательно, уравненіе поверхности вращенія будетъ вида

$$(9) \quad \varphi(\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2},\ ax + by + cz + d) = 0.$$

Касательная къ кривой; соприкасающая плоскость.

472. Три координаты x, y, z какой-нибудь точки M кривой можно разсматривать, какъ функцію одного и того же вспомогательнаго перемѣн-

наго t, взятаго за независимое перемѣнное. Назовемъ черезъ Δx, Δy, Δz измѣненія этихъ координатъ, когда перемѣнному t дадимъ очень малое приращеніе Δt, т. е. когда отъ точки M переходимъ къ сосѣдней точкѣ M_1 по этой же кривой; тогда сѣкущая MM_1 выразится уравненіями

$$\frac{X-x}{\frac{\Delta x}{\Delta t}} = \frac{Y-y}{\frac{\Delta y}{\Delta t}} = \frac{Z-z}{\frac{\Delta z}{\Delta t}}.$$

Когда Δt приближается къ нулю, отношенія $\frac{\Delta x}{\Delta t}, \frac{\Delta y}{\Delta t}, \frac{\Delta z}{\Delta t}$ соотвѣтственно будутъ имѣть предѣлами производныя x', y', z' отъ функцій x, y, z, взятыя по t. Отсюда слѣдуетъ, что касательная въ точкѣ M выражается уравненіями

$$\frac{X-x}{x'} = \frac{Y-y}{y'} = \frac{Z-z}{z'}.$$

473. Пусть MT и M_1T_1 будутъ касательныя къ неразгибающейся кривой въ двухъ сосѣднихъ точкахъ M и M_1 (*фиг.* 285). Черезъ точку M проведемъ прямую MH параллельно M_1T_1; когда точка M_1 будетъ перемѣщаться по кривой, прямая MH опишетъ коническую поверхность; если точка M_1 будетъ безпредѣльно приближаться къ точкѣ M, то плоскость TMH будетъ приближаться къ предѣльному положенію, которое есть плоскость, касающаяся конической поверхности по ребру MT; это предѣльное положеніе плоскости TMH называется соприкасающеюся плоскостію къ кривой въ точкѣ M.

Фиг. 285.

Легко найти уравненіе этой плоскости. Означимъ черезъ λ, μ, ν косинусы угловъ, которые образуетъ нормаль, проведенная къ плоскости TMH, съ осями координатъ; такъ какъ эта нормаль перпендикулярна къ двумъ прямымъ MT и MH, то получимъ два уравненія

(2) $$\lambda x' + \mu y' + \nu z' = 0,$$

$$\lambda (x' + \Delta x') + \mu (y' + \Delta y') + \nu (z' + \Delta z') = 0;$$

послѣднее можно замѣнить черезъ

$$\lambda \frac{\Delta x'}{\Delta t} + \mu \frac{\Delta y'}{\Delta t} + \nu \frac{\Delta z'}{\Delta t} = 0.$$

которое приводится къ

(3) $$\lambda x'' + \mu y'' + \nu z'' = 0,$$

когда Δt приближается къ нулю, x'', y'', z'' будутъ вторыя производныя отъ функцій x, y, z, взятыя по t. Изъ уравненій (2) и (3) находимъ

$$\frac{\lambda}{y'z'' - z'y''} = \frac{\mu}{z'x'' - x'z''} = \frac{\nu}{x'y'' - y'x''},$$

и уравненіе соприкасающейся плоскости будетъ

(4) $$(y'z'' - z'y'')(X - x) + (z'x'' - x'z'')(Y - y) + (x'y'' - y'x'')(Z - z) = 0.$$

Если кривая будетъ плоская, то соприкасающаяся плоскость въ каждой точкѣ будетъ самая плоскость кривой.

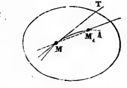
Касательная плоскость.

474. Разсмотримъ поверхность, выражаемую уравненіемъ

(5) $$f(x, y, z) = 0.$$

Возьмемъ на этой поверхности точку M, координаты которой суть x, y, z, и черезъ эту точку проведемъ на поверхности какую-нибудь кривую MA (*фиг.* 286). Когда движущаяся точка описываетъ эту кривую, то двѣ координаты x и y будутъ функціями отъ z, которыя должны удовлетворять уравненію (5); ихъ производная x' и y' удовлетворяютъ уравненію

Фиг. 286.



(6) $$x'f'_x + y'f'_y + f'_z = 0.$$

Изъ всего сказаннаго видимъ, что касательная, проведенная къ кривой MA выражается уравненіемъ

(7) $$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{1}.$$

Когда кривая MA, проведенная на поверхности черезъ точку M, измѣняется, обѣ функціи x и y также измѣняются, какъ и ихъ производныя. Геометрическое мѣсто касательныхъ, проведенныхъ ко всѣмъ кривымъ, проведеннымъ на поверхности, мы получимъ, исключивъ два перемѣнные

параметра x' и y' изъ уравненія (7) касательной и условнаго уравненія (6). Оно выразится уравненіемъ

$$(8)\qquad (X-x)f'_x+(Y-y)f'_y+(Z-z)f'_z=0.$$

Эта плоскость называется *касательною плоскостію* къ поверхности въ точкѣ M.

Нормаль къ поверхности въ точкѣ M есть перпендикуляръ, проведенный изъ точки M на плоскость, касающуюся поверхности въ этой точкѣ; если оси координатъ будутъ прямоугольныя, то уравненія нормали будутъ

$$(9)\qquad \frac{X-x}{f'_x}=\frac{Y-y}{f'_y}=\frac{Z-z}{f'_z}.$$

Мы доказали, что вообще касательныя къ различнымъ кривымъ, проведеннымъ на поверхности черезъ точку M, лежатъ въ одной плоскости. Исключеніе составляетъ тотъ случай, когда три частныя производныя f'_x, f'_y, f'_z въ точкѣ M равны нулю, потому что тогда условное уравненіе (6) обратится въ тожество, и чтобы найти въ этомъ случаѣ геометрическое мѣсто касательныхъ, надобно прибѣгать къ болѣе сложному вычисленію. Подобнаго рода обстоятельство представляется въ вершинѣ конуса; касательныя къ различнымъ кривымъ, проведеннымъ на поверхности черезъ эту точку, будутъ ребра конуса, и геометрическое мѣсто касательныхъ будетъ самый конусъ. Когда поверхность имѣетъ одну точку такого рода, тогда геометрическое мѣсто касательныхъ, проведенныхъ въ этой точкѣ, будетъ конусъ, но не плоскость.

475. Разсмотримъ въ частности поверхности втораго порядка; пусть

$$(10)\qquad \begin{aligned} f(x,y,z)=Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx \\ +2B''xy+2Cx+2C'y+2C''z+F=0 \end{aligned}$$

будетъ уравненіе поверхности. Отсюда находимъ

$$\begin{gathered} f'_x=2\ (Ax+B''y+B'z+C), \\ f'_y=2\,(B''x+A'y+Bz\ +C'), \\ f'_z=2\ (B'x+By+A''z+C''), \\ xf'_x+yf'_y+zf'_z \\ =2\,(Ax^2+A'y^2+A''z^2+2\,Byz+2\,B'zx \\ +2\,B''xy+Cx+C'y+C''z); \end{gathered}$$

такъ какъ точка M находится на поверхности, то ея координаты удовле-

творяютъ уравненію (10), поэтому предъидущее выраженіе приведется къ

$$-2\ (\mathrm{C}x + \mathrm{C}'y + \mathrm{C}''z + \mathrm{F}).$$

Такимъ образомъ уравненіе (8) касательной плоскости будетъ

$$(11)\qquad (\mathrm{A}x + \mathrm{B}''y + \mathrm{B}'z + \mathrm{C})\,\mathrm{X} + (\mathrm{B}''x + \mathrm{A}'y + \mathrm{B}z + \mathrm{C}')\,\mathrm{Y} + (\mathrm{B}'x + \mathrm{B}y + \mathrm{A}''z + \mathrm{C}'')\,\mathrm{Z} + (\mathrm{C}x + \mathrm{C}'y + \mathrm{C}''z + \mathrm{F}) = 0.$$

Замѣтимъ, что координаты точки прикосновенія входятъ въ это уравненіе только въ первой степени. Это уравненіе можно написать такъ

$$(12)\qquad (\mathrm{AX} + \mathrm{B''Y} + \mathrm{B'Z} + \mathrm{C})\,x + (\mathrm{B''X} + \mathrm{A'Y} + \mathrm{BZ} + \mathrm{C'})\,y + (\mathrm{B'X} + \mathrm{BY} + \mathrm{A''Z} + \mathrm{C''})\,z + (\mathrm{CX} + \mathrm{C'Y} + \mathrm{C''Z} + \mathrm{F}) = 0,$$

отсюда видимъ, что оно не измѣняется, когда буквы x, y, z замѣнимъ чрезъ X, Y, Z.

Посмотримъ теперь, какъ проводятся касательныя плоскости къ поверхности чрезъ данную точку P, ненаходящуюся на поверхности, и которая координатами имѣетъ x_1, y_1, z_1. За неизвѣстныя возьмемъ координаты x, y, z одной изъ точекъ прикосновенія M; эти координаты должны удовлетворять уравненію (10); съ другой стороны касательная плоскость въ точкѣ M должна проходить черезъ точку P; поэтому координаты этой точки должны удовлетворять уравненію (11) или уравненію (12); такимъ образомъ получимъ

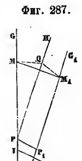
$$(13)\qquad (\mathrm{A}x_1 + \mathrm{B}''y_1 + \mathrm{B}'z_1 + \mathrm{C})\,x + (\mathrm{B}''x_1 + \mathrm{A}'y_1 + \mathrm{B}z_1 + \mathrm{C}')\,y + (\mathrm{B}'x_1 + \mathrm{B}y_1 + \mathrm{A}''z_1 + \mathrm{C}'')\,z + (\mathrm{C}x_1 + \mathrm{C}'y_1 + \mathrm{C}''z_1 + \mathrm{F}) = 0.$$

Геометрическое мѣсто точки прикосновенія есть плоская кривая, по которой плоскость (13) пересѣкаетъ поверхность втораго порядка. Разсмотримъ конусъ, вершина котораго находится въ точкѣ P, а образующая его есть эта плоская кривая. Черезъ какую-нибудь точку M этой линіи проходитъ ребро конуса, которое находится въ плоскости, касательной къ поверхности въ точкѣ M; эта плоскость, въ которой находится также касательная въ M, проведенная къ управляющей кривой, касается конуса по ребру PM; слѣдовательно, конусъ касается поверхности втораго порядка во всѣхъ точкахъ управляющей кривой.

476. Покажемъ еще нѣсколько свойствъ плоскости касающейся прямолинейной поверхности. Пусть G и G_1 будутъ два сосѣднія положенія образующей, PP_1 перпендикуляръ общій къ этимъ двумъ прямымъ (*фиг.* 287).

Чрезъ точку P проведемъ PH параллельно P_1G_1; плоскость, проведенная черезъ точку M прямой G, перпендикулярно къ этой прямой, образуетъ прямоугольный треугольникъ MQM_1; черезъ r назовемъ общій перпендикуляръ PP_1, черезъ ρ линію PM, φ уголъ GPH, θ уголъ, образуемый плоскостію GMM_1 съ плоскостію GPP_1, которая перпендикулярна къ плоскости GPH; такъ какъ уголъ θ есть дополненіе угла QMM_1, то

Фиг. 287.



$$\text{tang} = \frac{MQ}{M_1Q} = \frac{\rho \, \text{tang} \, \varphi}{r} = \frac{\text{tang} \, \varphi}{\varphi} \times \frac{\rho}{\left(\frac{r}{\varphi}\right)}.$$

Когда образующая G_1 неопредѣленно приближается къ G, точка P приближается къ предѣльному положенію I, которое называется *центральною точкою* на образующей G. Прямая PP_1 приближается къ предѣльному направленію IL, которое перпендикулярно къ предѣльному положенію плоскости GPH. Такимъ образомъ, плоскость GPP_1 будетъ касательною въ I, а плоскость GMM_1 касательною въ M. Если черезъ k назовемъ предѣлъ отношенія $\frac{r}{\varphi}$, то предъидущее уравненіе получитъ видъ

$$\text{tang} \, \theta = \frac{\rho}{k}. \tag{14}$$

Изъ этого уравненія мы выводимъ нѣкоторыя замѣчательныя слѣдствія. Когда точка M перемѣщается по прямой G, ρ измѣняется отъ $-\infty$ до $+\infty$, θ измѣняется отъ $-\frac{\pi}{2}$ до $+\frac{\pi}{2}$; касательная плоскость поворачивается на два прямые угла около прямой G всегда въ одномъ направленіи. Всякая плоскость, проведенная черезъ прямую G, есть касательная въ точкѣ этой прямой и только въ одной точкѣ.

Представимъ себѣ другую прямолинейную поверхность, имѣющую съ первой общую образующую G. Такъ какъ центральная точка имѣетъ на прямой G другое положеніе, и прямая IL другое направленіе, то касательная плоскость въ точкѣ M опредѣляется уравненіями

$$\text{tang} \, (\theta - \theta_0) = \frac{\rho - \rho_0}{k'}. \tag{15}$$

Рѣшивъ два уравненія (14) и (15) съ двумя неизвѣстными ρ и θ, получимъ точки образующей G, въ которыхъ двѣ поверхности имѣютъ общую касательную плоскость. Исключивъ θ, получимъ уравненіе второй степени

относительно ρ; отсюда заключаемъ, что двѣ поверхности имѣютъ общую касательную плоскость въ двухъ точкахъ на общей образующей. Если бы онѣ имѣли одну касательную плоскость въ трехъ точкахъ, то уравненіе второй степени обратилось бы въ тожество, и касательная плоскость была бы одна и та же въ каждой точкѣ; въ такомъ случаѣ говорятъ, что двѣ поверхности сливаются по направленію общей образующей.

477. До сихъ поръ мы допускали, что центральная точка I существуетъ на каждой образующей; отсюда легко можно вычисленіемъ опредѣлить положеніе, и это въ то же время докажетъ существованіе этой точки. Движущуюся образующую G можно выразить уравненіями вида

$$(16) \qquad x = az + p, \; y = bz + q,$$

въ которыхъ четыре параметра a, b, p, q суть функціи одного и того же перемѣннаго t, производныя которыхъ мы означимъ a', b', p', q'. Пусть

$$x = a_1 z + p_1, \; y = b_1 z + q_1$$

будутъ уравненія сосѣдней образующей G_1. Тогда уравненіе плоскости G_1P_1P по уравненію (26) § 458, будетъ

$$(a_1 - a)(x - a_1 z - p_1) + (b_1 - b)(y - b_1 z - q_1) + (ba_1 - ab_1)[b_1(x - p_1) - a_1(y - q_1)] = 0.$$

Это уравненіе въ соединеніи съ двумя уравненіями (16) опредѣляетъ точку P; отсюда

$$z = -\frac{(a_1 - a)(p_1 - p) + (b_1 - b)(q_1 - q) + (ab_1 - ba_1)[a_1(q_1 - q) - b_1(p_1 - p)]}{(a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2 + (ab_1 - ba_1)^2}.$$

Назовемъ черезъ Δa. Δb, Δp, Δq приращенія четырехъ параметровъ, когда t получаетъ приращеніе Δt, т. е. когда отъ образующей G переходимъ къ образующей G_1; тогда предъидущая формула получитъ видъ

$$z = -\frac{\frac{\Delta a}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta p}{\Delta t} + \frac{\Delta b}{\Delta t}\cdot\frac{\Delta q}{\Delta t} + \left(a\frac{\Delta b}{\Delta t} - b\frac{\Delta a}{\Delta t}\right)\left(a_1\frac{\Delta q}{\Delta t} - b_1\frac{\Delta p}{\Delta t}\right)}{\left(\frac{\Delta a}{\Delta t}\right)^2 + \left(\frac{\Delta b}{\Delta t}\right)^2 + \left(a\frac{\Delta b}{\Delta t} - b\frac{\Delta a}{\Delta t}\right)^2}$$

или, когда Δt приближается къ нулю,

$$(17) \qquad z_0 = \frac{a'p' + b'q' + (ab' - ba')(aq' - bp')}{a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2}.$$

Такъ какъ знаменатель не равенъ нулю, то координата z_0 точки I имѣетъ конечную величину. Это уравненіе въ соединеніи съ двумя уравненіями

$$x_0 = az_0 + p, \; y_0 = bz + q$$

опредѣляетъ геометрическое мѣсто точки I или линію *пересѣченія* прямолинейной поверхности.

Изъ формулы (24) § 457 находимъ

$$\lim \frac{r}{\Delta t} = \pm \frac{b'p' - a'q'}{\sqrt{a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2}}.$$

Что же касается угла φ, то мы получимъ

$$\cos\varphi = \pm \frac{aa' + bb' + 1}{\sqrt{(a^2 + b^2 + 1)(a_1^2 + b_1^2 + 1)}},$$

$$\sin\varphi = \sqrt{\frac{(a_1 - a)^2 + (b_1 - b)^2 + (ab_1 + ba_1)^2}{(a^2 + b^2 + 1)(a_1^2 + b_1^2 + 1)}},$$

$$\lim \frac{\varphi}{\Delta t} = \frac{\sqrt{a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2}}{a^2 + b^2 + 1}.$$

Такимъ образомъ получимъ величину k

$$k = \pm \frac{(bp' - a'q')(a^2 + b^2 + 1)}{a'^2 + b'^2 + (ab' - ba')^2}. \tag{18}$$

478. До сихъ поръ мы предполагали, что величина k не равна нулю; она будетъ равна нулю, если

$$b'p' - a'q' = 0,$$

Такъ какъ уголъ θ постоянно равенъ $\frac{\pi}{2}$, то въ этомъ случаѣ касательная плоскость въ M совпадаетъ съ предѣльнымъ положеніемъ плоскости GPH и остается та же вдоль всей образующей G.

Если положимъ $\frac{p'}{a'} = \frac{q'}{b'} = u$, то предъидущая формула (17) приведется къ $z_0 = -u$, и мы получимъ $p' = -a'z_0$, $q' = -b'z_0$.

Найдемъ касательную къ линіи пересѣченія; взявъ частныя производныя отъ

$$x_0 = az_0 + p, \; y_0 = bz'_0 + q,$$

получимъ

$$x'_0 = az'_0 + a'z_0 + p' = az'_0,$$
$$y'_0 = bz'_0 + b'z_0 + q' = b'z_0,$$

отсюда видно, что образующая G есть касательная къ линіи пересѣченія въ точкѣ I; касательная плоскость къ прямолинейной поверхности вдоль образующей или предѣлъ плоскости GPH есть соприкасающаяся плоскость къ кривой въ точкѣ I. Слѣдовательно, прямолинейная поверхность принадлежитъ къ классу разгибающихся поверхностей.

Обратно. Разсмотримъ поверхность, образуемую прямою, которая остается касательною къ данной неразгибающейся кривой. Означимъ черезъ x_0, y_0, z_0 координаты какой-нибудь точки этой кривой, и z_0 примемъ за независимое перемѣнное. Тогда уравненія образующей будутъ

$$x = x_0 + x'_0 (z - z_0)$$
$$y = y_0 + y'_0 (z - z_0).$$

Отсюда

$$a = x'_0,\ b = y'_0,\ p = x_0 - x_0 z_0,\ q = y_0 - y'_0 z_0,$$

и взявъ производныя, получимъ

$$a' = x''_0,\ b' = y''_0,\ p' = - x''_0 z_0,\ q' = -y''_0 z_0.$$

Такъ какъ условіе

$$b'p' - a'q' = 0,$$

удовлетворяется, то касательная плоскость будетъ одна и та же вдоль образующей. Такимъ образомъ характеръ разгибающихся поверхностей есть $b'p' - a'q' = 0$ нуль.

Для опредѣленія разгибающейся поверхности достаточно двухъ управляющихъ.

ПРИМѢРЫ.

1. Ось конуса вращенія проходитъ черезъ начало координатъ и образуетъ съ осями углы α, β, γ; уголъ конуса равенъ θ; найти уравненіе поверхности.

Найти условія, чтобы уравненіе второй степени

$$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy = 0$$

выражало конусъ вращенія.

2. Данъ сжатый эллипсоидъ вращенія (поверхность, которая образуется вращеніемъ эллипса около его малой оси); доказать, что конусъ, образуемый прямою, которая вращается около фокуса одного изъ меридіанальныхъ эллипсовъ, опираясь на съ-

ченіе, сдѣланное на поверхности плоскостію, проходящею черезъ управляющую, соотвѣтствующую этому фокусу, есть конусъ вращенія.

3. Данъ удлиненный эллипсоидъ вращенія (поверхность, которая образуется вращеніемъ эллипса около его большей оси); доказать, что конусъ, вершина котораго находится въ одномъ изъ фокусовъ меридіанальныхъ сѣченій и основаніемъ имѣетъ какое-нибудь плоское сѣченіе, есть конусъ вращенія.

4. Доказать, что одинъ изъ фокусовъ проекціи плоскаго сѣченія прямаго круговаго конуса на плоскость, перпендикулярную къ оси, проведенной черезъ вершину конуса, есть вершина конуса, а соотвѣтствующая директриса есть прямая пересѣченія двухъ плоскостей.

5. Доказать, что сумма реберъ, которыя опираются на концы діаметра эллипса, есть величина постоянная, когда плоское сѣченіе прямаго круговаго конуса есть эллипсъ.

6. Доказать, что плоскость, касательная къ полукругу и проходящая черезъ центръ, пересѣкаетъ поверхность по двумъ кругамъ.

Шаръ, котораго большій кругъ есть кругъ, касающійся двухъ круговъ, образующихъ одинъ изъ меридіановъ полукруга, пересѣкаетъ полукругъ по двумъ кругамъ.

7. Найти сѣченіе прямой съ цилиндромъ, описаннымъ около полукруга.

8. Доказать, что шесть реберъ двухъ трегранниковъ, имѣющихъ одну вершину, принадлежатъ одному конусу втораго порядка.

9. Дана конообразная поверхность, ось которой перпендикулярна къ управляющей плоскости и которая огибаетъ шаръ; найти проекціи кривой прикосновенія на управляющую плоскость и на плоскость, проведенную черезъ ось и центръ шара.

10. Дана система прямоугольныхъ осей, полукругъ имѣетъ меридіаномъ въ плоскости ZOX кругъ, центръ котораго находится на оси OX. Эта ось пересѣкаетъ кругъ въ точкѣ A, центрѣ новаго круга, который равенъ первому, и находится въ плоскости, параллельной ZOY; прямая, которая остается параллельною плоскости XOY, описываетъ конообразную поверхность, опираясь на этотъ второй кругъ и на ось OZ. Найти проекцію кривой пересѣченія двухъ поверхностей на плоскости XOY.

11. Положимъ, что плоскость втораго круга предъидущей задачи наматывается на цилиндръ, описанный около полукруга, и образующія котораго параллельны оси полукруга, и кривую управляющую конообразной поверхности замѣнимъ кривою, въ которой послѣ наматыванія плоскости есть кругъ. Найти проекцію линіи пересѣченія новой конообразной поверхности и полукруга (спирали Архимеда) на плоскость XOY.

12. Если двѣ прямолинейныя поверхности, описанныя прямыми, которыя двигаются, оставаясь параллельно одной и той же плоскости, имѣютъ общую образующую, то вообще существуетъ точка на этой прямой, въ которой обѣ поверхности имѣютъ одну касательную плоскость; опредѣлить эту точку. Если обѣ поверхности имѣютъ одну и ту же касательную плоскость въ двухъ точкахъ общей образующей, то онѣ пересѣкаются вдоль этой прямой.

13. Центръ шара находится въ началѣ координатъ, которыя положимъ прямоугольными; ось OX пересѣкаетъ шаръ въ точкѣ A; въ плоскости XOY на OA, какъ на діаметрѣ, опишемъ кругъ, который служитъ основаніемъ цилиндру, ребро котораго параллельно OZ. Найти: 1) проекціи на три плоскости координатъ кривой пересѣченія цилиндра съ шаромъ; 2) уравненіе конуса, управляющая котораго есть эта кривая, а вершина точки A; этотъ конусъ есть конусъ вращенія; 3) слѣды на плоскости координатъ, касательныхъ къ кривой.

ГЛАВА V.

О подобіи.

479. Опредѣленіе *соотвѣтствія* и *подобія* для фигуръ трехъ измѣреній таково же, какъ для фигуръ двухъ измѣреній (кн. IV, гл. V). Въ геометріи на плоскости, если не будемъ обращать вниманія на положеніе системъ, обратное соотвѣтствіе не дастъ другихъ фигуръ, какъ прямое соотвѣтствіе; то же самое для фигуръ въ пространствѣ. Разсмотримъ первую систему точекъ A, B, C,..., и, взявъ произвольно центръ подобія, построимъ систему A′, B′, C′... прямо соотвѣтственную и систему A″ B″, C..., обратно соотвѣтственную съ тѣмъ же отношеніемъ подобія k; эти двѣ системы симетричны другъ другу относительно точки O. Онѣ будутъ симметричны другъ другу относительно какой-нибудь плоскости, проведенной черезъ центръ подобія, когда повернемъ одну изъ нихъ на 180° около перпендикуляра, проведеннаго черезъ точку O къ этой плоскости. Отсюда слѣдуетъ, что системы, обратно соотвѣтственныя данной системѣ, симетричны прямо соотвѣтственнымъ системамъ.

Извѣстно (§ 387), что прямая соотвѣтственною имѣетъ прямую параллельную. Разсмотримъ плоскость P и въ этой плоскости рядъ прямыхъ параллельныхъ, проходящихъ черезъ одну и ту же точку M; каждая изъ нихъ соотвѣтственною будетъ имѣть прямую параллельную, проходящую черезъ точку M′, соотвѣтственную M. Отсюда заключаемъ, что *соотвѣтственная фигура плоскости есть параллельная плоскость.*

Если плоскость P проходитъ черезъ центръ подобія, то соотвѣтственная ей будетъ она сама.

Такъ какъ двѣ плоскости соотвѣтственными имѣютъ двѣ параллельныя плоскости, то *уголъ двухъ плоскостей равенъ углу соотвѣтственныхъ плоскостей.*

Такъ какъ сѣкущія, которыя соединяютъ двѣ сходственныя точки двухъ какихъ-нибудь соотвѣтственныхъ кривыхъ, постоянно параллельны, то отсюда заключаемъ, что *касательныя въ соотвѣтственныхъ точкахъ параллельны.*

Если на двухъ сходственныхъ поверхностяхъ начертимъ два ряда сходственныхъ линій, которыя всѣ проходятъ черезъ двѣ сходственныя точки M и M′, то сходственныя кривыя будутъ имѣть въ точкахъ M и

M′ касательныя параллельныя; слѣдовательно *касательныя въ двухъ сходственныхъ точкахъ двухъ соотвѣтственныхъ поверхностей параллельны.*

Если черезъ двѣ опредѣленныя точки проведемъ параллельные радіусы и въ постоянномъ отношеніи k, *то составимъ двѣ соотвѣтственныя системы;* доказательство то же, какъ и въ § 388. Отсюда *слѣдуетъ, что двѣ системы, соотвѣтственныя третьей, соотвѣтственны между собою;* когда соотвѣтствія одинаковы и двѣ системы построены въ томъ же отношеніи подобія, можно ихъ наложить. Такимъ образомъ *съ однимъ только центромъ подобія, измѣняя отношеніе k отъ 0 до ∞, получимъ всѣ системы, соотвѣтственныя данной системѣ.* Въ частномъ случаѣ, если данная система находится въ плоскости, то внѣшніе центры подобія плоскости не даютъ другихъ системъ, какъ центры заключающіеся въ плоскости.

480. *Шесть центровъ подобія четырехъ системъ соотвѣтственныхъ по двѣ находятся въ одной и той же плоскости.* Пусть A, A′, A″, A‴ будутъ четыре данныя системы; черезъ три центра подобія O′, O″, O‴ системъ A и A′, A и A″, A и A‴ проведемъ плоскость P; такъ какъ эта плоскость проходитъ черезъ точку O′, то она соотвѣтственна сама себѣ въ системахъ A и A′; она также сходственна въ системахъ A и A″; слѣдовательно, плоскость P сходственна сама себѣ въ системахъ A′ и A″; слѣдовательно она проходитъ черезъ ихъ центръ подобія. То же разсужденіе прилагается къ A′ и A‴ A″ и A‴.

Если двѣ фигуры, имѣющія центръ, прямо соотвѣтственны, то онѣ также обратно соотвѣтственны, и наоборотъ. Доказательство то же, какъ въ § 390. Отсюда слѣдуетъ, что если четыре разсматриваемыя системы въ предъидущей теоремѣ имѣютъ центры, то получимъ шесть точекъ въ одной и той же плоскости, принимая или шесть центровъ прямаго подобія, или приличнымъ образомъ три центра прямаго подобія и три центра обратнаго подобія.

481. *Такъ какъ отношеніе площадей двухъ соотвѣтственныхъ многоугольниковъ равно* k^2, *то очевидно, что отношеніе площадей двухъ соотвѣтственныхъ многогранниковъ, а слѣдовательно, отношеніе площадей двухъ какихъ-нибудь соотвѣтственныхъ поверхностей равно* k^2.

Если изъ двухъ сходственныхъ вершинъ двухъ соотвѣтственныхъ трегранниковъ опустимъ перпендикуляры на противоположныя стороны, то эти перпендикуляры суть двѣ сходственныя прямыя, отношеніемъ онѣ имѣютъ k. Такъ какъ отношеніе основаній есть k^2, то отсюда слѣдуетъ, что *отношеніе объемовъ двухъ соотвѣтственныхъ тетраэдровъ равно* k^3. Эта

послѣдняя теорема прилагается къ двумъ многогранникамъ и точно также къ двумъ какимъ-нибудь соотвѣтственнымъ тѣламъ.

482. Фигура называется подобною данной фигурѣ, если посредствомъ приличнаго перемѣщенія она можетъ совпадать съ одною изъ фигуръ, прямо соотвѣтственныхъ данной фигурѣ. Изъ § 479 слѣдуетъ, что, принимая произвольно центръ подобія и построивъ помощію центра различныя соотвѣтственныя поверхности, которыя соотвѣтствуютъ величинамъ k, заключающимся между 0 и ∞, получимъ всѣ поверхности, подобныя данной поверхности.

Примѣръ I. Данная поверхность есть шаръ. Возьмемъ центръ шара O за центръ подобія; такъ какъ радіусъ OA постоянный, то радіусъ OA′ будетъ точно также постоянный; *поверхность, подобная шару, есть другой шаръ, который можетъ имѣть какой-нибудь радіусъ.*

Примѣръ II. Данная поверхность есть конусъ. Вершину возьмемъ за центръ подобія, двѣ сходственныя точки будутъ находиться на одной и той же образующей конуса. *Единственная фигура, подобная конусу, есть самъ конусъ.*

Примѣръ III. Поверхность есть цилиндръ. Возьмемъ произвольную точку O за центръ подобія и на данномъ цилиндрѣ начертимъ произвольную кривую C, которую возьмемъ за управляющую цилиндра. Кривой C соотвѣтствуетъ соотвѣтственная кривая C′ и каждой образующей перваго цилиндра прямая параллельная, проходящая черезъ точку, сходственную точкѣ, въ которой кривая C пересѣкается первою образующею. Такимъ образомъ, *два цилиндра будутъ соотвѣтственны, когда они имѣютъ управляющими двѣ соотвѣтственныя кривыя и когда ихъ образующія параллельны.*

Разсмотримъ два соотвѣтственные цилиндра, центръ подобія которыхъ есть точка O; если черезъ эту точку проведемъ линію OO′, параллельную образующимъ двухъ поверхностей, то всякая точка этой прямой будетъ также центръ подобія двухъ поверхностей. Отсюда слѣдуетъ, что сѣченіе двухъ соотвѣтственныхъ цилиндровъ одною и тою же плоскостію суть соотвѣтственныя кривыя, которыя центромъ подобія имѣютъ точку, въ которой плоскость пересѣкаетъ прямую OO′. Такъ какъ сѣченія цилиндра параллельными плоскостями равны, то сѣченія двухъ соотвѣтственныхъ цилиндровъ параллельными плоскостями соотвѣтственны.

483. *Сѣченія поверхности втораго порядка параллельными плоскостями суть соотвѣтственныя кривыя.* Общее уравненіе поверхностей втораго порядка есть

$$(1)\qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0;$$

проекцію пересѣченія этой поверхности и плоскости

$$(2)\qquad ax + by + cz = l,$$

на плоскость XOY мы получимъ, исключивъ изъ уравненій (1) и (2) перемѣнное z. Такъ какъ въ уравненіи, полученномъ такимъ образомъ, коеф-

фиціенты членовъ второй степени независимы отъ t, то отсюда заключаемъ, что когда l измѣняется, a, b, c остаются опредѣленными, т. е. когда плоскость перемѣщается параллельно самой себѣ, то проекціи соотвѣтственны. Проектированные цилиндры, управляющія которыхъ суть соотвѣтственныя кривыя, пересѣкаются двумя параллельными плоскостями по направленію соотвѣтственныхъ кривыхъ. Когда эти кривыя суть гиперболы, одна можетъ быть соотвѣтственною сопряженной другой (§ 396).

КНИГА ШЕСТАЯ.

Поверхности втораго порядка.

ГЛАВА I.

Центръ и діаметральныя плоскости.

484. Общее уравненіе второй степени съ тремя перемѣнными x, y, z имѣетъ видъ

(1) $$\begin{aligned}&\mathrm{A}x^2+\mathrm{A}'y^2+\mathrm{A}''z^2+2\mathrm{B}yz+2\mathrm{B}'zx+2\mathrm{B}''xy\\&+2\mathrm{C}x+2\mathrm{C}'y+2\mathrm{C}''z+\mathrm{F}=0;\end{aligned}$$

это уравненіе содержитъ десять членовъ или девять произвольныхъ параметровъ. Первую часть мы будемъ означать $f(x, y, z)$. Способъ, который мы употребляли въ Геометріи на плоскости при изученіи линій втораго порядка, можно бы было употребить для изслѣдованія различныхъ видовъ геометрическаго мѣста, опредѣляемаго этимъ уравненіемъ; но такъ какъ здѣсь надобно будетъ разсматривать большое число случаевъ, то такое изслѣдованіе будетъ долго и затруднительно. Сначала мы займемся упрощеніемъ уравненія (1) и потомъ будемъ только разсматривать приведенныя уравненія. Это упрощеніе основывается на свойствѣ центра и діаметральныхъ плоскостей, которыя мы теперь разсмотримъ.

Центръ.

485. Точка I будетъ центромъ поверхности, когда всѣ точки поверхности расположены симетрично по двѣ относительно этой точки. Такъ какъ

прямая линія пересѣкаетъ поверхность втораго порядка только въ двухъ точкахъ, то, чтобы точка J была центромъ поверхности, необходимо, чтобы всѣ хорды, проведенныя черезъ эту точку, пересѣкались пополамъ.

Если начало координатъ будетъ центромъ поверхности втораго порядка, то уравненіе поверхности не будетъ содержать членовъ первой степени. Въ самомъ дѣлѣ, уравненіе прямой, проведенной черезъ начало координатъ, имѣетъ видъ

$$(2) \qquad x = mz, \quad y = nz.$$

Координаты z точекъ пересѣченія поверхности съ прямой опредѣляются уравненіемъ

$$(3) \qquad \begin{aligned} &(\mathrm{A}m^2 + \mathrm{A}'n^2 + \mathrm{A}'' + 2\mathrm{B}n + 2\mathrm{B}'m + 2\mathrm{B}''mn)\, z^2 \\ &+ 2\,(\mathrm{C}m + \mathrm{C}'n + \mathrm{C}'')\, z + \mathrm{F} = 0, \end{aligned}$$

которое получимъ, исключивъ x и y изъ уравненій (1) и (2). Если начало координатъ будетъ центромъ, то корни уравненія (3) будутъ равны и имѣть противоположные знаки, а для этого необходимо, чтобы коеффиціентъ $\mathrm{C}m + \mathrm{C}'n + \mathrm{C}''$ былъ нуль; такъ какъ это должно быть справедливо для безконечнаго числа величинъ m и n, взятыхъ произвольно, то необходимо, чтобы отдѣльно

$$\mathrm{C} = 0, \ \mathrm{C}' = 0, \ \mathrm{C}'' = 0.$$

Обратное заключеніе тоже справедливо.

486. Такимъ образомъ, чтобы опредѣлить центръ поверхности втораго порядка, переносимъ начало координатъ въ точку I пространства, координаты которой мы означимъ черезъ a, b, c, и смотримъ, возможно ли эти величины выбрать такъ, чтобы новое уравненіе не содержало членовъ первой степени относительно новыхъ координатъ.

Если оси перемѣстимъ параллельно имъ самимъ, то формулы преобразованія будутъ $x = a + x'$, $y = b + y'$, $z = c + z'$; внеся эти величины въ уравненіе (1) и отбросивъ знаки, получимъ

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\mathrm{A}x^2 + \mathrm{A}'y^2 + \mathrm{A}''z^2 + 2\mathrm{B}yz + 2\mathrm{B}'zx + 2\mathrm{B}''xy \\ &+ x f'_a(a, b, c) + y f'_b(a, b, c) + z f'_c(a, b, c) + f(a, b, c) = 0. \end{aligned}$$

Такимъ образомъ координаты центра опредѣляются уравненіями

$$f'_a(a, b, c) = 0, \quad f'_b(a, b, c) = 0, \quad f'_c(a, b, c) = 0;$$

раздѣливъ на 2 и замѣнивъ буквы a, b, c черезъ x, y, z, получимъ

$$(5)\qquad \begin{cases} \mathrm{A}x + \mathrm{B}''y + \mathrm{B}'z + \mathrm{C} = 0 \\ \mathrm{B}''x + \mathrm{A}'y + \mathrm{B}z + \mathrm{C}' = 0 \\ \mathrm{B}'x + \mathrm{B}y + \mathrm{A}''z + \mathrm{C}'' = 0. \end{cases}$$

Такимъ образомъ, чтобы опредѣлить *координаты центра, надобно приравнять нулю частныя производныя, взятыя относительно перемѣнныхъ x, y, z отъ первой части уравненія поверхности.*

487. Если x, y, z мы будемъ разсматривать какъ координаты перемѣнной точки, то каждое изъ уравненій (5) будетъ опредѣлять плоскость; центръ поверхности будетъ точка общая тремъ плоскостямъ. Здѣсь могутъ представиться нѣсколько случаевъ.

1. Когда три плоскости пересѣкаются въ одной точкѣ; въ такомъ случаѣ поверхность будетъ имѣть только одинъ центръ.

2. Когда три плоскости пересѣкаются по двѣ по прямымъ параллельнымъ, или двѣ изъ нихъ по крайней мѣрѣ параллельны; въ этомъ случаѣ три плоскости не будутъ имѣть общей точки, и поверхность не будетъ имѣть центра.

3. Если три плоскости пересѣкаются по одной и той же прямой или сливаются въ одну, то всѣ точки прямой или плоскости будутъ центрами поверхности.

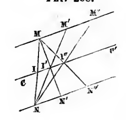
Рѣшивъ уравненія (5), получимъ величину общаго знаменателя D,

$$(6)\qquad \mathrm{D} = \mathrm{AA'A''} - \mathrm{AB}^2 - \mathrm{A'B'}^2 - \mathrm{A''B''}^2 + 2\mathrm{BB'B''}.$$

Если D не равно нулю, то уравненіе будетъ удовлетворяться системою конечныхъ величинъ и притомъ одною; слѣдовательно, поверхность будетъ имѣть только одинъ центръ. Если D равно нулю, то это покажетъ или невозможность, или неопредѣленность; слѣдовательно, поверхность не будетъ имѣть центра или будетъ имѣть ихъ безконечное число.

488. Положимъ, что всѣ точки прямой CC′ (*фиг.* 288) будутъ центры. Если точку M поверхности соединимъ съ какою-нибудь точкою I прямой CC′ и эту линію продолжимъ на величину NI, равную MI, то точка N будетъ принадлежать поверхности; соединяя такимъ образомъ точку M со всѣми точками CC′, получимъ прямую NN′ параллельную CC′. Если теперь точку N соединимъ со всѣми точками линіи CC′, то полу-

Фиг. 288.



чимъ точно также вторую прямую MM', параллельную NN'. Слѣдовательно, поверхность составляется изъ прямыхъ, параллельныхъ CC' и расположенныхъ по двѣ въ одной плоскости съ этой прямой и на равномъ разстояніи по обѣ стороны; это есть цилиндръ, ось котораго есть CC', и такъ какъ слѣдъ цилиндра на плоскость, непараллельную ребрамъ, есть кривая втораго порядка, центръ которой лежитъ на оси, то цилиндръ будетъ эллиптическій или гиперболическій.

Предъидущее разсужденіе показываетъ, что въ разсматриваемомъ нами случаѣ уравненіе (1) не можетъ выражать другихъ кривыхъ поверхностей, какъ только эллиптическіе или гиперболическіе цилиндры; но можетъ случиться, что это уравненіе будетъ выражать одну прямую или двѣ плоскости, и наконецъ что оно не будетъ имѣть дѣйствительныхъ рѣшеній.

Подобнымъ образомъ, въ томъ случаѣ когда всѣ точки плоскости будутъ центрами, докажемъ, что уравненіе (1) выражаетъ или двѣ параллельныя плоскости или одну плоскость, или оно не имѣетъ дѣйствительныхъ рѣшеній.

489. Когда поверхность имѣетъ центръ I, координаты котораго суть a, b, c, то, перенеся оси параллельно имъ самимъ въ эту точку, уравненіе (1) получитъ видъ

$$(7) \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + F_1 = 0,$$

гдѣ постоянное F_1 равно

$$F_1 = Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 + 2Bbc + 2B'ca + 2B''ab + 2Ca + 2C'b + 2C''c + F.$$

Числа a, b, c удовлетворяютъ уравненію (5), т. е. что

$$\begin{aligned} Aa + B''b + B'c + C &= 0,\\ B''a + A'b + Bc + C' &= 0,\\ B'a + Bb + A''c + C'' &= 0. \end{aligned}$$

Если каждое изъ этихъ уравненій умножимъ соотвѣтственно на a, b, c и сложимъ, то получимъ

$$Aa^2 + A'b^2 + A''c^2 + 2Bbc + 2B'ca + 2B''ab + Ca + C'b + C''c = 0.$$

Слѣдовательно, величина F_1 будетъ

$$F_1 = F + Ca + C'b + C''c;$$

эту величину мы получимъ, *придавъ къ прежнему постоянному члену половину величинъ, которыя получаютъ члены первой степени, когда въ нихъ* x, y, z *замѣнимъ координатами центра*.

Если новый постоянный членъ F_1 будетъ равенъ нулю, то уравненіе (7), будучи однородно относительно x, y, z, выразитъ конусъ, вершина котораго находится въ началѣ координатъ (§ 464); однако же геометрическое мѣсто можетъ выражать или двѣ плоскости, или одну прямую, или одну точку.

490. Мы видѣли, что касательныя къ различнымъ кривымъ, проведеннымъ на поверхности черезъ одну точку, находятся въ одной плоскости, исключая только того случая, когда координаты точки прикосновенія обращаютъ въ нуль въ одно время всѣ три частныя производныя, взятыя относительно x, y, z отъ первой части уравненія. Въ поверхностяхъ же втораго порядка такая точка есть центръ поверхности; такъ какъ эта точка находится также на поверхности, то, перенеся въ нее начало координатъ, постоянное F_1 будетъ нуль; такимъ образомъ для поверхностей втораго порядка исключеніе составляетъ конусъ, когда точка будетъ вершиною.

Діаметральныя плоскости.

491. Прямая линія пересѣкаетъ поверхность втораго порядка только въ двухъ точкахъ; поверхность, которая раздѣляетъ пополамъ параллельныя хорды, называется діаметральною поверхностію.

Пусть m и n будутъ постоянные параметры, которые опредѣляютъ направленія хордъ; перенесемъ оси параллельно имъ самимъ въ какую-нибудь точку пространства, которая координатами имѣетъ a, b c; тогда уравненіе (1) получитъ видъ (4). Тогда прямая, проведенная черезъ новое начало въ данномъ направленіи, выразится уравненіемъ $x=mz$, $y=nz$. Замѣнивъ въ уравненіи (4) x черезъ mz, y черезъ nz, получимъ уравненіе, опредѣляющее координаты z точекъ пересѣченія прямой съ поверхностію

$$(8)\qquad \begin{aligned}(\mathrm{A}m^2+\mathrm{A}'n^2+\mathrm{A}''+2\mathrm{B}n+2\mathrm{B}'m+2\mathrm{B}''mn)z^2\\ +(mf'_a+nf'_b+f'_c)\,z+f(a,\ b,\ c)=0.\end{aligned}$$

Чтобы точка (a, b, c) была срединою хорды, проведенной черезъ эту точку въ данномъ направленіи, надобно, чтобы корни предъидущаго

уравненія были равны и имѣли противоположные знаки, а это требуетъ, чтобы координаты a, b, c удовлетворяли уравненію

$$mf'_a + nf'_b + f'_c = 0.$$

Такъ какъ это уравненіе удовлетворяется координатами средней точки одной какой-нибудь изъ разсматриваемыхъ хордъ, то оно выражаетъ искомое геометрическое мѣсто. Замѣнивъ въ этомъ уравненіи a, b, c черезъ x, y, z, получимъ

$$(9) \qquad mf'_x(x, y, z) + nf'_y(x, y, z) + f'_z(x, y, z) = 0,$$

такъ какъ оно первой степени, оно выражаетъ плоскость.

Такимъ образомъ *въ поверхностяхъ втораго порядка, какое бы ни было направленіе хордъ, діаметральная поверхность есть плоскость.*

492. Если параметры m и n удовлетворяютъ уравненію

$$Am^2 + A'n^2 + A'' + 2Bn + 2B'm + 2B''mn = 0,$$

то уравненіе (8) будетъ первой степени, т. е. каждая прямая, параллельная данному направленію, пересѣкаетъ поверхность только въ одной точкѣ. Въ этомъ случаѣ плоскость, выражаемая уравненіемъ (9), будетъ геометрическое мѣсто такихъ точекъ, что прямыя, проведенныя черезъ каждую изъ нихъ параллельно данному направленію, не будутъ пересѣкать поверхность или будутъ расположены на поверхности.

Уравненіе (9) удовлетворяется при всѣхъ величинахъ m и n величинами x, y, z, которыя въ то же время удовлетворяютъ уравненіямъ опредѣляющимъ центръ

$$f'_x = 0, f'_y = 0, f'_z = 0.$$

Отсюда слѣдуетъ, что всѣ діаметральныя плоскости проходятъ черезъ центръ поверхности, если она имѣетъ одинъ центръ, или черезъ геометрическое мѣсто центровъ, если она имѣетъ ихъ безконечное число.

493. Если поверхность не имѣетъ центра, то три плоскости, опредѣляемыя уравненіи (5), будутъ параллельны, или прямая пересѣченія двухъ изъ нихъ будетъ параллельна третьей. Въ первомъ случаѣ мы имѣемъ.

$$f'_x = \alpha f'_z + p, \ f'_y = \beta f'_z + q,$$

гдѣ α, β, p, q означаютъ постоянныя; тогда уравненіе (9) обратится въ

$$(\alpha m + \beta n + 1) f'_z + mp + nq = 0;$$

при всѣхъ величинахъ m и n оно выражаетъ плоскости, параллельныя между собою. Во второмъ случаѣ, если плоскости, опредѣляемыя двумя уравненіями $f'_x = 0$, $f'_y = 0$, пересѣкаются по прямой параллельной плоскости $f'_z = 0$, и такъ какъ общее уравненіе плоскостей, проходящихъ черезъ прямую пересѣченія двухъ первыхъ, есть $\alpha f'_x + \beta f'_y = 0$, то мы получимъ

$$f'_z = \alpha f'_x + \beta f'_y + r,$$

гдѣ α, β, r суть постоянныя; слѣдовательно, уравненіе (9) получитъ видъ

$$(m + \alpha) f'_x + (n + \beta) f'_y + r = 0;$$

это уравненіе выражаетъ плоскости, параллельныя прямой пересѣченія двухъ плоскостей

$$f'_x = 0, \; f'_y = 0.$$

Такимъ образомъ, *діаметральныя плоскости поверхностей, не имѣющихъ центра, параллельны одной и той же прямой или параллельны между собою.*

494. Разсмотримъ направленіе, которому соотвѣтствуетъ діаметральная плоскость. Если за ось z возьмемъ одну изъ хордъ, за оси x и y двѣ другія, находящіяся въ діаметральной плоскости, то уравненіе поверхности для всякой системы произвольныхъ величинъ перемѣнныхъ x и y должно удовлетворяться двумя равными и имѣющими противоположные знаки величинами z; слѣдовательно, оно будетъ имѣть видъ

$$Pz^2 + f_1(x, y) = 0,$$

гдѣ $f_1(x, y)$ означаетъ функцію двухъ перемѣнныхъ x и y, степень которыхъ не превышаетъ 2. Перемѣстимъ оси x и y въ плоскости XOY, сохраняя прежнее направленіе оси z; такое преобразованіе мы сдѣлаемъ помощію формулъ Геометріи на плоскости. Если функція $f_1(x, y)$ будетъ второй степени, то, какъ мы видѣли (кн. III, гл. II), можно выбрать новыя оси OX, OY безконечно разнообразно, такъ чтобы эта функція имѣла одинъ изъ видовъ

$$Mx^2 + Ny^2 + F_1, \; Ny^2 + Qx, \; Ny^2 + F_1;$$

тогда уравненіе поверхности приведется къ одному изъ видовъ

$$\text{(I)}\quad Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 + F_1 = 0,$$
$$\text{(II)}\quad Ny^2 + Pz^2 + Qx = 0,$$
$$\text{(III)}\quad Ny^2 + Pz^2 + F_1 = 0.$$

Если функція f'_x будетъ первой степени, то посредствомъ подобнаго перемѣщенія мы ее приведемъ къ виду Qx, и уравненіе поверхности будетъ

$$\text{(IV)}\quad Pz^2 + Qx = 0.$$

Наконецъ, если функція f'_x будетъ постоянная, то уравненіе поверхности будетъ

$$\text{(V)}\quad Pz^2 + F_1 = 0.$$

495. Въ предъидущемъ буквы M, N, P, Q означаютъ постоянныя, которыя не равны нулю, а F_1 постоянное, которое можетъ быть равно нулю. Поэтому, если корни уравненія (III) будутъ дѣйствительные, то оно выразитъ эллиптическій или гиперболическій цилиндръ, прямую, или двѣ пересѣкающіяся плоскости. Уравненіе (IV) выражаетъ параболическій цилиндръ. Если корни уравненія (V) будутъ дѣйствительные, то оно выразитъ двѣ параллельныя плоскости или одну плоскость. Такимъ образомъ видно, что, если не будемъ обращать вниманія на цилиндры, то уравненія втораго порядка можно различными способами привести къ одному изъ видовъ (I) и (II).

Разсмотримъ уравненіе (I); приравнявъ нулю частныя его производныя, получимъ три уравненія, которыя имѣютъ одно рѣшеніе; слѣдовательно, поверхность имѣетъ одинъ центръ, начало координатъ. Каждая изъ плоскостей координатъ есть діаметральная плоскость хордъ параллельныхъ пересѣченію двухъ другихъ; въ слѣдствіе этого свойства онѣ называются сопряженными діаметральными плоскостями.

Уравненіе (II) выражаетъ поверхности, не имѣющія центра, потому что уравненіе $f'_x = 0$ приводится къ $Q = 0$. Плоскость XOZ раздѣляетъ пополамъ хорды, параллельныя OY, а плоскость XOY хорды, параллельныя OZ; линіи, параллельныя OX, пересѣкаютъ поверхность только въ одной точкѣ и въ этомъ случаѣ не будетъ соотвѣтствующей діаметральной плоскости.

Діаметры.

496. Мы видѣли, что сѣченія, сдѣланныя на поверхности втораго порядка параллельными плоскостями, суть сходственныя кривыя (§ 483);

если эти кривыя будутъ имѣть центръ, то геометрическое мѣсто центровъ называется *діаметромъ*.

Сѣкущая плоскость выражается уравненіемъ

$$(10) \qquad ax + by + cz = l,$$

въ которомъ a, b, c означаютъ постоянныя, а l перемѣнный параметръ; если въ уравненіи поверхности $f(x, y, z) = 0$, замѣнимъ z его величиною

$$(11) \qquad z = \frac{l - ax - by}{c},$$

найденною изъ уравненія плоскости, то получимъ уравненіе проекціи кривой пересѣченія на плоскость xy. Чтобы опредѣлить центръ кривой проекціи, надобно приравнять нулю производныя, взятыя относительно x и y. Но эти производныя можно найти, не дѣлая внесенія; для этого достаточно къ функціи $f(x, y, z)$ приложить теорему сложныхъ функцій, разсматривая z какъ функцію двухъ перемѣнныхъ x и y, опредѣляемую формулою (11); такимъ образомъ получимъ два уравненія

$$(12) \qquad f'_x - \frac{a}{c} f'_z = 0, f'_y - \frac{b}{c} f'_z = 0.$$

Если будемъ проектировать кривую на плоскость, то очевидно, что проекція центра данной кривой совпадаетъ съ центромъ кривой проекціи. Слѣдовательно, уравненія (12) въ соединеніи съ уравненіемъ плоскости опредѣляетъ центръ кривой пересѣченія. Такъ какъ уравненія (12) не содержатъ перемѣннаго параметра l, то они выражаютъ геометрическое мѣсто центровъ; такимъ образомъ діаметръ есть прямая, выражаемая уравненіями

$$(13) \qquad \frac{f'_x}{a} = \frac{f'_y}{b} = \frac{f'_z}{c}.$$

Главныя плоскости.

497. Между діаметральными плоскостями поверхности втораго порядка, надо отличать въ частности тѣ, которыя перпендикулярны къ хордамъ, которыя онѣ дѣлятъ пополамъ, это суть плоскости симетріи фигуры; онѣ называются *главными плоскостями*. Прежде мы предполагали, что оси координатъ были какія-нибудь; при опредѣленіи главныхъ плоско-

стей мы будемъ предполагать оси прямоугольными. Если черезъ α, β, γ означимъ косинусы угловъ, образуемыхъ даннымъ направленіемъ съ осями, то уравненія хордъ можно будетъ представить въ видѣ

(14) $$\frac{x-a}{\alpha}=\frac{y-b}{\beta}=\frac{z-c}{\gamma}=\rho,$$

гдѣ a, b, c означаютъ координаты точки I этой хорды, а x, y, z координаты какой-нибудь точки этой же хорды. Буква ρ означаетъ разстояніе первой точки отъ второй, которое надо принимать со знакомъ $+$ или $-$, смотря по тому, берется ли оно въ данномъ направленіи или въ обратномъ.

Разстояніе I отъ точекъ пересѣченія кривой съ поверхностію опредѣлимъ изъ уравненія (4) § 486, замѣнивъ въ немъ буквы x, y, z черезъ $\alpha\rho$, $\beta\rho$, $\gamma\rho$; тогда получимъ

(15) $$S\rho^2+T\rho+K=0,$$

полагая для краткости

(16) $$\begin{cases} S=A\alpha^2+A'\beta^2+A''\gamma^2+2B\beta\gamma+2B''\alpha\beta \\ T=\alpha f'_a(a,b,c)+\beta f'_b(a,b,c)+\gamma f'_c(a,b,c) \\ K=f(a,b,c). \end{cases}$$

Если положимъ, что точка I неподвижна и если будемъ измѣнять углы α, β, γ, то уравненіе (15) можно разсматривать, какъ выражающее поверхность въ полярныхъ координатахъ. Коеффиціентъ S при ρ^2 зависитъ только отъ направленія радіуса вектора; постоянный членъ K зависитъ только отъ положенія точки I, а коеффиціентъ T измѣняется въ одно время съ направленіемъ радіуса вектора и положеніемъ точки I.

498. Уравненіе діаметральной плоскости хордъ параллельныхъ направленію (α, β, γ), будетъ вида

$$\alpha f'_x+\beta f'_y+\gamma f'_z=0,$$

то есть

(17) $$\begin{aligned}(A\alpha+B''\beta+B'\gamma)\,x+(B''\alpha+A'\beta+B\gamma)\,y \\ +(B'\alpha+B\beta+A''\gamma)\,z+C\alpha+C'\beta+C''\gamma=0.\end{aligned}$$

Пусть λ, μ, ν будутъ косинусы угловъ, которые образуетъ съ осями координатъ нормаль, проведенная къ этой діаметральной плоскости; θ уголъ нормали съ направленіемъ хордъ; тогда получимъ

$$\frac{\lambda}{A\alpha + B''\beta + B'\gamma} = \frac{\mu}{B''\alpha + A'\beta + B\gamma} = \frac{\nu}{B'\alpha + B\beta + A''\gamma}$$
$$= \frac{\alpha\lambda + \beta\mu + \gamma\nu}{\alpha(A\alpha + B''\beta + B'\gamma) + \beta(B''\alpha + \ldots) + \ldots} = \frac{\cos\theta}{S}.$$

Чтобы діаметральная плоскость была главною плоскостію, надобно, чтобы нормаль, проведенная къ плоскости, совпадала съ направленіемъ хордъ; слѣдовательно, мы должны имѣть

(18) $$\frac{\alpha}{A\alpha + B''\beta + B'\gamma} = \frac{\beta}{B''\alpha + A'\beta + B\gamma} = \frac{\gamma}{B'\alpha + B\beta + A''\gamma} = \frac{1}{S};$$

тогда уравненіе (17) главной плоскости будетъ

(19) $$S(\alpha x + \beta y + \gamma z) + C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0.$$

499. Изъ уравненій (18) находимъ слѣдующія уравненія

(20) $$\begin{cases} (A - S)\alpha + B''\beta + B'\gamma = 0, \\ B''\alpha + (A' - S)\beta + B\gamma = 0, \\ B'\alpha + B\beta + (A'' - S)\gamma = 0; \end{cases}$$

присоединивъ къ нимъ

(21) $$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1,$$

получимъ четыре уравненія съ четырьмя неизвѣстными.

Такъ какъ три неизвѣстныя α, β, γ не могутъ въ одно время равняться нулю, потому что сумма ихъ квадратовъ должна равняться единицѣ, то одно изъ нихъ по крайней мѣрѣ, напримѣръ γ, не равно нулю. Чтобы рѣшить эти уравненія, представимъ, что первыя части трехъ уравненій (20) раздѣлены на γ; тогда опредѣлимъ изъ двухъ первыхъ величины отношеній $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$; внеся ихъ въ третье; получимъ уравненіе, содержащее только вспомогательное неизвѣстное S; зная эту величину и зная величины отношеній $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$, опредѣлимъ косинусы посредствомъ уравненія (21).

Вмѣсто того, чтобы дѣлить на γ, опредѣлимъ изъ двухъ первыхъ уравненій (20) величины α и β и внесемъ въ третье, тогда получимъ уравненіе вида $D_1\gamma = 0$; такъ какъ γ не равна нулю, то положимъ $D_1 = 0$; это есть уравненіе относительно S. Но очевидно, что многочленъ D_1 есть ничто иное, какъ общій знаменатель формулъ рѣшенія уравненія (20), разсматриваемыхъ какъ система трехъ неизвѣстныхъ α, β, γ. Замѣтимъ также, что этотъ многочленъ, можно составить изъ многочлена,

который мы означили черезъ D (§ 487), замѣнивъ въ немъ буквы A, A′ A″ черезъ A — S, A′ — S, A″ — S. Такимъ образомъ уравненіе, опредѣляющее неизвѣстное S, будетъ

$$(22)\qquad (A - S)(A' - S)(A'' - S) - (A - S)B^2 - (A' - S)B'^2 - (A'' - S)B''^2 + BB'B'' = 0;$$

если разложимъ многочленъ по степенямъ S, то увидимъ, что членъ независящій отъ S будетъ самое количество D.

500. Если три коеффиціента B, B′, B″ не будутъ равны нулю, то получимъ уравненіе болѣе удобнаго вида для разсмотрѣнія; сдѣлавъ исключеніе другимъ образомъ: умножимъ уравненія (20) соотвѣтственно на B, B′, B″ и произведенія вычтемъ по два; тогда получимъ

$$(23)\qquad [(S - A)B + B'B'']\,\alpha = [(S - A')B' + B''B]\,\beta = [(S - A'')B'' + BB']\,\gamma,$$

или

$$\frac{\alpha}{\dfrac{1}{(S-A)B+B'B''}} = \frac{\beta}{\dfrac{1}{(S-A')B'+B''B}} = \frac{\gamma}{\dfrac{1}{(S-A'')B''+BB'}}$$

Если въ одно изъ тѣхъ же уравненій, напримѣръ въ первое, внесемъ вмѣсто α, β, γ пропорціональныя величины, то получимъ

$$\frac{(A-S)}{(S-A)B+B'B''} + \frac{B''}{(S-A')B'+B''B} + \frac{B'}{(S-A'')B''+BB'} = 0,$$

или

$$\frac{B'B''}{(S-A)B+B'B''} + \frac{B''B}{(S-A')B+B''B'} + \frac{BB'}{(S-A'')B''+BB'} - 1 = 0,$$

или

$$(24)\qquad \frac{1}{B^2(S-a)} + \frac{1}{B'^2(S-b)} + \frac{1}{B''^2(S-c)} - \frac{1}{BB'B''} = 0,$$

означая черезъ a, b, c величины

$$A - \frac{B'B''}{B},\ A' - \frac{B''B}{B'},\ A'' - \frac{BB'}{B''}.$$

Разборъ уравненія третьей степени.

501. Разсмотримъ сперва болѣе общій случай, когда ни одинъ изъ коеффиціентовъ B, B′ B″ не равенъ нулю. Возьмемъ уравненіе относительно S въ видѣ (24).

I. Положимъ, что три величины a, b, c будутъ различны и расположены по возрастающей величинѣ. Внесемъ въ первую часть уравненія (24) вмѣсто S послѣдовательно величины $a \pm \varepsilon$, $b \pm \varepsilon'$, $c \pm \varepsilon''$, гдѣ (ε, ε', ε'') означаютъ очень малыя положительныя величины. Отъ перваго внесенія первый членъ уравненія будетъ имѣть очень большую числовую величину $\pm \frac{1}{B^2\varepsilon}$, между тѣмъ какъ другіе члены будутъ имѣть конечныя величины; слѣдовательно, многочленъ будетъ имѣть знакъ перваго члена. Точно также отъ втораго внесенія второй членъ будетъ имѣть очень большую величину $\pm \frac{1}{B'^2\varepsilon'}$, между тѣмъ какъ другіе члены будутъ имѣть конечныя величины; слѣдовательно, многочленъ будетъ имѣть знакъ втораго члена. Точно также отъ третьяго члена многочленъ будетъ имѣть знакъ третьяго члена $\pm \frac{1}{B''^2\varepsilon''}$.

При измѣненіи S отъ $a + \varepsilon$ до $b - \varepsilon'$, первый членъ остается конечнымъ и измѣняется непрерывно; такъ какъ эти два числа даютъ результаты съ обратными знаками, то между ними находится одинъ дѣйствительный корень уравненія; такимъ образомъ существуетъ дѣйствительный корень уравненія, заключающійся между a и b. Точно также увидимъ, что существуетъ второй корень между b и c. Существуетъ третій корень, который будетъ больше c или меньше a, смотря по тому, будетъ ли количество $BB'B''$ положительное или отрицательное. Дѣйствительно, когда для S дадимъ очень большую числовую величину, первая часть уравненія (24) приведется къ $-\frac{1}{BB'B''}$: слѣдовательно, если количество $BB'B''$ будетъ положительное, то первая часть при измѣненіи S отъ $c + \varepsilon''$ до $+\infty$ перемѣнитъ знакъ, и слѣдовательно, существуетъ дѣйствительный корень, который больше c; если количество $BB'B''$ будетъ отрицательное, то первая часть, при измѣненіи S отъ $-\infty$ до $a - \varepsilon$, перемѣнитъ знакъ; въ этомъ случаѣ третей корень будетъ меньше a.

Такимъ образомъ въ разсматриваемомъ случаѣ уравненіе имѣетъ три дѣйствительные, неравные корня. Каждому изъ этихъ корней соотвѣтствуетъ одно, опредѣленное направленіе хордъ; дѣйствительно, если въ уравненіи (23) замѣнимъ S однимъ изъ корней, то такъ какъ величины, находящіяся въ трехъ скобкахъ, не равны нулю, получимъ для трехъ косинусовъ величины конечныя и опредѣленныя.

II. Положимъ, что двѣ изъ трехъ величинъ a, b, c, напримѣръ a и b равны. Три корня будутъ также дѣйствительны и неравны; но одинъ

изъ нихъ будетъ равенъ a. Дѣйствительно, уравненіе (24), представленное въ цѣломъ видѣ, будетъ

$$(25)\qquad B'^2B''^2(S-b)(S-c)+B''^2B^2(S-c)(S-a)$$
$$+B^2B'^2(S-a)(S-b)-BB'B''(S-a)(S-b)(S-c)=0.$$

Если $a=b$, то первая часть раздѣлится на $S-a$, и мы получимъ уравненіе второй степени

$$B''^2(B^2+B'^2)(S-c)+B^2B'^2(S-a)-BB'B''(S-a)(S-c)=0.$$

Такъ какъ, при величинахъ: S, a и c, первая часть будетъ имѣть величины съ обратными знаками, то это уравненіе имѣетъ два дѣйствительные корня, и одинъ заключается между a и c.

Если въ уравненіи (23) замѣнимъ S послѣдовательно каждымъ корнемъ уравненія второй степени, то ни одна изъ величинъ, заключающихся въ трехъ скобкахъ, не обратится въ нуль, и каждый корень дастъ только одно опредѣленное направленіе. Для перваго корня a величины, заключающіяся въ двухъ первыхъ скобкахъ, равны нулю, но величина въ третьей скобкѣ не равна нулю; отсюда слѣдуетъ, $\gamma=0$. Чтобы повѣрить уравненіе (20), надобно, кромѣ того, взять $B'\alpha+B\beta=0$, что, опредѣлитъ также одно направленіе, параллельное плоскости xy.

III. Наконецъ, если три величины a, b, c будутъ равны, то два корня уравненія (25) будутъ равны a, а третій опредѣлится изъ уравненія первой степени

$$(B'^2B''^2+B''^2B^2+B^2B'^2)-BB'B''(S-a)=0.$$

Этому простому корню соотвѣтствуетъ одно направленіе. Для двойнаго корня три уравненія (20) приведутся къ одному $B'B''\alpha+B''B\beta+BB'\gamma=0$; но здѣсь будетъ неопредѣленность; всѣ направленія, параллельныя плоскости $B'B''x+B''By+BB'z=0$, соотвѣтствуютъ этому двойному корню.

502. Разсмотримъ теперь случай, когда три коеффиціента B, B′, B″ равны нулю.

I. Одинъ изъ коеффиціентовъ, напримѣръ B″, равенъ нулю. Тогда уравненіе третьей степени (22) будетъ

$$(S-A)(S-A')(S-A'')-(S-A)B^2-(S-A')B'^2=0.$$

Пусть $A<A'$; внеся въ первую часть $-\infty$, A, A′, $+\infty$, получимъ результаты соотвѣтственно съ знаками $-$, $+$, $-$, $+$; слѣдовательно,

уравненіе имѣетъ три дѣйствительные и неравные корня. Для каждаго изъ нихъ уравненія (20) даютъ опредѣленное направленіе, потому что изъ двухъ первыхъ находимъ конечныя величины для отношеній $\frac{\alpha}{\gamma}$, $\frac{\beta}{\gamma}$.

II. Два коеффиціента, напримѣръ B' и B'' равны нулю. Тогда уравненіе третьей степени (22) будетъ

$$(S - A)\,[(S - A')\,(S - A'') - B^2] = 0;$$

это уравненіе имѣетъ корень A и два дѣйствительные и неравные корни, опредѣляемые уравненіемъ второй степени. Если количество $(A - A')(A - A'') - B^2$ не будетъ равно нулю, то ни одинъ изъ двухъ корней уравненія второй степени не будетъ равенъ A, и, слѣдовательно, три корня будутъ неравны. При $S = A$ уравненія (20) приведутся къ

$$(A' - A)\,\beta + B\gamma = 0,\ \ B\beta + (A'' - A)\,\gamma = 0,$$

которыя удовлетворяются только величинамъ $\beta = 0, \gamma = 0$; откуда $\alpha = 1$; что даетъ совершенно опредѣленное направленіе. Для каждаго изъ другихъ корней эти уравненія приведутся къ $\alpha = 0$, $(A' - S)\,\beta + B\gamma = 0$, которыя также даютъ совершенно опредѣленное направленіе.

Если $(A - A')(A - A'') - B^2 = 0$, то такъ какъ одинъ изъ корней уравненія второй степени равенъ A, уравненіе имѣетъ двойной корень A и простой корень. Простому корню соотвѣтствуетъ опредѣленное направленіе; для двойнаго корня A уравненія (20) приводятся къ одному

$$(A' - A)\,\beta + B\gamma = 0,$$

которое опредѣляетъ всѣ направленія, параллельныя плоскости

$$(A' - A)\,y + Bz = 0.$$

III. Если въ одно время три коеффиціента B, B' B'' равны нулю, то уравненіе (22) приведется къ

$$(S - A)\,(S - A')\,(S - A'') = 0,$$

которое корнями имѣетъ A, A', A''. Когда эти три корня неравны, то изъ уравненій (20) видно, что этимъ корнемъ соотвѣтствуютъ направленія, соотвѣтственно параллельныя каждой изъ трехъ осей координатъ. Если $A = A'$, то этому двойному корню соотвѣтствуютъ направленія, параллельныя плоскости xy. Наконецъ, если $A = A' = A''$, то этому трой-

ному корню соотвѣтствуютъ всѣ направленія въ пространствѣ; въ этомъ случаѣ произойдетъ неопредѣленность, потому что тогда уравненія (20) обратятся въ тожество.

Такимъ образомъ, три корня *уравненія третьей степени относительно* S *всегда дѣйствительны. Простому корню соотвѣтствуетъ опредѣленное направленіе; двойному корню — всѣ направленія, параллельныя плоскости; тройному корню — всѣ направленія пространства.*

503. Пусть (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ будутъ косинусы угловъ, образуемыхъ осями координатъ съ направленіями, соотвѣтствующими двумъ различнымъ корнямъ S и S'. По уравненію (20) получимъ

$$\begin{cases} A\alpha + B''\beta + B'\gamma = S\alpha, \\ B''\alpha + A'\beta + B\gamma = S\beta, \\ B'\alpha + B\beta + A\gamma'' = S\gamma, \end{cases} \qquad \begin{cases} A\alpha' + B''\beta' + B'\gamma' = S'\alpha', \\ B''\alpha' + A'\beta' + B\gamma' = S'\beta', \\ B'\alpha' + B\beta' + A''\gamma' = S'\gamma'. \end{cases}$$

Умноживъ первыя уравненія соотвѣтственно на α', β', γ', вторыя на α, β, γ и вычтя изъ суммы первыхъ сумму вторыхъ, получимъ

$$(S - S')(\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma') = 0,$$

или

$$\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0.$$

Слѣдовательно, *направленія, соотвѣтствующія двумъ различнымъ корнямъ, перпендикулярны между собою.*

Отсюда слѣдуетъ, что направленія, соотвѣтствующія двойному корню, перпендикулярны къ направленію, соотвѣтствующему третьему корню.

Число главныхъ плоскостей.

504. Діаметральная плоскость хордъ параллельныхъ направленію (α, β, γ) опредѣляется уравненіемъ (19) § 498.

$$S(\alpha x + \beta y + \gamma z) + (C\alpha + C'\beta + C''\gamma) = 0.$$

Такимъ образомъ, *каждому направленію хордъ, опредѣляемому корнемъ* S, *который не равенъ нулю, соотвѣтствуетъ главная плоскость.*

Если корень S будетъ нуль, то главной плоскости не будетъ. Однако, если мы имѣемъ $C\alpha + C'\beta + C''\gamma = 0$, то уравненія (19) обратятся въ тожество, и положеніе главной плоскости будетъ неопредѣленно; тогда всякая плоскость, перпендикулярная къ направленію хордъ, будетъ главная плоскость; поверхность въ этомъ случаѣ будетъ цилиндрическая. Если ко-

рень S будетъ нуль, то по уравненію (15) соотвѣтствующія прямыя пересѣкутъ поверхность только въ одной точкѣ.

Замѣтимъ, что уравненіе относительно S имѣетъ по крайней мѣрѣ одинъ корень, который не равенъ нулю; потому что три корня будутъ равны, если только $B = B' = B'' = 0$; тогда эти корни, будучи равны A, A′, A″, не равны всѣ три нулямъ, безъ чего данное уравненіе не будетъ второй степени. Это свойство уравненія (22) можно доказать независимо отъ изложенной теоріи. Въ самомъ дѣлѣ, если бы три корня были нули, то, приравнявъ нулю коеффиціенты при S^2 и S, получили-ли бы

$$A + A' + A'' = 0,\ AA' + A'A'' + A''A - B^2 - B'^2 - B''^2 = 0;$$

если изъ квадрата перваго количества вычтемъ удвоенное второе, то получимъ

$$A^2 + A'^2 + A''^2 + 2B^2 + 2B'^2 + B''^2 = 0;$$

откуда $A = A' = A'' = B' = B'' = B = 0$, и уравненіе болѣе не будетъ второй степени. Такимъ образомъ, всякая поверхность второй степени имѣетъ по крайней мѣрѣ одну главную плоскость.

505. Мы видѣли (§ 494), что уравненіе второй степени, исключая цилиндра, можно привести къ одному изъ двухъ видовъ

$$(\alpha)\qquad Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 + F_1 = 0,\ (\beta)\ Ny^2 + Pz^2 + Qx = 0;$$

первое относится къ поверхностямъ, имѣющимъ одинъ центръ; второе къ поверхностямъ, которая не имѣетъ центра. Если діаметральная плоскость, которая служила для приведенія, будетъ главная плоскость, то, такъ какъ можно сдѣлать приведенія высшія, взявъ въ главной плоскости двѣ прямоугольныя оси, уравненіе поверхности приведется къ одному изъ двухъ видовъ (α) и (β) въ прямоугольныхъ координатахъ.

ГЛАВА II.

Приведеніе уравненія второй степени.

Въ предъидущей главѣ мы видѣли, что уравненіе второй степени можно привести къ одному изъ простѣйшихъ видовъ

$$Mx^2 + Ny^2 + Pz^2 + F_1 = 0,\ Ny^2 + Pz^2 + Qx = 0,$$
$$Ny^2 + Pz^2 + F_1 = 0,\ Pz^2 + Qx = 0,\ Pz^2 + F_1 = 0,$$

въ прямоугольныхъ координатахъ. Остается намъ показать, какимъ образомъ на практикѣ дѣлается это приведеніе.

Первый случай. $D \gtreqless 0$.

506. Сперва переносимъ оси параллельно имъ самимъ въ центръ поверхности; тогда уравненіе второй степени

$$(1) \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'xz + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F = 0,$$

обратится въ

$$(2) \qquad Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + F_1 = 0;$$

коэффиціенты членовъ второй степени не измѣняются и мы вычисляли постоянное F_1 (§ 489).

Сперва положимъ, что три корня уравненія третьей степени относительно S различны и означимъ ихъ черезъ S, S', S''; пустъ (α, β, γ), $(\alpha', \beta', \gamma')$ $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ будутъ косинусы угловъ, образуемыхъ съ осями направленіями, соотвѣтствующими этимъ тремъ корнямъ. Если перемѣнимъ оси координатъ, принимая эти три направленія за направленія новыхъ осей, то формулы преобразованія будутъ

$$(3) \qquad \begin{cases} x = \alpha x' + \alpha' y' + \alpha'' z', \\ y = \beta x' + \beta' y' + \beta'' z', \\ z = \gamma x' + \gamma' y' + \gamma'' z', \end{cases}$$

и уравненіе поверхности приметъ видъ

$$Mx'^2 + Ny'^2 + Pz'^2 + F_1 = 0,$$

потому что оно не должно содержать произведеній перемѣнныхъ. Но

$$M = A\alpha^2 + A'\beta^2 + A''\gamma^2 + 2B\beta\gamma + 2B'\gamma\alpha + 2B''\alpha\beta,$$

т. е. $M = S$ (§ 497). Подобнымъ разсужденіемъ найдемъ $N = S'$ и $P = S''$. Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ приведенное уравненіе будетъ

$$(4) \qquad Sx'^2 + S'y'^2 + S''z'^2 + F_1 = 0.$$

507. Легко увидѣть, что коэффиціенты при произведеніи перемѣнныхъ въ новомъ уравненіи равны нулю. Возьмемъ напримѣръ коэффиціентъ $2B_1$ члена $y'\,z'$; мы имѣемъ

$$B_1 = A\alpha\alpha' + A'\beta'\beta'' + A''\gamma'\gamma'' + B(\beta'\gamma'' + \gamma'\beta'') + B'(\gamma'\alpha'' + \alpha'\gamma'') + B''(\alpha'\beta'' + \beta'\alpha'').$$

Если умножимъ обѣ части каждаго уравненія

$$\begin{aligned} A\alpha' + B''\beta' + B'\gamma' &= S'\alpha', \\ B''\alpha' + A'\beta' + B\gamma' &= S'\beta', \\ B'\alpha' + B\beta' + A''\gamma' &= S'\gamma', \end{aligned}$$

соотвѣтственно на α'', β'', γ'' и потомъ сложимъ, то получимъ

$$B_1 = S'(\alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'').$$

Такъ какъ оба направленія $(\alpha', \beta', \gamma',)$, $(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ взаимно перпендикулярны, то заключаемъ, что $B_1 = 0$. Точно также найдемъ, что $B'_1 = B''_1 = 0$.

508. Если два корня уравненія третьей степени будутъ равны, то простому корню будетъ соотвѣтствовать опредѣленная главная плоскость, а двойному корню безконечное число хордъ, параллельныхъ этой плоскости. Если за новыя оси возьмемъ двѣ перпендикулярныя прямыя, расположенныя въ этой плоскости, и перпендикуляръ, проведенный къ плоскости, то можно будетъ приложить предъидущій способъ, и мы получимъ уравненіе

$$S(x'^2 + y'^2) + S''z'^2 + F_1 = 0,$$

которое выражаетъ поверхность вращенія около оси OZ'. Наконецъ, если три корня будутъ равны, то, взявъ какія-нибудь новыя прямоугольныя оси, уравненіе будетъ всегда $S(x'^2 + y'^2 + z'^2) + F_1 = 0$; оно можетъ выражать только шаръ.

Второй случай. $D = 0$.

509. Въ этомъ случаѣ сперва перемѣняютъ направленіе осей, принимая за новыя оси направленія, соотвѣтствующія корнямъ уравненія третьей степени, или, если корни этого уравненія будутъ равны, одну изъ системъ въ безконечномъ числѣ трехъ прямоугольныхъ направленій, опредѣляемыхъ этими корнями. Мы докажемъ, подобно тому какъ доказали алгебраически въ предъидущемъ случаѣ, что $B_1 = B'_1 = B''_1 = 0$; коэффиціенты квадратовъ перемѣнныхъ имѣютъ также величины S, S', S''. Слѣдовательно, если одинъ корень S будетъ нуль и если за ось OX'

возьмемъ направленіе, опредѣляемое этимъ корнемъ, то уравненіе поверхности будетъ

$$S' y'^2 + S''z^2 + 2C_1x' + 2C_1'y' + 2C_1''z' + F = 0.$$

Величины коэффиціентовъ суть

$$C_1 = C\alpha + C'\beta + C''\gamma,$$
$$C'_1 = C\alpha' + C'\beta' + C''\gamma',$$
$$C''_1 = C\alpha'' + C'\beta'' + C''\gamma''.$$

Перенеся оси параллельно имъ самимъ, приведемъ предъидущее уравненіе къ виду

$$S'y^2 + S''z^2 + 2C_1x = 0,$$

если C_1 не будетъ равно нулю; и къ виду

$$S'y^2 + S''z^2 + F_1 = 0,$$

если C_1 будетъ нуль. Коэффиціентъ C_1, который входитъ въ приведенное уравненіе, есть коэффиціентъ, который соотвѣтствуетъ простому корню $S = 0$.

Если оба корня S и S′ будутъ равны нулю, то отъ перваго преобразованія уравненіе будетъ

$$S''z' + 2C_1x' + 2C'_1y' + 2C_1''z' + F = 0.$$

Мы видѣли, что для этого двойнаго корня $S = 0$ уравненія (20) § 499 приводятся къ одному уравненію. Чтобы опредѣлить одно изъ соотвѣтствующихъ направленій, можно къ этому уравненію прибавить второе уравненіе, взятое произвольно; мы возьмемъ

$$C'_1 = C\alpha' + C'\beta' + C''\gamma' = 0.$$

Потомъ другое направленіе будетъ совершенно опредѣлено, точно также, какъ коэффиціентъ C_1''. Положивъ это, перенесемъ оси параллельно имъ самимъ; тогда уравненіе приведемъ къ виду

$$S''z^2 + 2C_1x = 0,$$

если C_1 будетъ отличаться отъ нуля; и если C_1 будетъ нуль, къ виду

$$S''z^2 + F_1 = 0.$$

510. *Замѣчаніе*. Если два корня S′ и S″ равны между собой, но не равны нулю, то поверхность будетъ поверхностію вращенія. Если три коэффиціента B, B′, B″ не будутъ равны нулю, то, чтобы имѣть двойной корень, условія будутъ (§ 501)

$$A - \frac{B'B''}{B} = A' - \frac{B''B}{B'} = A'' - \frac{BB'}{B''},$$

а направленіе оси опредѣлится формулами

$$\frac{\alpha}{B'B''} = \frac{\beta}{B''B} = \frac{\gamma}{BB'}.$$

Если только одинъ изъ коеффиціентовъ B, B′, B″ будетъ равенъ нулю, то уравненіе относительно S никогда не будетъ имѣть двойнаго корня. Если два коеффиціента B′, B″ будутъ нули, то для двойнаго корня условіе будетъ (§ 502)

$$(A' - A)(A'' - A) - B^2 = 0,$$

и мы получимъ

$$\alpha = 0, \frac{\beta}{A' - A} = \frac{\gamma}{B}.$$

ГЛАВА III.

Эллипсоидъ.

511. Уравненіе поверхностей втораго порядка, которыя имѣютъ одинъ центръ, мы привели къ виду

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 = H,$$

отнеся поверхность къ ея тремъ главнымъ плоскостямъ.

Положимъ сперва, что три корня имѣютъ одинъ знакъ, напримѣръ +. Если постоянный членъ H будетъ отрицательный, то уравненіе не можетъ быть удовлетворено координатами ни какой точки пространства. Если постоянный членъ H будетъ нуль, то уравненіе удовлетворится только при $x = y = z = 0$; оно выражаетъ только одну точку, начало координатъ. Разсмотримъ наконецъ случай, когда H есть величина положительная, и положимъ

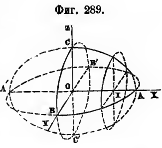
$$a = \sqrt{\frac{H}{S}},\ b = \sqrt{\frac{H}{S'}},\ c = \sqrt{\frac{H}{S''}};$$

тогда уравненіе будетъ

(1) $$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

Координата x можетъ измѣняться только отъ $-a$ до $+a$, y отъ $-b$ до $+b$, z отъ $-c$ до $+c$. Отложимъ по оси x въ обѣ стороны отъ начала координатъ линіи OA и OA′, равныя a; по оси y линіи OB и OB′, равныя b; по оси z линіи OC и OC′, равныя c (*фиг*.. 289). Вообразимъ себѣ черезъ точки A и A′, B и B′, C и C′ плоскости соотвѣтственно параллельныя плоскостямъ YOZ′ ZOX, XOY; тогда вся поверхность будетъ заключаться въ прямоугольномъ параллелепипедѣ, составленномъ такимъ образомъ. Эта поверхность называется *эллипсоидомъ*.

Фиг. 289.



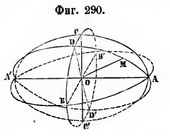
512. Начало координатъ есть *центръ* эллипсоида. Плоскости координатъ, которыя суть три *главныя плоскости* эллипсоида, пересѣкаютъ поверхность по тремъ эллипсамъ ABA′, BCB′, CAC′, которые называются *главными сѣченіями* эллипсоида.

Если поверхность пересѣчемъ плоскостію параллельною плоскости YOZ, то въ сѣченіи получимъ эллипсъ

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2},$$

центръ котораго I находится на оси x. Такъ какъ каждыя двѣ точки кривой симметричны относительно центра I, то точки поверхности симетричны по двѣ относительно прямой OX, которая, слѣдовательно есть *ось* поверхности. По мѣрѣ того, какъ сѣкущая плоскость удаляется отъ главной плоскости YOZ, т. е. когда x измѣняется отъ 0 до a, эллипсъ сѣченія остается всегда подобенъ эллипсу CBC′, но уменьшается до точки. То же самое будетъ съ сѣченіями параллельными каждымъ двумъ другимъ главнымъ плоскостямъ. Такимъ образомъ эллипсоидъ имѣетъ три оси, которыя суть пересѣченія главныхъ плоскостей по двѣ. Концы осей называются вершинами эллипсоида. Если положимъ $a>b>c$, то $2a$ будетъ большая ось, $2b$ средняя, $2c$ малая.

Фиг. 290.



Пусть M будетъ какая-нибудь точка эллипсоида (*фиг*. 290); черезъ эту точку и большую ось проведемъ плоскость; эта плоскость пересѣкаетъ поверхность по сомкнутой кривой втораго порядка, т. е. по эллипсу;

въ слѣдствіи симетріи оси этого эллипса суть прямая AA' и діаметръ DD', по которому сѣкущая плоскость пересѣкаетъ главный эллипсъ CBC'B'; радіусъ OD, заключающійся между двумя осями b и c этого главнаго эллипса, больше c; но съ другой стороны радіусъ OM заключается между OD и a; слѣдовательно, этотъ радіусъ заключается между c и a. Отсюда заключаемъ, что наибольшій радіусъ эллипсоида есть большая полуось OA, наименьшій — малая полуось OC.

Діаметральныя плоскости и діаметры.

513. Разсмотримъ рядъ хордъ параллельныхъ прямой

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma};$$

тогда соотвѣтствующая діаметральная плоскость (§ 491) выразится уравненіемъ

$$(2)\qquad \frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=0.$$

Обратно, всякая плоскость, проходящая черезъ центръ, есть діаметральная плоскость; въ самомъ дѣлѣ, пусть будетъ плоскость

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z=0;$$

эта плоскость совпадетъ съ предъидущею діаметральною плоскостію, если

$$(3)\qquad \frac{\alpha}{a^2\mathrm{A}}=\frac{\beta}{b^2\mathrm{B}}=\frac{\gamma}{c^2\mathrm{C}}.$$

Таковы суть соотношенія, которыя существуютъ между направленіемъ хордъ и направленіемъ сопряженной діаметральной плоскости. Очевидно, что діаметральная плоскость пересѣкаетъ поверхность по сомкнутой кривой втораго порядка, т. е. по эллипсу. Каждая точка этого эллипса есть точка прикосновенія прямой параллельной хордамъ и касательной къ поверхности; эти касательныя составляютъ цилиндръ, касающійся эллипсоида по длинѣ этаго эллипса и огибающей.

514. Извѣстно, что сѣченія, сдѣланныя въ эллипсоидѣ параллельными плоскостями, суть подобные эллипсы (§ 483). Пусть $\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z=l$ будетъ уравненіе плоскости, въ которомъ A, B, C суть постоянные коэффиціенты, l перемѣнный параметръ; тогда геометрическое мѣсто центровъ этихъ эллипсовъ или діаметръ будетъ прямая (§ 496)

(4) $$\frac{x}{a^2 A} = \frac{y}{b^2 B} = \frac{z}{c^2 C},$$

проходящая черезъ центръ поверхности.

Этотъ діаметръ будетъ сопряженнымъ діаметральной плоскости, параллельной сѣкущимъ плоскостямъ, потому что коэффиціенты прямой и плоскости удовлетворяютъ уравненіямъ (3).

Обратно, всякая прямая, проходящая черезъ центръ, есть діаметръ; дѣйствительно, если проведемъ діаметральную плоскость, сопряженную этой прямой и параллельныя сѣкущія плоскости, то геометрическое мѣсто центровъ совпадетъ съ данною прямою.

Въ этомъ случаѣ уравненіе касательной плоскости (§ 476) будетъ

(5) $$\frac{xX}{a^2} + \frac{yY}{b^2} + \frac{zZ}{c^2} = 1.$$

Эта касательная плоскость параллельна діаметральной плоскости сопряженной діаметру, который идетъ отъ центра къ точкѣ прикосновенія; дѣйствительно, такъ какъ этотъ діаметръ уравненіями имѣетъ $\frac{X}{x} = \frac{Y}{y} = \frac{Z}{z}$, то ихъ коэффиціенты и коэффиціенты плоскости удовлетворяютъ уравненіямъ (3).

Сопряженные діаметры.

515. Три діаметра образуютъ систему *сопряженныхъ діаметровъ*, когда каждый изъ нихъ сопряженъ плоскости двухъ другихъ. Мы уже видѣли, что существуетъ подобная система діаметровъ (§ 494); проведемъ произвольно первый діаметръ OD (*фиг.* 291) и разсмотримъ сопряженную діаметральную плоскость. Эта плоскость пересѣкаетъ эллипсоидъ по эллипсу; возьмемъ два какіе-нибудь сопряженные діаметра OE, OF этого эллипса; тогда три діаметра OD, OE, OF образуютъ систему сопряженныхъ діаметровъ; дѣйствительно, если за оси координатъ возьмемъ три прямыя OD, OE, OF и если черезъ a', b', c' назовемъ три радіуса OD, OE, OF, то по § 494 уравненіе эллипсоида представится въ видѣ

Фиг. 291.

$$\frac{x'^2}{a'^2} + \frac{y'^2}{b'^2} + \frac{z'^2}{c'^2} = 1.$$

Отсюда заключаемъ, что три оси координатъ образуютъ систему сопряженныхъ діаметровъ, или, что три плоскости координатъ образуютъ систему сопряженныхъ діаметральныхъ плоскостей.

Изъ этого уравненія видно, какимъ образомъ измѣняются параллельныя сѣченія; если пересѣчемъ поверхность плоскостію параллельною діаметральной плоскости $Y'OZ'$, то получимъ эллипсъ

$$\frac{y'^2}{b'^2}+\frac{z'^2}{c'^2}=1-\frac{x'^2}{a'^2},$$

сходственный діаметральному эллипсу EOF и центръ котораго находится на діаметрѣ OD въ точкѣ J; этотъ эллипсъ уменьшается по мѣрѣ того, какъ сѣкущая плоскость отдаляется отъ діаметральной плоскости; онъ обратится въ точку D, когда сѣкущая плоскость проходитъ черезъ эту точку, и тогда плоскость будетъ касаться поверхности; далѣе плоскость не пересѣкаетъ поверхность; другими словами, она пересѣкаетъ его по мнимому эллипсу, центръ котораго дѣйствительный и находится на продолженіи OD. То же самое будетъ съ другой стороны.

516. Отыщемъ теперь соотношенія, которыя существуютъ между направленіями трехъ сопряженныхъ діаметровъ OD, OE, OF. Означимъ черезъ α, β, γ коеффиціенты перваго діаметра, черезъ α', β', γ' коеффиціенты втораго, черезъ α'', β'', γ'' коеффиціенты третьяго. Тогда уравненіе плоскости, сопряженной діаметру OD, будетъ

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}+\frac{\gamma z}{c^2}=0;$$

такъ какъ эта плоскость заключаетъ діаметръ OE, то получимъ соотношеніе

$$\frac{\alpha\alpha'}{a^2}+\frac{\beta\beta'}{b^2}+\frac{\gamma\gamma'}{c^2}=0.$$

Такимъ образомъ получимъ три соотношенія

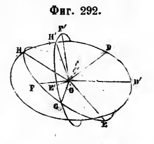
$$(5)\qquad \begin{cases} \dfrac{\alpha\alpha'}{a^2}+\dfrac{\beta\beta'}{b^2}+\dfrac{\gamma\gamma'}{c^2}=0, \\ \dfrac{\alpha'\alpha''}{a^2}+\dfrac{\beta'\beta''}{b^2}+\dfrac{\gamma'\gamma''}{c^2}=0, \\ \dfrac{\alpha''\alpha}{a^2}+\dfrac{\beta''\beta}{b^2}+\dfrac{\gamma''\gamma}{c^2}=0, \end{cases}$$

которыя выражаютъ, что каждый діаметръ есть сопряженный плоскости

двухъ другихъ. Первое изъ этихъ соотношеній выражаетъ, что два діаметра OD, OE сопряжены между собой.

517. Разсмотримъ двѣ системы сопряженныхъ діаметровъ ODEF, OD′E′F′ (*фиг.* 292). Пусть OG будетъ діаметръ, по которому пересѣкаются двѣ плоскости EOF, E′OF′, OH и OH′ діаметры сопряженные OG въ этихъ двухъ плоскостяхъ. Если, оставляя OD, замѣнимъ сопряженные діаметры OE, OF двумя другими сопряженными діаметрами OG, OH того же эллипса, то сумма квадратовъ не измѣнится. Точно также если, оставляя OD′, замѣнимъ два сопряженные діаметра OE′, OF′ двумя другими сопряженными діаметрами OG, OH′ того же эллипса, то сумма квадратовъ не измѣнится. Такимъ образомъ получимъ двѣ системы сопряженныхъ діаметровъ OGHD, OGH′D′, которыя имѣютъ общій діаметръ OG; двѣ другія, будучи расположены въ діаметральной плоскости, сопряженной OG, принадлежатъ одному и тому же эллипсу; слѣдовательно, сумма квадратовъ будетъ одна и та же. Такимъ образомъ *сумма квадратовъ трехъ сопряженныхъ діаметровъ есть величина постоянная, и слѣдовательно, равна суммѣ квадратовъ осей.*

Фиг. 292.



Точно также докажемъ, *что объемъ параллелепипеда, построенниго на трехъ сопряженныхъ діаметрахъ, есть величина постоянная.* Если систему ODEF замѣнимъ системою ODGH, то объемъ не измѣнится, потому что два параллелепипеда имѣютъ равновеликія основанія, параллелограммы EOF, GOH, и одну и ту же высоту, перпендикуляръ, опущенный изъ точки D на плоскость основаній.

Круговыя сѣченія.

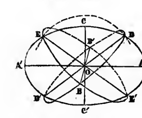
518. Между плоскими сѣченіями эллипсоида особенно надо разсмотрѣть круговыя сѣченія. Положимъ, что діаметральная плоскость пересѣкаетъ эллипсоидъ по кругу (*фиг.* 293); пусть OD будетъ сопряженный діаметръ. Если въ плоскости круга возьмемъ проекцію OD, OE и діаметръ OF, перпендикулярный къ OE, то получимъ систему трехъ сопряженныхъ діаметровъ; но діаметръ OF перпендикуляренъ къ сопряженной діаметральной плоскости DOE; слѣдовательно, эта плоскость есть главная

Фиг. 293.

плоскость, а OF есть одна изъ осей поверхности. Такимъ образомъ діаметральныя плоскости, которыя пересѣкаютъ эллипсоидъ по кругамъ, проходятъ черезъ одну изъ осей поверхности. Эта ось есть средняя ось BB′ эллипсоида; дѣйствительно, мы видѣли (§ 512), что если сѣкущая плоскость проходитъ черезъ большую ось AA′, то обѣ оси эллипса необходимо различаются; то же самое будетъ, когда сѣкущая плоскость проходитъ черезъ малую ось CC′.

Когда сѣкущая плоскость проходитъ черезъ среднюю ось BB′, обѣ оси эллипса пересѣченія будутъ ось BB′ и діаметръ DD′, по которому сѣкущая плоскость пересѣкаетъ главный эллипсъ ACA′ (*фиг.* 294). Діаметръ DD′, который измѣняется отъ CC′ до AA′, можетъ быть равенъ BB′, и тогда сѣченіе будетъ кругъ. Изъ точки O, какъ центра, радіусомъ, равнымъ b, и въ главной плоскости ACA′ опишемъ дугу круга, которая пересѣчетъ главный эллипсъ въ D и E; проведемъ діаметры OD и OE; тогда двѣ діаметральныя плоскости BOD, BOE пересѣкутъ эллипсоидъ по кругамъ. Отсюда заключаемъ, что *эллипсоидъ съ тремя неравными осями имѣетъ два ряда круговыхъ сѣченій.*

Фиг. 294.



Если эллипсоидъ будетъ эллипсоидъ вращенія, то обѣ плоскости BOD, BOE сольются съ главною плоскостію, перпендикулярною къ оси вращенія, т. е. съ экваторомъ поверхности. Въ этомъ случаѣ будетъ только одинъ рядъ круговыхъ сѣченій.

О существованіи круговыхъ сѣченій можно судить по уравненію эллипсоида, представленному въ видѣ

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}-1=x^2\left(\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}\right)-z^2\left(\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}\right);$$

Если черезъ $\frac{1}{m^2}$ и $\frac{1}{n^2}$ означимъ положительныя количества $\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}$ и $\frac{1}{c^2}-\frac{1}{b^2}$, то уравненіе будетъ

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}-1=\left(\frac{x}{m}+\frac{z}{n}\right)\left(\frac{x}{m}-\frac{z}{n}\right).$$

Пересѣченіе поверхности плоскостію $\frac{x}{m}+\frac{z}{n}=\alpha$, гдѣ α есть произвольное постоянное, находится на шарѣ

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}-1=\alpha\left(\frac{x}{m}-\frac{z}{n}\right);$$

такимъ образомъ получаемъ первый рядъ круговыхъ сѣченій. Плоскость $\frac{x}{m}-\frac{z}{n}=\beta$ опредѣляетъ второй рядъ круговыхъ сѣченій.

Изъ предъидущаго уравненія видно, что квадратъ касательной, проведенной изъ какой-нибудь точки эллипсоида къ шару $x^2+y^2+z^2=b^2$, находится въ постоянномъ отношеніи съ произведеніемъ разстояній этой точки отъ двухъ діаметральныхъ плоскостей $\frac{x^2}{m^2}-\frac{z^2}{n^2}=0$, которыя называются *круговыми плоскостями*.

Касательная плоскость.

519. Уравненіе касательной плоскости, проведенной къ эллипсоиду въ точкѣ (x', y', z') есть

$$\frac{xx'}{a^2}+\frac{yy'}{b^2}+\frac{zz'}{c^2}=1.$$

Это уравненіе можно представить въ другомъ видѣ, который очень полезно знать. Представимъ касательную плоскость уравненіемъ

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=l,$$

гдѣ α, β, γ суть косинусы угловъ, которые нормаль, проведенная къ плоскости, образуетъ съ осями, а l разстояніе плоскости отъ начала координатъ. Сравнивъ эти два уравненія, получимъ соотношенія

$$\frac{\frac{x'}{a}}{a\alpha}=\frac{\frac{y'}{b}}{b\beta}=\frac{\frac{z'}{c}}{c\gamma}=\frac{1}{l}=\frac{1}{\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2}};$$

опредѣливъ величину l, уравненіе касательной плоскости будетъ

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2}. \tag{6}$$

Для примѣра разсмотримъ три касательныя плоскости, перпендикулярныя между собой

$$\alpha x+\beta y+\gamma z=\sqrt{a^2\alpha^2+b^2\beta^2+c^2\gamma^2},$$
$$\alpha' x+\beta' y+\gamma' z=\sqrt{a^2\alpha'^2+b^2\beta'^2+c^2\gamma'^2},$$
$$\alpha'' x+\beta'' y+\gamma'' z=\sqrt{a^2\alpha''^2+b^2\beta''^2+c^2\gamma''^2},$$

гдѣ девять косинусовъ удовлетворяютъ соотношеніямъ § 421. Возвысивъ эти уравненія въ квадратъ и сложивъ, получимъ уравненіе

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2 + b^2 + c^2;$$

откуда заключаемъ, что *геометрическое мѣсто вершинъ трегранниковъ прямоугольныхъ, вписанныхъ въ эллипсоидъ, есть шаръ.*

ГЛАВА IV.

Гиперболоиды.

Разсмотримъ теперь случай, когда три корня уравненія относительно S не имѣютъ одинаковыхъ знаковъ; положимъ, напримѣръ, что два корня S и S′ будутъ положительны, а третій отрицательный.

Конусъ.

520. Если постоянный членъ H будетъ нуль, то уравненіе

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 = 0,$$

будучи однородно относительно x, y, z, выразитъ конусъ (§ 464). Если положимъ

$$\operatorname{tang} \alpha = \sqrt{\frac{-S''}{S}},\ \operatorname{tang} \beta = \sqrt{\frac{-S''}{S'}},$$

то уравненіе будетъ вида

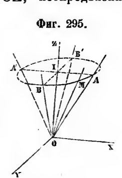
$$(1) \qquad \frac{x^2}{\operatorname{tang}^2 \alpha} + \frac{y^2}{\operatorname{tang}^2 \beta} - z^2 = 0.$$

Главная плоскость XOZ пересѣкаетъ поверхность по двумъ прямымъ OA, OA′, образующимъ съ OZ уголъ равный α; главная плоскость YOZ по двумъ прямымъ OB, OB′, образующимъ съ OZ уголъ равный β (*фиг.* 295). Главная плоскость XOY пересѣкаетъ поверхность только въ одной точкѣ. Всякая плоскость, параллельная плоскости XOY, даетъ въ сѣченіи эллипсъ ABA′, уравненіе котораго есть

$$\frac{x^2}{\operatorname{tang}^2 \alpha} + \frac{y^2}{\operatorname{tang}^2 \beta} = z^2;$$

этотъ эллипсъ, центръ котораго I находится на оси OZ, неопредѣленно увеличивается, по мѣрѣ того какъ сѣкущая плоскость отдаляется отъ вершины. Такимъ образомъ можно разсматривать, что конусъ образуется прямой, которая вращается около точки O, перемѣщаясь по эллипсу ABA′. Положивъ, что S болѣе S′, а слѣдовательно, α менѣе z, увидимъ, что уголъ, составляемый образующею OM съ осью OZ, измѣняется отъ α до β. Конусъ состоитъ изъ двухъ равныхъ полостей, расположенныхъ по обѣ стороны вершины. Такъ какъ уравненіе конусовъ втораго порядка приводится къ виду (1), то отсюда слѣдуетъ, что всякой конусъ втораго порядка можно разсматривать, какъ прямой конусъ съ эллиптическимъ основаніемъ. Плоскости, перпендикулярныя къ каждымъ двумъ другимъ осямъ OX и OY, пересѣкаютъ конусъ по гиперболамъ, центры которыхъ находятся на этихъ осяхъ. Три оси координатъ суть оси конуса; одна, OZ, находится внутри конуса, двѣ другія снаружи. Относительно каждой изъ этихъ осей какая-нибудя точка конуса имѣетъ ей симетричную на другой полости; относительно первой оси точка имѣетъ ей симетричную на той же полости.

Фиг. 295.



Если $S = S'$, или $\alpha = \beta$, то конусъ будетъ конусомъ вращенія около прямой OZ.

Гиперболоидъ объ одной полости.

521. Положимъ, что постоянный членъ H есть величина положительная и

$$a = \sqrt{\frac{H}{S}},\ b = \sqrt{\frac{H}{S'}},\ c = \sqrt{\frac{H}{-S''}};$$

тогда уравненіе поверхности будетъ имѣть видъ

$$(2) \qquad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

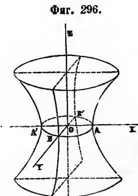
Главная плоскость XOY пересѣкаетъ поверхность по эллипсу ABA′ (*фиг.* 296); главная плоскость XOZ по гиперболѣ, поперечная ось которой есть AA′, а OZ мнимая; главная плоскость YOZ пересѣкаетъ поверхность точно также по гиперболѣ, поперечная ось которой есть BB′, а OZ

мнимая ось. Если пересѣчемъ поверхность плоскостями, параллельными плоскости XOY, то получимъ подобные эллипсы

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1+\frac{z^2}{c^2},$$

центры которыхъ находятся на OZ; эти эллипсы неопредѣленно увеличиваются, по мѣрѣ того какъ сѣкущая плоскость отдаляется отъ главной плоскости въ обѣ стороны; наименьшій эллипсъ ABA′, опредѣляемый главною плоскостію, называется *горжевымъ эллипсомъ*. Отсюда видно, что поверхность состоитъ изъ одной непрерывной полости, которая простирается неопредѣленно, расширяясь болѣе и болѣе съ каждой стороны плоскости горжеваго эллипса. Поверхность эта называется *гиперболоидомъ объ одной полости*.

Фиг. 296.



Плоскости, параллельныя плоскости XOZ, пересѣкаютъ поверхность по подобнымъ гиперболамъ, центры которыхъ находятся на OY; точно также плоскости, параллельныя YOZ, пересѣкаютъ поверхность по подобнымъ гиперболамъ, центры которыхъ находятся на OX. Отсюда слѣдуетъ, что гиперболоидъ объ одной полости имѣетъ три оси; двѣ дѣйствительныя AA′ и BB′ и одну мнимую OZ. Двѣ дѣйствительныя оси суть оси горжеваго эллипса; мнимая ось OZ находится внутри поверхности.

Если двѣ дѣйствительныя оси будутъ равны, то сѣченія, параллельныя плоскости XOY, будутъ круги, а поверхность будетъ поверхностью вращенія; она образуется гиперболою, которая вращается около ея мнимой оси OZ.

Гиперболоидъ о двухъ полостяхъ.

522. Разсмотримъ наконецъ случай, когда постоянный членъ H будетъ величина отрицательная; если положимъ

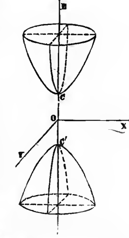
$$a=\sqrt{\frac{-H}{S}},\ b=\sqrt{\frac{-H}{S'}},\ c=\sqrt{\frac{-H}{-S''}};$$

то уравненіе будетъ имѣть видъ

$$(3)\qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-1.$$

Двѣ главныя плоскости XOZ, YOZ пересѣкаютъ поверхность по гиперболамъ, поперечная ось cc' которыхъ равна $2c$ и имѣетъ направленіе по оси OZ (*фиг.* 297). Главная плоскость XOY не пересѣкаетъ поверхность. Сѣченіе, сдѣланное плоскостію, параллельною плоскости XOY, есть эллипсъ

Фиг. 297.



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=\frac{z^2}{c^2}-1;$$

но этотъ эллипсъ будетъ дѣйствительный только тогда, когда абсолютная величина z будетъ больше c; поэтому, если черезъ каждую изъ точекъ C и C' проведемъ плоскость, параллельную плоскости XOY, то мы не получимъ никакой точки геометрическаго мѣста, расположеннаго между этими двумя плоскостями. Если сѣкущая плоскость будетъ удаляться отъ точки C, то эллипсъ, который былъ прежде точкою, будетъ неопредѣленно увеличиваться; и точно также съ другой стороны отъ точки C'. Отсюда видно, что поверхность состоитъ изъ двухъ безконечныхъ полостей, раздѣленныхъ между собой; эта поверхность называется *гиперболоидомъ о двухъ полостяхъ*. Поверхность имѣетъ три оси: одну дѣйствительную CC' и двѣ мнимыя OX и OY.

Если двѣ мнимыя оси $2a$ и $2b$ будутъ равны, то поверхность будетъ поверхность вращенія; она происходитъ отъ обращенія гиперболы около ея поперечной оси CC'.

Асимптотическій конусъ.

523. Гиперболоиды называются *сопряженными*, когда они имѣютъ одинъ и тотъ же центръ и однѣ и тѣ же оси по величинѣ и направленію, и когда дѣйствительныя оси одного гиперболоида будутъ мнимыми осями другаго. Ясно, что уравненіе

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\pm 1$$

выражаетъ два сопряженные гиперболоида. Сѣкущая плоскость, проведенная черезъ ось OZ, пересѣкаетъ эти двѣ поверхности по гиперболамъ; поперечная ось гиперболы, расположенной на гиперболоидѣ о двухъ по-

лостяхъ, есть линія CC′; гипербола, расположенная на гиперболоидѣ объ одной полости, имѣетъ поперечною осью діаметръ, по которому сѣкущая плоскость пересѣкаетъ горжевый эллипсъ. Пусть $y = mx$ будетъ уравненіе сѣкущей плоскости; тогда уравненіе

Фиг. 298.

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{m^2x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = \pm 1,$$

которое получается отъ исключенія y, опредѣлитъ проекціи кривыхъ пересѣченія на плоскость XOZ; эти кривыя проекціи суть сопряженныя гиперболы, общія асимптоты которыхъ суть двѣ прямыя, выражаемыя уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{m^2x^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Если къ этому уравненію прибавимъ уравненіе сѣкущей плоскости $y = mx$, то получимъ асимптоты гиперболъ въ пространствѣ. Представимъ дѣйствительно, что сѣкущая плоскость обращается около оси OZ, тогда эти асимптоты опишутъ конусъ, который мы будемъ называть *асимптотическимъ конусомъ* гиперболоидовъ. Исключивъ перемѣнный параметръ m изъ двухъ предъидущихъ уравненій, получимъ уравненіе этого конуса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Такимъ образомъ, два сопряженные гиперболоида имѣютъ одинъ и тотъ же асимптотическій конусъ. Гиперболоидъ о двухъ полостяхъ расположенъ внутри конуса; гиперболоидъ объ одной полости снаружи (*фиг.* 298).

Вообще асимптотическій конусъ есть геометрическое мѣсто асимптотъ всѣхъ гиперболъ, получаемыхъ въ сѣченіи съ двухъ поверхностей плоскостями, проходящими черезъ центръ. Дѣйствительно, пусть $z = mx + ny$ будетъ уравненіе сѣкущей плоскости; тогда кривыя пересѣченія будутъ имѣть проекціями на плоскость XOY

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(mx + ny)^2}{c^2} = \pm 1;$$

асимптоты выразятся уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{(mx + ny)^2}{c^2} = 0,$$

вмѣстѣ съ уравненіемъ сѣкущей плоскости. Изъ этихъ двухъ уравненій можно въ одно время исключить два перемѣнные параметра m и n, и мы получимъ асимптотическій конусъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0.$$

Замѣтимъ, что если гипербола будетъ отнесена къ ея осямъ и если въ уравненіи отбросимъ постоянный членъ, то получимъ асимптотическій конусъ; а если перемѣнимъ знакъ у этого постояннаго члена, то получимъ сопряженный гиперболоидъ. Изъ формулъ преобразованія координатъ видно, что это же свойство будетъ имѣть мѣсто и въ томъ случаѣ, когда поверхность будетъ отнесена къ какимъ-нибудь осямъ координатъ, проходящимъ черезъ центръ.

Плоскія сѣченія.

524. Разсмотримъ поверхности, выражаемыя уравненіемъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=\lambda, \tag{4}$$

въ которомъ λ означаетъ произвольный параметръ. Если этому параметру дадимъ величины ± 1 или 0, то получимъ два сопряженные гиперболоида и ихъ асимптотическій конусъ. Если эти поверхности пересѣчемъ одною и тою же плоскостію

$$\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z=l,$$

то уравненіе проекцій кривыхъ пересѣченія на плоскость XOY будетъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{(l-\mathrm{A}x-\mathrm{B}y)^2}{c^2\mathrm{C}^2}=\lambda;$$

такъ какъ параметръ λ входитъ только въ постоянный членъ, то отсюда слѣдуетъ, что проекціи кривыхъ, а слѣдовательно, кривыя въ пространствѣ подобны; потому что это суть сѣченія подобныхъ цилиндровъ параллельными плоскостями (§ 482); кромѣ того, онѣ концентричны, если онѣ имѣютъ центръ; если это будутъ параболы, то онѣ будутъ имѣть одинъ и тотъ же параметръ, и, слѣдовательно, будутъ равны.

525. Отсюда слѣдуетъ, что для опредѣленія рода сѣченія гиперболоида плоскостію P, достаточно разсмотрѣть сѣченіе асимптотическаго ко-

нуса тою же плоскостію. Кромѣ того извѣстно, что параллельныя сѣченія подобны.

Черезъ центръ проведемъ въ точкѣ P параллельную плоскость P; здѣсь надо различать три случая: 1) Если плоскость P′ будетъ пересѣкать конусъ только въ одной точкѣ, то одна полость этого конуса будетъ расположена по одну сторону этой плоскости, другая по другую сторону; очевидно, что параллельная плоскость P пересѣчетъ всѣ прямыя одной и той же полости и, слѣдовательно, опредѣлитъ на конусѣ сомкнутую кривую, которая будетъ эллипсъ; сѣченія, сдѣланныя той же плоскостію въ гиперболоидахъ, будутъ также эллипсы. 2) Если плоскость P′ будетъ пересѣкать конусъ по двумъ прямымъ, то каждую изъ полостей она раздѣлитъ на двѣ части, расположенныя по обѣ стороны этой плоскости; параллельная плоскость P пересѣчетъ часть каждой полости, которая съ плоскостію P находится по одну сторону плоскости P′, и, слѣдовательно, пересѣчетъ конусъ по двумъ отдѣльнымъ вѣтвямъ, составляющимъ гиперболу. Если образующая конуса будетъ приближаться къ одной изъ образующихъ, находящихся въ плоскости P′, то она будетъ параллельна плоскости P и точка пересѣченія удалится въ безконечность; слѣдовательно, асимптоты гиперболы будутъ параллельны прямымъ, расположеннымъ въ плоскости P′. 3) Наконецъ, если плоскость P′ будетъ касательная къ асимптотическому конусу, то одна изъ полостей будетъ расположена вся съ одной стороны этой плоскости, другая полость — съ другой стороны, исключая ребро соприкосновенія, которое находится въ плоскости. Въ этомъ случаѣ плоскость, параллельная P, пересѣчетъ только ту полость, которая находится съ плоскостію P по одной сторонѣ плоскости P′ и пересѣчетъ ее по безконечной вѣтви, т. е. по параболѣ.

Діаметральныя плоскости и діаметры.

526. Если будемъ разсматривать поверхности, выражаемыя уравненіемъ (4), то діаметральная плоскость, сопряженная прямой

$$\frac{x}{\alpha}=\frac{y}{\beta}=\frac{z}{\gamma} \tag{5}$$

выразится уравненіемъ

$$\frac{\alpha x}{a^2}+\frac{\beta y}{b^2}-\frac{\gamma z}{c^2}=0. \tag{6}$$

Эта плоскость есть одна и та же въ двухъ гиперболоидахъ и въ асимп-

тотическомъ конусѣ; это можно было знать á priori. Дѣйствительно, разсмотримъ сѣкущую, которая пересѣкаетъ конусъ въ двухъ точкахъ; плоскость, проведенная черезъ эту сѣкущую и центръ, пересѣкаетъ конусъ по асимптотамъ гиперболъ, опредѣляемыхъ этою плоскостію въ гиперболоидахъ; такъ какъ части этой сѣкущей, заключающіяся между гиперболами и асимптотами, равны, то отсюда заключаемъ, что хорды имѣютъ одну и ту же средину.

527. Родъ сѣченія, опредѣляемаго діаметральною плоскостію, зависитъ отъ направленія хордъ. Черезъ центръ проведемъ линію, параллельную хордамъ; если эта прямая будетъ находиться внутри асимптотическаго конуса, то очевидно, что всякая сѣкущая пересѣчетъ обѣ полости конуса и, слѣдовательно, средина будетъ находиться между двумя полостями; такъ какъ всѣ точки діаметральной плоскости находятся между двумя полостями, то она пересѣкаетъ конусъ въ точкѣ. Такъ какъ гиперболоидъ объ одной полости находится снаружи асимптотическаго конуса, то онъ пересѣкается діаметральною плоскостію по дѣйствительному эллипсу; этотъ эллипсъ есть кривая соприкосновенія цилиндра, образующія котораго параллельны сѣкущимъ и который описанъ около гиперболоида; этотъ цилиндръ находится внутри гиперболоида. Такъ какъ гиперболоидъ о двухъ полостяхъ находится внутри асимптотическаго конуса, то діаметральная плоскость не пересѣкаетъ поверхности; въ этомъ случаѣ ни одна изъ сѣкущихъ не будетъ касательною, и мы не получимъ цилиндра, описаннаго около этого направленія.

Если прямая, проведенная черезъ центръ, будетъ находиться внѣ асимптотическаго конуса, то параллельная, пересѣкая конусъ, пересѣчетъ одну и ту же полость въ двухъ точкахъ и, слѣдовательно, средина будетъ находиться внутри конуса; діаметральная плоскость, находящаяся внутри конуса, пересѣчетъ этотъ конусъ по двумъ прямымъ и, слѣдовательно, пересѣчетъ гиперболоидъ по сопряженнымъ гиперболамъ. Каждая изъ этихъ гиперболъ будетъ кривая прикосновенія описаннаго цилиндра, ребра котораго параллельны данному направленію.

528. Есть случай, въ которомъ не бываетъ діаметральной плоскости; это будетъ тогда, когда прямая, проведенная черезъ центръ, будетъ принадлежать асимптотическому конусу; въ этомъ случаѣ всякая параллельная линія пересѣкаетъ поверхность только въ одной точкѣ и средина будетъ находиться въ безконечности. Однако, уравненіе (6) выражаетъ также плоскость, проходящую черезъ центръ; это есть предѣльное положеніе, къ которому приближается діаметральная плоскость, когда прямая (5) бо-

лѣе и болѣе приближается къ конусу. Уравненіе касательной плоскости къ конусу въ точкѣ (x, y, z) есть

$$\frac{xX}{a^2}+\frac{yY}{b^2}-\frac{zZ}{c^2}=0;$$

если точка прикосновенія будетъ принадлежать прямой (5), то это уравненіе будетъ

$$\frac{\alpha X}{a^2}+\frac{\beta Y}{b^2}-\frac{\gamma Z}{c^2}=0.$$

Это есть уравненіе (6); такимъ образомъ, когда сѣкущія будутъ параллельны ребру асимптотическаго конуса, то плоскость (6) совпадетъ съ касательною плоскостію къ конусу, по направленію этого ребра.

529. Такъ какъ сѣченія, сдѣланныя въ гиперболоидахъ и въ асимптотическомъ конусѣ одною и тою же плоскостію, концентричны, то геометрическое мѣсто центровъ параллельныхъ сѣченій будетъ одинаково какъ въ гиперболоидахъ, такъ и въ конусѣ; но очевидно, что въ слѣдствіи подобія въ конусѣ это геометрическое мѣсто будетъ прямая, проходящая черезъ вершину конуса.

Если сѣченія будутъ эллипсы, то геометрическое мѣсто центровъ или діаметръ, находясь внутри конуса, пересѣчетъ гиперболоидъ о двухъ полостяхъ, но не пересѣчетъ гиперболоидъ объ одной полости. Если сѣченія будутъ гиперболы, то діаметръ, находясь внѣ конуса, пересѣчетъ, наоборотъ, гиперболоидъ объ одной полости, но не пересѣчетъ гиперболоидъ о двухъ полостяхъ. Систему трехъ сопряженныхъ діаметровъ гиперболоида объ одной полости мы получимъ, взявъ какой-нибудь діаметръ и въ сопряженной діаметральной плоскости два сопряженные діаметра сѣченія. Очевидно, что два изъ этихъ трехъ сопряженныхъ діаметровъ OD, OE всегда дѣйствительны, а третій OF — мнимый. Дѣйствительно, если первый діаметръ будетъ дѣйствительный, то діаметральная плоскость, какъ было сказано (§ 527), пересѣчетъ поверхность по гиперболѣ, въ которой второй діаметръ будетъ дѣйствительный, третій мнимый. Если, наоборотъ, первый діаметръ будетъ мнимый, то діаметральная плоскость пересѣчетъ поверхность по дѣйствительному эллипсу, въ которомъ оба сопряженные діаметра будутъ дѣйствительные. Уравненіе поверхности, отнесенной къ ея сопряженнымъ діаметрамъ, будетъ имѣть видъ

$$\frac{x'^2}{a'^2}+\frac{y'^2}{b'^2}-\frac{z'^2}{c'^2}=1.$$

Два сопряженные гиперболоида, имѣющіе одинъ и тотъ же діаметръ для

одного и того же ряда сѣкущихъ плоскостей, имѣютъ однѣ и тѣ же системы сопряженныхъ діаметровъ; только одинъ діаметръ, дѣйствительный въ одномъ гиперболоидѣ, будетъ мнимымъ въ другомъ, такъ что въ гиперболоидѣ о двухъ полостяхъ изъ трехъ сопряженныхъ діаметровъ два всегда мнимые и одинъ дѣйствительный. Чтобы составить системы сопряженныхъ діаметровъ, мы провели черезъ центръ первую прямую произвольно; но надобно, чтобы эта прямая не принадлежала асимптотическому конусу.

530. Теперь легко дополнить сказанное о плоскихъ сѣченіяхъ въ гиперболоидахъ. Вообразимъ, что поверхность отнесена къ системѣ сопряженныхъ діаметральныхъ плоскостей, изъ которыхъ одна была бы параллельна сѣкущей плоскости; тогда уравненіе будетъ имѣть видъ

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=\pm 1.$$

Разсмотримъ сперва гиперболоидъ объ одной полости. Если сѣкущая плоскость будетъ параллельна плоскости DOE, то сѣченіе будетъ эллипсъ

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1+\frac{z^2}{c'^2}$$

всегда дѣйствительный, центръ котораго находится на мнимомъ діаметрѣ OF и который неопредѣленно увеличивается, по мѣрѣ того, какъ сѣкущая плоскость удаляется отъ діаметральной плоскости. Если сѣкущая плоскость будетъ параллельна плоскости EOF, то сѣченіе будетъ гипербола.

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1-\frac{x^2}{a'^2},$$

центръ которой находится на дѣйствительномъ діаметрѣ OD и асимптоты которой параллельны асимптотамъ гиперболы, опредѣляемой діаметральною плоскостію $x=0$; эта гипербола имѣетъ также два сопряженные діаметра соотвѣтственно параллельные OE и OF. При измѣненіи x отъ 0 до a', дѣйствительный діаметръ становится параллельнымъ OE и уменьшается отъ b' до 0; при $x=a'$ гипербола обратится въ двѣ прямыя, проходящія черезъ точку D, а плоскость обратится въ касательную къ поверхности въ точкѣ D. Когда x возрастаетъ отъ a', дѣйствительный діаметръ будетъ наоборотъ параллеленъ OF и уменьшается отъ нуль до безконечности; гипербола перемѣнитъ расположеніе; прежде она была расположена въ углахъ асимптотъ, которыя заключаютъ діаметръ OE; теперь она пойдетъ въ углахъ дополнительныхъ.

531. Разсмотримъ теперь гиперболоидъ о двухъ полостяхъ. Сѣченія параллельныя плоскости DOE будутъ эллипсы.

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} = \frac{z^2}{c'^2} - 1,$$

центры которыхъ находятся на дѣйствительномъ діаметрѣ OF; при измѣненіи z отъ 0 до c', эллипсъ будетъ мнимый; при $z = c'$, онъ обратится въ точку; если z возрастаетъ начиная отъ c', то эллипсъ будетъ дѣйствительный и неопредѣленно увеличивается. Сѣченія, параллельныя плоскости EOF, суть гиперболы

$$\frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = -1 - \frac{x^2}{a'^2},$$

дѣйствительный діаметръ которыхъ всегда параллеленъ OF и неопредѣленно увеличивается. Эта гипербола имѣетъ всегда одинаковое расположеніе.

532. До сихъ поръ мы говорили только объ эллиптическихъ и гиперболическихъ сѣченіяхъ. Предъидущее преобразованіе не можетъ быть болѣе выполнено, когда сѣкущая плоскость будетъ параллельна касательной плоскости, проведенной къ асимптотическому конусу; въ этомъ случаѣ сѣченіе будетъ парабола, равная той параболѣ, которую опредѣляетъ сѣкущая плоскость на асимптотическомъ конусѣ, и очевидно, что въ слѣдствіе подобія параметръ параболы, происходящей отъ пересѣченія конуса плоскостію, увеличивается пропорціонально разстоянію этой плоскости отъ центра.

Чтобы опредѣлить положеніе кривой, возьмемъ уравненіе гиперболоида въ болѣе простомъ видѣ. Возьмемъ за ось y ребро, по которому касательная плоскость къ асимптотическому конусу касается этого конуса (*фиг.* 299); за ось z другое ребро асимптотическаго конуса, а за ось x діаметръ сопряженной плоскости YOZ; тогда уравненіе гиперболоидовъ будетъ имѣть видъ

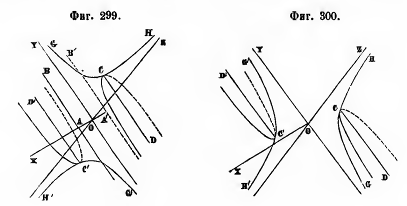
$$(7) \qquad Ax^2 + Byz = \pm 1;$$

потому что оно не должно содержать члена первой степени и если сдѣлаемъ $x = 0$, то должны получить уравненіе гиперболы, отнесенной къ ея асимптотамъ. Можно всегда положить, что два постоянныя A и B суть величины положительныя. Поверхность будетъ гиперболоидъ объ одной полости или о двухъ полостяхъ, смотря по тому, будетъ ли вторая

часть положительная или отрицательная, потому что плоскость $z = 0$ въ первомъ случаѣ пересѣкаетъ поверхность, а во второмъ случаѣ не пересѣкаетъ. Сѣченіе двухъ поверхностей плоскостію YOZ суть сопряженныя гиперболы. Уравненіе асимптотическаго конуса есть

$$Ax^2 + Byz = 0;$$

это уравненіе показываетъ, что плоскости XOY и XOZ касаются конуса по ребрамъ OY и OZ. Если поверхность будетъ гиперболоидъ объ одной полости, то она пересѣкается плоскостію $z = 0$ по направленію двухъ прямыхъ AB, A′B′ параллельныхъ OY (*фиг.* 299); всякая параллельная плоскость $z=\gamma$ пересѣкаетъ поверхность по параболѣ $Ax^2 + B\gamma y = 1$, діаметръ которой есть слѣдъ CD сѣкущей плоскости на плоскость YOZ. Конецъ C этого діаметра принадлежитъ гиперболѣ GH, G′H′, по которой плоскость YOZ



Фиг. 299. Фиг. 300.

пересѣкаетъ поверхность. Направленіе діаметра измѣняется съ знакомъ γ. Сѣченія, сдѣланныя въ гиперболоидѣ объ одной полости плоскостями $z = \pm\gamma$, имѣетъ расположеніе показанное на фиг. 299. Если двѣ сѣкущія плоскости приближаются къ плоскости XOY, то точки C и C′ удаляются неопредѣленно по двумъ вѣтвямъ гиперболы CG C′G′, и обѣ параболы приближаются къ системѣ двухъ параллельныхъ прямыхъ AB, A′B′.

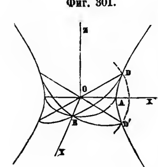
Если поверхность будетъ гиперболоидъ о двухъ полостяхъ, то плоскость $z = 0$ не пересѣчетъ поверхность, и обѣ параболы, опредѣляемыя плоскостями $z = \pm\gamma$, будутъ имѣть расположеніе, показанное на фиг. 300. Если γ приближается къ нулю, то обѣ параболы удаляются въ безконечность.

Круговыя сѣченія.

533. Разсмотримъ сперва гиперболоидъ объ одной полости. Въ слѣдствіе разсужденій, сдѣланныхъ относительно эллипсоида (§ 518), увидимъ, что діаметральная плоскость, которая пересѣкаетъ гиперболоидъ по кругу, должна проходить черезъ одну изъ дѣйствительныхъ осей поверхности.

Если плоскость BOD (*фиг.* 301), проведенная черезъ ось OB, будетъ пересѣкать поверхность по эллипсу, то одна изъ осей эллипса будетъ OB, другая будетъ слѣдъ сѣкущей плоскости на плоскость XOZ; но линія OD болѣе OA; чтобы OD было равно OB, необходимо, чтобы OB было больше OA. Такимъ образомъ, сѣкущая плоскость пройдетъ черезъ наибольшую ось OB горжеваго эллипса. Изъ точки O, какъ центра, радіусомъ, равнымъ OB, опишемъ въ плоскости XOZ кругъ, который пересѣчетъ гиперболу въ двухъ точкахъ D, D′; двѣ плоскости BOD, BOD′ пересѣкутъ гиперболоидъ по двумъ кругамъ.

Фиг. 301.



Всякая плоскость, параллельная одной изъ этихъ плоскостей, пересѣчетъ данный гиперболоидъ, асимптотическій конусъ и сопряженный гиперболоидъ по кругамъ. Если поверхность будетъ поверхность вращенія, то оба ряда круговыхъ сѣченій сольются и будутъ перпендикулярны къ оси вращенія.

Какъ было уже замѣчено относительно эллипса (§ 518), существованіе круговыхъ сѣченій можно видѣть изъ самаго уравненія. Разсмотримъ въ частности конусъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0;$$

представимъ это уравненіе въ видѣ

$$\frac{x^2+y^2+z^2}{b^2}=z^2\left(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\right)-x^2\left(\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}\right);$$

означивъ черезъ $\frac{1}{m^2}$ и $\frac{1}{n^2}$ положительныя количества $\frac{1}{a^2}-\frac{1}{b^2}$ и $\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$, увидимъ, что плоскости $\frac{z}{n}-\frac{x}{m}=\alpha$ и $\frac{z}{n}+\frac{x}{m}=\beta$ даютъ два ряда кру-

говыхъ сѣченій; тогда уравненіе покажетъ, что произведеніе синусовъ угловъ, образуемыхъ какимъ-нибудь ребромъ конуса съ двумя круговыми плоскостями $\frac{x^2}{m^2} - \frac{z^2}{n^2} = 0$, есть величина постоянная.

Черезъ центръ проведемъ плоскость, которая пересѣчетъ конусъ по двумъ ребрамъ OM, OM′, а круговыя плоскости по двумъ прямымъ OP, OQ; означимъ черезъ α и β углы, образуемые ребромъ OM съ круговыми плоскостями, черезъ α' и β' углы, образуемые ребромъ OM′ съ тѣми же плоскостями; кромѣ того черезъ γ и δ назовемъ углы сѣкущей плоскости съ круговыми плоскостями; тогда получимъ

$$\sin\alpha = \sin \mathrm{MOP} \sin\gamma,\ \sin\beta = \sin \mathrm{MOQ} \sin\delta$$
$$\sin\alpha' = \sin \mathrm{M'OP} \sin\gamma,\ \sin\beta' = \sin \mathrm{M'OQ} \sin\delta;$$

изъ уравненія $\sin\alpha \sin\beta = \sin\alpha' \sin\beta'$ находимъ

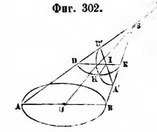
$$\sin \mathrm{MOP} \sin \mathrm{MOQ} = \sin \mathrm{M'OP} \sin \mathrm{M'OQ}.$$

Отсюда видно, что углы MOP, M′OQ равны.

Такимъ образомъ, *если сѣкущая плоскость, проведенная черезъ центръ, пересѣкаетъ конусъ по двумъ ребрамъ, то эти ребра составляютъ съ слѣдами сѣкущей плоскости, на круговыя плоскости, равные углы.* Если плоскость будетъ касательная, то ребро прикосновенія составляетъ равные углы съ слѣдами касательной плоскости на круговыя плоскости.

534. Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что всякій конусъ втораго порядка можно разсматривать двоякимъ образомъ, какъ наклонный конусъ съ круговымъ основаніемъ. Если будетъ данъ наклонный конусъ съ круговымъ основаніемъ, то легко доказать геометрически существованіе втораго ряда круговыхъ сѣченій. Пусть S будетъ вершина наклоннаго конуса, имѣющаго основаніемъ кругъ AB (*фиг.* 302); черезъ прямую SO, соединяющую вершину съ центромъ O основанія, проведемъ плоскость ASB перпендикулярную къ плоскости основанія; такъ какъ всякая плоскость, параллельная основанію, пересѣкаетъ конусъ по кругу, діаметръ котораго есть слѣдъ сѣкущей плоскости на плоскость ASB, то отсюда слѣдуетъ, что эта плоскость ASB дѣлитъ конусъ на двѣ симетричныя части; слѣдовательно, это есть главная плоскость, и система двухъ прямыхъ SA

Фиг. 302.



и SB есть соотвѣтствующее главное сѣченіе. Проведемъ въ главной плоскости ASB линію $B'A'$ непараллельную AB, т. е. такую, чтобы уголъ $SA'B'$ былъ равенъ SAB; потомъ черезъ прямую $A'B'$ проведемъ плоскость, перпендикулярную къ главной плоскости ASB; тогда сѣченіе конуса этою плоскостію будетъ кругъ $B'HA'$. Дѣйствительно, черезъ какую-нибудь точку H кривой $B'HA'$ проведемъ плоскость, параллельную основанію; эта плоскость пересѣкаетъ конусъ по кругу, а плоскость $B'HA'$ по линіи HI, перпендикулярной къ главному сѣченію. Въ кругѣ DHE мы имѣемъ $HI^2 = DI \cdot IE$; съ другой стороны изъ подобныхъ треугольниковъ DIB', EIA' находимъ $DI.IE = B'I.IA'$; слѣдовательно, $HI^2 = B'I.IA'$; поэтому точка H есть точка круга, описаннаго на $B'A'$, какъ на діаметрѣ. Сѣченія, параллельныя $B'HA'$ называются непараллельными основаніямъ.

Линія, дѣлящая уголъ ASB пополамъ, есть внутренняя ось конуса; линія, дѣлящая дополнительный уголъ пополамъ, есть вторая ось; перперпендикуляръ, проведенный изъ вершины S къ главной плоскости ASB, есть третья ось. Такимъ образомъ мы опредѣлимъ три оси и три главныя плоскости конуса.

Прямолинейныя образующія гиперболоида объ одной полости.

535. Мы видѣли (§ 427), что если прямая имѣетъ болѣе двухъ точекъ на поверхности втораго порядка, то она вся находится на поверхности. Въ слѣдствіе этого понятно, что нельзя помѣстить на эллипсоидѣ часть дѣйствительной прямой, какъ бы она ни была мала; дѣйствительно, если эта часть прямой имѣла бы только три общія точки съ поверхностію, то неопредѣленная прямая была бы расположена вся на поверхности, и очевидно, что неопредѣленная прямая не можетъ принадлежать ограниченной поверхности, какъ эллипсоидъ. Невозможно также помѣстить прямую на гиперболоидѣ о двухъ полостяхъ; замѣтимъ прежде, что эта прямая не можетъ быть перпендикулярна къ дѣйствительной оси, такъ какъ всѣ сѣченія, перпендикулярныя къ этой прямой, суть эллипсы; поэтому прямая будетъ идти отъ одной полости къ другой, и средняя часть не будетъ принадлежать поверхности. Въ гиперболоидѣ объ одной полости, такой невозможности не существуетъ. При изученіи плоскихъ сѣченій (§ 530) мы видѣли, что если сѣкущая плоскость, проведенная черезъ точку поверхности, будетъ параллельна діаметральной плоскости, сопряженной діаметру, проходящему черезъ эту точку, то сѣченіе будетъ двѣ прямыя.

Отсюда слѣдуетъ, что черезъ всякую точку поверхности проходятъ двѣ прямыя, расположенныя всѣ на поверхности. Мы разсмотримъ свойства прямыхъ, расположенныхъ на гиперболоидѣ объ одной полости; но прежде мы докажемъ основную теорему.

536. Пусть M будетъ какая-нибудь точка поверхности; за ось x возьмемъ діаметръ, который проходитъ черезъ эту точку; за оси y и z два сопряженные діаметра соотвѣтствующаго діаметральнаго сѣченія; тогда уравненіе гиперболоида будетъ вида

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=1.$$

Если поверхность пересѣчемъ плоскостію $x=a'$, то получимъ двѣ прямыя

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=0.$$

Такимъ образомъ, *черезъ всякую точку* M *поверхности проходятъ двѣ прямыя, расположенныя на поверхности.*

Мы замѣтили (§ 490), что касательныя ко всѣмъ кривымъ, проведеннымъ черезъ одну точку на поверхности второй степени, находятся въ одной и той же плоскости; исключеніе составляетъ вершина конуса. Черезъ точку M проходятъ двѣ прямыя, находящіяся на поверхности; поэтому плоскость этихъ двухъ прямыхъ есть касательная плоскость. Черезъ точку M невозможно провести третью прямую, которая находилась бы на поверхности; потому что эта прямая заключалась бы также въ касательной плоскости $x=a'$, а эта плоскость пересѣкаетъ поверхность только по двумъ прямымъ.

Замѣтимъ также, что поверхность пересѣкается касательною плоскостію; одна часть находится съ одной стороны этой плоскости, другая съ другой.

537. Принимая ту же систему координатъ, уравненіе асимптотическаго конуса будетъ

$$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=0;$$

если конусъ пересѣчемъ плоскостію $x=0$, то получимъ два ребра

$$\frac{y^2}{b'^2}-\frac{z^2}{c'^2}=0.$$

Эти два ребра соотвѣтственно параллельны двумъ прямымъ, опредѣляемымъ плоскостію $x = a'$ на поверхности гиперболоида.

Такимъ образомъ, *прямыя, расположенныя на гиперболоидѣ, соотвѣтственно параллельны ребрамъ асимптотическаго конуса.*

Если поверхность пересѣчемъ плоскостію $y = -a'$, то получимъ двѣ прямыя, параллельныя предъидущимъ линіямъ; такимъ образомъ прямыя, которыя проходятъ черезъ двѣ точки M и M′, симметричныя относительно центра, соотвѣтственно параллельны между собой и тѣмъ же ребрамъ асимптотическаго конуса.

538. Мы покажемъ, что прямыя, расположенныя на гиперболоидѣ, можно раздѣлить на два ряда, изъ которыхъ каждый составляетъ всю поверхность. Это раздѣленіе и положеніе прямыхъ удобно опредѣляютъ съ помощію горжеваго эллипса.

Фиг. 303.

Такъ какъ черезъ каждую точку поверхности проходятъ двѣ прямыя, то ясно, что черезъ каждую точку D горжеваго эллипса проходятъ двѣ прямыя DG, DH расположенныя на поверхности (*фиг.* 303).

Если, принимая за ось z мнимую ось поверхности, за ось x возьмемъ діаметръ OD горжеваго эллипса, а за ось y сопряженный діаметръ OE, то уравненіе гиперболоида будетъ

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 1.$$

Плоскость $x = a'$, проведенная черезъ точку D параллельно плоскости ZOE, имѣетъ слѣдомъ на плоскости горжеваго эллипса касательную къ этому эллипсу; эта плоскость пересѣкаетъ гиперболоидъ по двумъ прямымъ

$$\frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 0,$$

которыя проектируются на плоскость горжеваго эллипса по касательной ST. Такимъ образомъ, *всякая касательная, проведенная къ горжевому эллипсу, есть проекція двухъ прямыхъ, расположенныхъ на гиперболоидѣ.*

Уравненіе асимптотическаго конуса есть

$$\frac{x^2}{a'^2} + \frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c'^2} = 0;$$

плоскостію $x = 0$ онъ пересѣкается по двумъ прямымъ OG_1, OH_1, уравненія которыхъ суть

$$\frac{y^2}{b'^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0,$$

и которыя соотвѣтственно параллельны двумъ прямымъ DG, DH, расположеннымъ на гиперболоидѣ. Такъ какъ обѣ оси кординатъ OE, OZ перпендикулярны, то изъ предъидущаго слѣдуетъ, что прямыя DG, DH составляютъ съ плоскостію горжеваго эллипса или съ линіею, проведенною черезъ точку D параллельно оси OZ, равные углы; если черезъ γ назовемъ этотъ послѣдній уголъ, то получимъ

$$\operatorname{tg} \gamma = \frac{b'}{c}.$$

539. Представимъ себѣ, что точка D двигается по горжевому эллипсу въ направленіи AB; тогда всѣ прямыя, внѣшнія части которыхъ надъ плоскостію горжеваго эллипса составляютъ съ касательными, взятыми по направленію движенія, острые углы, образуютъ первую систему; всѣ тѣ прямыя, внѣшнія части которыхъ составляютъ съ этою же касательною тупые углы, образуютъ вторую систему. Такимъ образомъ прямая DG принадлежитъ первой системѣ, прямая DH второй. Ясно, что эти двѣ системы, по нашему опредѣленію, содержатъ всѣ прямыя, расположенныя на поверхности. Замѣтимъ прежде, что какая-нибудь прямая, находящаяся на поверхности, не параллельна плоскости горжеваго эллипса; потому что сѣченія, параллельныя этой плоскости, суть эллипсы; слѣдовательно, эта прямая пересѣчетъ плоскость въ точкѣ D эллипса; но черезъ точку D проходятъ только двѣ прямыя DG, DH, изъ которыхъ одна принадлежитъ первой системѣ, другая второй; слѣдовательно, разсматриваемая прямая совпадетъ съ одной изъ этихъ двухъ прямыхъ.

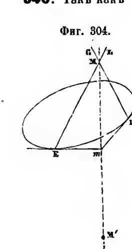
Если въ то же время, какъ точка D двигается по эллипсу, уголъ γ будетъ измѣняться по формулѣ $\operatorname{tang} \gamma = \frac{b'}{c'}$, то прямая DG послѣдовательно совпадаетъ съ прямыми первой системы, прямая HD совсѣми прямыми второй системы. Очевидно, что каждая изъ нихъ образуетъ цѣлую поверхность гиперболоида. Такимъ образомъ гиперболоидъ объ одной полости есть прямолинейная поверхность, которая можетъ быть образована двоякимъ движеніемъ прямой линіи. Вотъ почему прямыя каждой системы называются *прямолинейными, образующими* гиперболоида.

Разсмотримъ измѣненіе угла γ. Этотъ уголъ имѣетъ наименьшую величину тогда, когда прямая проходитъ черезъ одинъ изъ концевъ B боль-

шей оси горжеваго эллипса; наибольшая же величина его будетъ тогда, когда эта прямая проходитъ черезъ одинъ изъ концевъ A малой оси. При перемѣщеніи точки D отъ B къ A, уголъ γ возрастаетъ отъ наименьшей его величины до наибольшей; потомъ этотъ уголъ уменьшается и снова увеличивается и т. д. Если $a = b$, т. е. если горжевой эллипсъ будетъ кругъ, то уголъ γ будетъ постоянный и каждая изъ двухъ прямыхъ DG, DH, обращаясь около OZ, образуетъ поверхность; это есть гиперболоидъ вращенія объ одной полости, который мы уже разсматривали, какъ примѣръ поверхностей вращенія (§ 469).

540. Такъ какъ каждая изъ движущихся прямыхъ образуетъ полную поверхность, то очевидно, что *одна изъ двухъ прямыхъ, которыя проходятъ черезъ какую-нибудь точку поверхности, принадлежитъ къ первой системѣ образующихъ; другая къ другой системѣ.* Впрочемъ, въ этомъ легко убѣдиться, построивъ эти двѣ прямыя помощію горжеваго эллипса. Пусть M будетъ точка поверхности, которая, положимъ, находится надъ плоскостію горжеваго эллипса (*фиг.* 304); эта точка проектируется на эту плоскость въ точкѣ m внѣ эллипса; черезъ точку m проведемъ касательныя mD, mE къ эллипсу; черезъ точку прикосновенія D первой касасательной проведемъ прямую DG первой системы и черезъ точку прикосновенія E второй касательной прямую EL второй системы. Проектирующія плоскости GDm, LEm этихъ двухъ прямыхъ пересѣкаются по прямой MM′ перпендикулярной къ плоскости горжеваго эллипса; этотъ перпендикуляръ, возставленый изъ точки m, пересѣкаетъ поверхность въ двухъ точкахъ, изъ которыхъ одна есть точка, находящаяся надъ плоскостію эллипса, другая есть симметричная точка M′, находящаяся подъ поверхностію. Прямая DG, образующая съ Dm острый уголъ, пересѣкаетъ внѣшнюю часть mM прямой MM′ и проходитъ черезъ точку M, потому что эта внѣшняя часть пересѣкаетъ поверхность только въ одной точкѣ. Точно также прямая EL, образующая съ продолженіемъ mE тупой уголъ, или съ Em острый уголъ, пересѣкаетъ внѣшнюю часть mM той же прямой въ той же точкѣ M. Такимъ образомъ черезъ точку M проходятъ двѣ прямыя MD, ME, изъ которыхъ одна принадлежитъ первой системѣ, другая второй.

Фиг. 304.



541. Мы видѣли (§ 538), что прямолинейныя образующія поверхности проектируются на плоскость горжеваго эллипса по касательнымъ къ этому эллипсу. То же самое свойство имѣетъ мѣсто относительно каждой изъ главныхъ плоскостей.

Разсмотримъ главную плоскость OCA, проведенную черезъ мнимую ось OG и черезъ одну изъ осей OA горжеваго эллипса (*фиг.* 305). По предъидущему докажемъ, что касательная MD_1 въ точкѣ M къ главной гиперболѣ есть проекція двухъ прямыхъ MD, MD′ расположенныхъ на поверхности. Если точка M удаляется по гиперболѣ въ безконечность, то касательная D_1M приближается къ асимптотѣ OH_1; эта асимптота есть проекція двухъ прямыхъ BH, BH′, проходящихъ черезъ концы другой оси горжеваго эллипса. Другая ассимптота OG_1 есть проекція прямыхъ BG, B′G′, проходящихъ черезъ эти точки.

Фиг. 305.

542. Прямолинейныя образующія гиперболоида имѣютъ нѣкоторыя другія замѣчательныя свойства, которыя мы докажемъ. Пусть DG, EL (*фиг.* 306) будутъ двѣ образующія различныхъ системъ; эти прямыя проектируются на плоскость горжеваго эллипса по касательнымъ Dm. Em къ этому эллипсу; вообще обѣ касательныя пересѣкаются въ точкѣ m, а обѣ проектирующія плоскости пересѣкаются по прямой MM′, перпендикулярной къ плоскости эллипса. Какъ было сказано выше, обѣ прямыя DG, EL, принадлежащія къ различнымъ системамъ, пересѣкаютъ перпендикуляръ MM′ съ одной стороны плоскости горжеваго эллипса, а слѣдовательно пересѣкаются въ точкѣ M, въ которой этотъ перпендикуляръ пересѣкаетъ поверхность. Такимъ образомъ вообще двѣ образующія различныхъ системъ пересѣкаются.

Фиг. 306.

Можетъ случиться, что проекціи двухъ прямыхъ будутъ параллельны; это будетъ тогда, когда обѣ прямыя, какъ напримѣръ DG, D′H′, проходятъ черезъ двѣ діаметрально противоположныя точки D и D′ горжеваго эллипса. Въ этомъ случаѣ обѣ проектирующія плоскости параллельны; параллельная плоскость, проведенная черезъ центръ, пересѣчетъ конусъ по двумъ

ребрамъ OG_1, OH_1; очевидно, что обѣ образующія DG, $D'H'$, параллельны одному и тому же ребру OG_1 асимптотическаго косинуса, а слѣдовательно, параллельны между собой. Отсюда заключаемъ, *что двѣ образующія различныхъ системъ пересѣкаются или параллельны*, т. е. всегда *находятся въ одной пласкости.*

543. Разсмотримъ теперь двѣ образующія DG, EK одной и той же системы. Проектирующія плоскости этихъ двухъ прямыхъ пересѣкаются по прямой MM', перпендикулярной къ плоскости горжеваго эллипса. Прямая DG, образующая съ своею проекціею Dm острый уголъ, пересѣкаетъ прямую MM' надъ плоскостію горжеваго эллипса; прямая EK, образующая съ продолженіемъ mE острый уголъ, пересѣкаетъ эту же прямую подъ плоскостію; плоскость DMM', содержащая первую прямую DG и точку M' второй, не содержитъ этой второй прямой; такимъ образомъ, обѣ прямыя не находятся въ одной и той же плоскости.

Можетъ случиться, что проекціи будутъ параллельны. Пусть DG, $D'G'$ будутъ двѣ прямыя одной и той же системы, проходящія черезъ двѣ діаметрально противоположныя точки горжеваго эллипса; эти двѣ прямыя соотвѣтственно параллельны двумъ ребрамъ OG_1, OH_1 асимптотическаго конуса; плоскость GDD', содержащая первую прямую и точку D' второй не содержитъ этой второй прямой; такимъ образомъ, обѣ прямыя не находятся въ одной и той же плоскости. Отсюда заключаемъ, что *двѣ образующія одной и той же системы никогда не находятся въ одной и той же плоскости.*

544. Каждое ребро OG_1 асимптотическаго конуса параллельно двумъ образующимъ DG, $D'H'$ различныхъ системъ; мы получимъ ихъ слѣдующимъ образомъ. Пусть OF будетъ слѣдъ плоскости ZOG_1 на плоскость горжеваго эллипса; проведемъ діаметръ DD' сопряженный OF; такъ какъ касательныя въ точкахъ D и D' параллельны OF, то касательныя плоскости GDH, $G'D'H'$ въ этихъ точкахъ параллельны плоскости ZOG_1, которая пересѣкаетъ конусъ по двумъ ребрамъ OG_1, OH_1; обѣ образующія DG $D'H'$ различныхъ системъ параллельны OG_1; двѣ другія образующія DH, $D'G'$ параллельны OH_1. Невозможно, чтобы третья образующая гиперболоида была параллельна ребру OG_1; потому что, если бы три образующія гиперболоида были параллельны одному и тому же ребру конуса, то двѣ принадлежали бы одной и той же системѣ и были бы параллельны между собой, — чего не можетъ быть.

Такъ какъ діаметръ OD есть сопряженный плоскости ZOF или G_1OH_1, то извѣстно (§ 532), что плоскость DOG' касается конуса по ребру OG'

Такимъ образомъ, плоскость двухъ параллельныхъ образующихъ DG, D'H', касается асимптотическаго конуса.

Замѣтимъ еще, что три образующія одной и той же системы не могутъ быть параллельны одной и той же плоскости; дѣйствительно, проведя черезъ центръ линіи, параллельныя этимъ образующимъ, получимъ три различныя ребра асимптотическаго конуса, расположенныя въ одной и той же плоскости, — что невозможно.

545. Помощію предъидущаго мы можемъ различать двѣ системы образующихъ другимъ способомъ. Пусть DH будетъ какая-нибудь прямая, находящаяся на поверхности; всѣ прямыя, какъ напримѣръ DG, EK..., которыя пересѣкаютъ эту данную прямую, съ прямою D'G', которая ей параллельна, составляютъ одну изъ системъ, напримѣръ, первую систему. Всѣ другія составляютъ вторую систему.

546. Мы знаемъ, что для опредѣленія движенія прямой линіи нужно три управляющія (§ 460). Возьмемъ за управляющія три опредѣленныя прямыя A, B, C, принадлежащія второй системѣ, и положимъ, что движущаяся прямая скользитъ по этимъ тремъ управляющимъ; если черезъ какую-нибудь точку M прямой A и черезъ каждую изъ прямыхъ B и C проведемъ плоскость, то пересѣченіе этихъ двухъ плоскостей опредѣлитъ положеніе движущейся прямой, которая проходитъ черезъ эту точку; движущаяся прямая, совпадая такимъ образомъ послѣдовательно съ всѣми прямыми первой системы, образуетъ гиперболоидъ объ одной полости. Точно также движущаяся прямая, скользя по тремъ даннымъ прямымъ, принадлежащимъ къ первой системѣ, образуетъ гиперболоидъ.

547. Мы докажемъ на оборотъ, что движущаяся прямая, которая перемѣщается по какимъ-нибудь тремъ опредѣленнымъ прямымъ, не параллельнымъ одной и той же плоскости, образуетъ гиперболоидъ. Пусть AB, CD, EF будутъ три данныя управляющія. Если черезъ каждую изъ нихъ проведемъ плоскость параллельно одной изъ двухъ другихъ, то получимъ шесть плоскостей, которыя образуютъ параллелепипедъ. За начало координатъ возьмемъ центръ параллелепипеда, а за оси координатъ возьмемъ линіи, параллельныя ребрамъ, величины которыхъ означимъ черезъ

Фиг. 307.

$2a$, $2b$, $2c$. Уравненія трехъ управляющихъ, какъ онѣ представлены на фиг. 307, суть

$$AB \begin{cases} y = -b \\ z = c, \end{cases} \quad CD \begin{cases} z = -c, \\ x = a, \end{cases} \quad EF \begin{cases} x = -a, \\ y = b. \end{cases}$$

Прямую MN, пересѣкающую двѣ прямыя AB, CD, можно разсматривать какъ пересѣченіе двухъ плоскостей, изъ которыхъ одна проведена черезъ прямую AB, другая черезъ прямую CD; эти двѣ плоскости выражаются уравненіями вида

$$(8) \qquad \begin{cases} z - c - \lambda\,(y + b) = 0, \\ z + c - \lambda'\,(x - a) = 0, \end{cases}$$

гдѣ λ и λ' означаютъ произвольные параметры. Такъ какъ прямая MN должна пересѣкать третью управляющую EF, то отсюда находимъ соотношеніе между двумя параметрами λ и λ'

$$(9) \qquad \lambda' a + \lambda b + c = 0.$$

Исключивъ изъ уравненій (8) и (9) два параметра λ и λ', получимъ уравненіе поверхности, образуемой прямою MN

$$(10) \qquad ayz + bzx + cxy + abc = 0.$$

Геометрическое мѣсто есть поверхность втораго порядка, имѣющая только одинъ центръ; это не есть конусъ, потому что она не проходитъ черезъ центръ; слѣдовательно, это есть гиперболоидъ объ одной полости.

Такъ какъ три управляющія принадлежатъ поверхности, то три оси координатъ, которыя имъ параллельны, суть ребра асимптотическаго конуса. Замѣтимъ, что три ребра AC, DE, BF, которыя въ параллелепипедѣ параллельны и противоположны директрисамъ, принадлежатъ также поверхности; напримѣръ, прямая AC, которая пересѣкаетъ обѣ директрисы AB и CD и которая параллельна EF, есть частное положеніе образующей и, слѣдовательно, принадлежитъ поверхности. Отсюда слѣдуетъ, что параллельныя грани ABF, CDE параллелепипеда касаются поверхности въ точкахъ B и D и точно также другія. Три управляющія и три противоположныя ребра составляютъ неразгибающійся шестиугольникъ ACDEFBA, расположенный на поверхности.

548. Данъ гиперболоидъ объ одной полости; пусть AB и CD будутъ двѣ какія-нибудь прямыя одной и той же системы (*фиг.* 304); A непо-

движная точка, взятая произвольно на первой прямой; C соотвѣтствующая точка второй, т. е. точка, въ которой эта вторая прямая пересѣкается движущеюся образующей второй системы, при переходѣ черезъ точку A. Помощію прямой EF первой системы, которая параллельна AC, можно составить параллелепипедъ, который разсматривали прежде. Движущаяся прямая въ одномъ изъ своихъ положеній пересѣкаетъ двѣ другія неподвижныя въ точкахъ M и N; на этихъ двухъ прямыхъ она описываетъ, начиная отъ ея первоначальнаго положенія AC, линіи AM и CN, которыя мы означимъ черезъ α и β, принимая ихъ со знакомъ $+$, когда онѣ откладываются по направленіямъ AB или CD, и со знакомъ $-$, когда онѣ откладываются по противоположнымъ направленіямъ. Если будемъ проектировать прямую MNP на плоскость ABF параллельно прямой EF, то проекція линіи CN будетъ ея величина по направленію AN'. Взявъ за оси координатъ прямыя AB и AD' и выразивъ, что движущаяся прямая MN' обращается около неподвижной точки F, получимъ уравненіе

(11) $$\frac{2a}{\alpha} + \frac{2b}{\beta} = 1.$$

Обратно, если движущаяся прямая MN описываетъ на двухъ неподвижныхъ прямыхъ AB, CD, начиная отъ первоначальнаго положенія, линіи, удовлетворяющія уравненію (11), то эта прямая образуетъ гиперболоидъ объ одной полости. Дѣйствительно, пусть AC будетъ первоначальное положеніе образующей; черезъ точку A проведемъ линію AD' параллельно прямой CD, составимъ параллелограммъ AD'FB, стороны котораго AB и AD' равны $2a$ и $2b$, и черезъ точку F проведемъ линію FE параллельно прямой AC. Если AB и AD' возьмемъ за оси координатъ въ плоскости параллелограмма, то уравненіе (11) будетъ выражать, что прямая MN', которая есть проекція прямой MN на плоскость параллелограмма параллельно AC, постоянно проходитъ черезъ точку F; слѣдовательно, прямая MN пересѣкаетъ прямую EF. Эта прямая, перемѣщаясь по тремъ даннымъ прямымъ AB, CD, EF, образуетъ гиперболоидъ объ одной полости.

Изъ сказаннаго въ § 310 видно, что уравненіе (11) выражаетъ, что точки M и N составляютъ на двухъ прямыхъ AB и CD два гомографическія дѣленія. Очевидно á priori, что движущаяся образующая MN гиперболоида опредѣляетъ на двухъ неподвижныхъ прямыхъ AB, CD другой системы два гомографическія дѣленія, потому что точкѣ M одной изъ прямыхъ соотвѣтствуетъ только одна точка N другой системы.

549. Мы сказали, что гиперболоидъ объ одной полости имѣетъ двѣ системы прямолинейныхъ образующихъ. Изъ уравненія поверхности легко вывести уравненія этихъ двухъ системъ прямыхъ. Дѣйствительно, уравненіе гиперболоида, отнесеннаго къ его осямъ, есть

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{x^2}{a^2};$$

такъ какъ каждая часть есть разность двухъ квадратовъ, то это уравненіе можно разложить на производителей первой степени; такимъ образомъ получимъ

$$(12)\qquad \left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=\left(1-\frac{x}{a}\right)\left(1+\frac{x}{a}\right).$$

Разсмотримъ два уравненія первой степени

$$(\lambda)\quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right),\quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

въ которыхъ λ есть произвольный параметръ. Эти уравненія для каждой величины λ выражаютъ прямую. Но если эти два уравненія умножимъ почленно, то получимъ уравненіе (12); отсюда слѣдуетъ, что уравненія (λ) выражаютъ систему прямыхъ, расположенныхъ на поверхности

Если соединить иначе производители, то получимъ два другія уравненія первой степени

$$(\mu)\quad \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\mu\left(1+\frac{x}{a}\right),\quad \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

которыя содержатъ произвольный параметръ μ и которыя выражаютъ вторую систему прямыхъ, расположенныхъ на поверхности.

Параметрамъ λ и μ можно дать величины нуль и безконечность. Если положимъ $\lambda=\frac{m}{n}$, то уравненіе (λ) будутъ вида

$$n\left(\frac{y}{b}-\frac{z}{c}\right)=m\left(1+\frac{x}{a}\right),\ m\left(\frac{y}{b}+\frac{z}{c}\right)=n\left(1-\frac{x}{a}\right);$$

потомъ въ этихъ уравненіяхъ сдѣлаемъ $m=0$ или $n=0$.

Такъ какъ поверхность есть геометрическое мѣсто прямыхъ (λ), то очевидно, что черезъ всякую точку поверхности проходитъ прямая этой системы. Чтобы опредѣлить прямую, проходящую черезъ точку M, координаты которой суть x', y', z', то въ уравненіяхъ (λ) замѣнимъ x, y, z чрезъ x', y', z' и изъ каждаго изъ нихъ опредѣлимъ величину λ. Точно также

черезъ каждую точку поверхности проходитъ прямая второй системы. Эти двѣ прямыя различны; дѣйствительно, для того, чтобы прямыя, выражаемыя уравненіями (λ) и (μ), были однѣ и тѣ же, надобно, чтобы

$$\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{x}{a}\right),$$

при всякой величинѣ x, т. е. чтобы въ одно время $\lambda=\frac{1}{\mu}$, $\lambda=-\frac{1}{\mu}$, что невозможно; отсюда слѣдуетъ, что уравненія (λ) и (μ) выражаютъ всѣ прямыя, расположенныя на гиперболоидѣ съ одной полости.

550. *Линіи, проведенныя черезъ центръ параллельно прямымъ* (λ), *выражаются уравненіями*

(13) $$\frac{y}{b}-\frac{z}{c}=\lambda\frac{x}{a},\ \frac{y}{b}+\frac{z}{c}=-\frac{1}{\lambda}\frac{x}{a};$$

исключивъ параметръ λ, получимъ уравненіе асимптотическаго конуса

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=-\frac{x^2}{a^2}.$$

Линіи, проведенныя черезъ центръ параллельно прямымъ (μ), *выражаются уравненіями*

(14) $$\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=\mu\frac{x}{a},\ \frac{y}{b}-\frac{z}{c}=-\frac{1}{\mu}\frac{x}{a};$$

исключивъ изъ нихъ параметръ μ, получимъ также уравненіе асимптотическаго конуса. Сверхъ того очевидно, что двѣ системы параллельныхъ линій совпадаютъ; въ самомъ дѣлѣ, если μ дадимъ величину $-\frac{1}{\lambda}$, то уравненія (14) будутъ одинаковы съ уравненіями (13). Такимъ образомъ прямыя той и другой системы соотвѣтственно параллельны ребрамъ асимптотическаго конуса.

551. Теперь мы покажемъ, что прямыя, выражаемыя уравненіями (λ), составляютъ одну изъ системъ, которыя мы опредѣляли прежде геометрически помощію горжеваго эллипса, и прямыя, выражаемыя уравненіями (μ), составляютъ вторую систему. Для этого достаточно доказать, что всѣ прямыя первой группы пересѣкаетъ опредѣленную прямую второй группы, исключая одной, которая ей параллельна. Разсмотримъ двѣ прямыя, выражаемыя уравненіями (λ) и (μ), когда для λ и μ дадимъ какія-нибудь величины; разсматривая эти четыре уравненія какъ совмѣстныя, получимъ

точку пересѣченія этихъ двухъ прямыхъ; сравнивая первое уравненіе съ четвертымъ, второе съ третьимъ, получимъ два уравненія

$$\lambda\left(1+\frac{x}{a}\right)=\frac{1}{\mu}\left(1-\frac{x}{a}\right),\quad \frac{1}{\lambda}\left(1-\frac{x}{a}\right)=\mu\left(1+\frac{x}{a}\right),$$

которыя приводятся къ одному,

$$x=a\,\frac{1-\lambda\mu}{1+\lambda\mu}.$$

Если знаменатель $1+\lambda\mu$ не будетъ равенъ нулю, но для x, y, z получимъ конечныя величины, удовлетворяющія четыремъ уравненіямъ; слѣдовательно, двѣ прямыя пересѣкутся. Если $1+\lambda\mu=0$, то линіи (13) и (14), проведенныя черезъ центръ параллельно этимъ двумъ прямымъ, совпадутъ, и слѣдовательно прямыя будутъ параллельны.

Общій способъ нахожденія прямыхъ, расположенныхъ на поверхности.

552. Нахожденіе прямолинейныхъ образующихъ поверхностей втораго порядка можно связать съ общимъ способомъ, опредѣляющимъ прямыя, расположенныя на алгебраической поверхности m-го порядка. Пусть

$$x=\alpha z+p,$$
$$y=\beta z+q,$$

будутъ уравненія прямой; если въ уравненіи поверхности замѣнимъ x и y ихъ величинами, то получимъ уравненіе m-ой степени относительно z, которое опредѣляетъ m точекъ пересѣченія прямой съ поверхностію. Чтобы прямая была расположена вся на поверхности, надобно, чтобы это уравненіе обратилось въ тожество; отсюда находимъ $m+1$ соотношеній между четырьмя параметрами α, β, p, q. Вообще невозможно прямую помѣстить на алгебраической поверхности, степень которой болѣе третьей; поверхности третьей степени имѣютъ вообще конечное число прямыхъ, а поверхности втораго порядка безконечное число. Такимъ образомъ, всѣ поверхности втораго порядка можно разсматривать съ точки зрѣнія чисто аналитической какъ прямолинейныя поверхности съ дѣйствительными или мнимыми образующими.

Приложимъ этотъ способъ къ гиперболоиду объ одной полости.

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}-1=0.$$

Уравненіе по z есть

$$\left(\frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}-\frac{1}{c^2}\right)z^2+2\left(\frac{\alpha p}{a^2}+\frac{\beta q}{b^2}\right)z+\left(\frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}-1\right)=0.$$

и мы получимъ три условныя уравненія

(15) $$\begin{cases}\frac{c^2\alpha^2}{a^2}+\frac{c^2\beta^2}{b^2}=1,\ \frac{p^2}{a^2}+\frac{q^2}{b^2}=1,\\ \frac{c\alpha p}{a^2}+\frac{c\beta q}{b^2}=0.\end{cases}$$

Четыре параметра прямой можно выразить посредствомъ одного и тогоже вспомогательнаго перемѣннаго. Уравненія (15) показываютъ, что четыре величины $\frac{c\alpha}{a}$, $\frac{c\beta}{b}$ и p, q суть косинусы угловъ, образуемыхъ въ плоскости двумя директрисами, перпендикулярными между собой, съ двумя прямоугольными осями; по этому положимъ

$$\frac{c\alpha}{a}=\cos\varphi,\qquad \frac{c\beta}{b}=\sin\varphi,$$

$$\frac{p}{a}=\cos\left(\varphi\pm\frac{\pi}{2}\right)\qquad \frac{q}{b}=\sin\left(\varphi\pm\frac{\pi}{2}\right),$$

гдѣ φ есть произвольный уголъ. Такимъ образомъ получимъ двѣ системы прямыхъ

(15) $$\begin{cases}\frac{x}{a}=\frac{z}{c}\cos\varphi\mp\sin\varphi,\\ \frac{y}{b}=\frac{z}{c}\sin\varphi\pm\cos\varphi.\end{cases}$$

Подобное же вычисленіе прилагается къ эллипсоиду и гиперболоиду о двухъ полостяхъ; но тогда прямыя будутъ мнимыя. Замѣтимъ, что чрезъ каждую точку поверхности проходятъ двѣ прямыя, плоскость которыхъ, всегда дѣйствительная, есть касательная.

ГЛАВА V.

Параболоиды.

Поверхности втораго порядка, неимѣющія центра, выражаются уравненіемъ

(1) $$S'y^2+S''z^2+Px=0.$$

Этотъ второй классъ подраздѣляется на два рода, смотря потому будутъ ли имѣть коэффиціенты S′, S″ одинаковые знаки или разные.

Эллиптическій параболоидъ.

553. Разсмотримъ случай, когда оба корня S′ и S″ имѣютъ одинъ и тотъ же знакъ, напримѣръ +. Можно предположить P отрицательнымъ; если положимъ

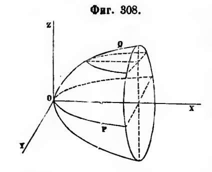
$$2p = -\frac{P}{S'}, \ 2q = -\frac{P}{S''},$$

то уравненіе будетъ

$$(2) \qquad \frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = 2x.$$

Поверхность проходитъ черезъ начало координатъ; сѣченія, сдѣланныя главными плоскостями YOX, ZOX, суть двѣ параболы P и Q, которыя общею осью имѣютъ прямую OX (*фиг.* 308).

Фиг. 308.



Пересѣчемъ поверхность плоскостями, перпендикулярными къ прямой OX. При $x = 0$, сѣченіе будетъ точка O; давая для x величины положительныя, большія и большія, получимъ подобные эллипсы, центръ которыхъ находится на прямой OX и которые неопредѣленно увеличиваются. Плоскости, находящіяся слѣва плоскости YOZ, не пересѣкаютъ поверхности. Такимъ образомъ поверхность состоитъ изъ неопредѣленной полости, которая расположена вся справа плоскости YOZ; эта поверхность называется *эллиптическимъ параболоидомъ*. Прямая OX есть *ось* поверхности; точка O вершина. Сѣченія, сдѣланныя плоскостями, параллельными главной плоскости XOY, суть параболы, равныя параболѣ P, центры которыхъ находятся на параболѣ Q, а оси параллельны OX. Отсюда видно, что поверхность можно разсматривать, какъ образуемую параболою P, которая перемѣщается параллельно самой себѣ, а вершина ея описываетъ параболу Q. Точно также сѣченія, сдѣланныя плоскостями параллельными главной плоскости XOZ, суть параболы, равныя параболѣ Q, и поверхность можно разсматривать какъ образуемую параболою Q, которая перемѣщается параллельно самой себѣ, а вершина ея описываетъ параболу P.

554. Сѣченія поверхности, сдѣланныя плоскостями

$$Ax + By + Cz = l,$$

непараллельными оси, суть эллипсы, проекціи которыхъ на плоскость YOZ имѣютъ уравненіями

$$\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} = \frac{2(l - By - Cz)}{A}.$$

Очевидно, что эти проекціи суть подобные между собой эллипсы, какое бы ни было направленіе сѣкущей плоскости.

Если сѣкущая плоскость $By + Cz = l$ будетъ параллельна оси параболоида, то сѣченіе, проекція котораго на плоскость XOY выражается уравненіемъ

$$\frac{y^2}{p} + \frac{(l - By)^2}{C^2 q} = 2x,$$

будетъ парабола, ось которой параллельна оси параболоида. Такъ какъ параметръ этой параболы не зависитъ отъ l, то ясно, что плоскости, параллельныя оси, пересѣкаютъ поверхность по равнымъ параболамъ.

Разсмотримъ въ частности случай, когда $p = q$; тогда уравненіе поверхности будетъ $y^2 + z^2 = 2px$; сѣченія, сдѣланныя плоскостями, перпендикулярными оси OX, суть круги; слѣдовательно, это есть поверхность вращенія; она образуется параболою P, которая обращается около ея оси OX. Сѣченія, сдѣланныя плоскостями, непараллельными оси, суть эллипсы, проекціи которыхъ на плоскость YOZ суть круги. Сѣченія, сдѣланныя плоскостями, параллельными оси, суть равныя параболы.

Діаметральныя плоскости и діаметры.

555. Діаметральная плоскость, сопряженная прямой

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma},$$

выражается уравненіемъ (§ 491)

$$\frac{\beta y}{p} + \frac{\gamma z}{q} = \alpha; \qquad (3)$$

это есть плоскость, параллельная оси. Эта плоскость пересѣкаетъ поверхность по параболѣ; эта парабола есть кривая соприкосновенія параболоида

и описаннаго цилиндра, обрузующія котораго параллельны хордамъ. Обратно, всякая плоскость, параллельная оси, есть діаметральная плоскость.

Если прямыя будутъ параллельны оси, то каждая изъ нихъ пересѣчетъ поверхность только въ одной точкѣ, и діаметральной плоскости болѣе не будетъ; она удаляется въ безконечность.

Геометрическое мѣсто центра сѣченія, сдѣланнаго плоскостію $Ax+By+Cz=l$, въ которомъ l есть перемѣнный параметръ, выражается уравненіемъ (§ 496)

$$\frac{y}{Bq}=\frac{z}{Cq}=-\frac{1}{A}; \tag{4}$$

это есть прямая, параллельная оси. Другими словами, проекціи параллельныхъ сѣченій на плоскости YOZ суть подобные концентричные эллипсы. Обратно, всякая прямая, параллельная оси, есть діаметръ.

556. Возьмемъ за начало координатъ какую-нибудь точку M поверхности; за ось x діаметръ, проходящій черезъ эту точку, а за плоскость xy какую-нибудь плоскость, проведенную черезъ прямую MX. Эта плоскость пересѣкаетъ поверхность по параболѣ: за ось y мы возьмемъ касательную къ параболѣ въ точкѣ M, а за ось z линію, проведенную черезъ точку M, параллельно сопряженному направленію плоскости XMY. Такъ какъ уравненіе поверхности не содержитъ члена первой степени относительно z, и такъ какъ, при $z=0$, оно должно выражать параболу, отнесенную къ діаметру и къ касательной, проведенной къ концу, то оно приметъ видъ

$$\frac{y^2}{p'}+\frac{z^2}{q'}=2x;$$

оба параметра p' и q' будутъ имѣть одинъ знакъ, напримѣръ $+$, безъ того, чтобы сѣченія, сдѣланныя какими-нибудь плоскостями, были гиперболы. Отсюда видно, что плоскость XMZ есть сопряженная направленію MY. Сѣченія, сдѣланныя плоскости YMZ плоскостями параллельными, суть эллипсы, отнесенные къ двумъ сопряженнымъ діаметрамъ.

Можно получить другимъ способомъ оси координатъ, къ которымъ мы относили поверхность. Разсмотримъ какую-нибудь плоскость, непараллельную оси параболоида; эта плоскость пересѣкаетъ поверхность по эллипсу; чрезъ центръ эллипса проведемъ линію, параллельную оси, до пересѣченія съ поверхностью, и черезъ эту точку проведемъ линіи, параллельныя двумъ сопряженнымъ діаметрамъ эллипса; тогда уравненіе поверхности приведется къ предъидущему виду.

Круговыя сѣченія.

557. Разсмотримъ рядъ параллельныхъ плоскостей, пересѣкающихъ поверхность по кругамъ; центры этихъ круговъ находятся на прямой линіи; плоскость, проведенная чрезъ этотъ діаметръ, перпендикулярно къ плоскостямъ круговъ, раздѣляетъ каждый изъ этихъ круговъ на двѣ симметричныя части; слѣдовательно, это есть главная плоскость. Такимъ образомъ плоскости круговыхъ сѣченій перпендикулярны къ одной изъ главныхъ плоскостей.

Фиг. 309.

Черезъ вершину O (*фиг.* 309) проведемъ плоскость YOX', перпендикулярно къ главной плоскости XOZ; назовемъ чрезъ θ уголъ $X'OX$ и найдемъ уравненіе кривой пересѣченія, относительно двухъ осей OX' и OY, расположенныхъ въ ея плоскости. Пусть x, y, z будутъ координаты точки M сѣкущей плоскости, относительно осей OX, OY, OZ; а x' и y' координаты этой же точки, относительно осей OX' и OY; мы имѣемъ $y = y'$; и

$$x = OQ = OP\cos\theta = x'\cos\theta,\ z = PQ = OP\sin\theta = x'\sin\theta;$$

если эти величины x, y, z внесемъ въ уравненіе поверхности, то получимъ уравненіе кривой пересѣченія

$$\frac{y'^2}{p} + \frac{x'^2\sin^2\theta}{q} = 2x'\cos\theta.$$

Если $\sin\theta = \sqrt{\frac{q}{p}}$, то эта кривая будетъ кругъ. Отсюда заключаемъ, что эллиптическій параболоидъ имѣетъ два ряда круговыхъ сѣченій, которыя перпендикулярны къ главному сѣченію наименьшаго параметра, и которыя одинаково наклонены къ другому главному сѣченію.

Можно также изъ уравненія поверхности узнать о существованіи круговыхъ сѣченій. Для этого достаточно уравненія $\frac{y^2}{p} + \frac{z^2}{q} - 2x = 0$ представить въ видѣ

$$\frac{x^2 + y^2 + z^2}{p} - 2x = \frac{x^2}{q} - z^2\left(\frac{1}{q} - \frac{1}{p}\right).$$

Гиперболическій параболоидъ.

558. Разсмотримъ теперь случай, когда S′ и S″ имѣютъ разные знаки. Допустимъ, что коеффиціентъ P и S″ имѣютъ одинаковые знаки, и положимъ

$$2p = -\frac{P}{S'},\ 2q = \frac{P}{S''};$$

тогда уравненіе будетъ

$$(5) \qquad \frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 2x.$$

Сѣченія, сдѣланныя главными плоскостями XOY, XOZ, суть двѣ параболы P и Q (*фиг.* 310), оси которыхъ имѣютъ обратныя направленія Плоскость ZOY пересѣкаетъ поверхность по двумъ прямымъ OA, OB, образующимъ съ OZ уголъ, тангенсъ котораго равенъ $\sqrt{\frac{p}{q}}$. Сѣченія, сдѣланныя плоскостями, параллельными плоскости YOZ, суть подобныя гиперболы, но расположеніе которыхъ измѣняется; если плоскость будетъ находиться со стороны OX, то дѣйствительная ось гиперболы будетъ параллельна OY; если она будетъ съ другой стороны, то дѣйствительная ось будетъ параллельна OZ. Такимъ образомъ, поверхность состоитъ изъ одной плоскости, которая простирается неопредѣленно справа и слѣва плоскости YOZ; эта поверхность называется *гиперболическимъ параболоидомъ*. Прямая OX есть ось поверхности; точка O вершина.

Фиг. 310.

Сѣченія, сдѣланныя плоскостями, параллельными главной плоскости XOY, суть параболы, равныя параболѣ P, и вершины ихъ находятся на параболѣ Q. Точно также сѣченія, сдѣланныя плоскостями, параллельными главной плоскости ZOX, суть параболы, равныя параболѣ Q, и вершины ихъ лежатъ на параболѣ P; такимъ образомъ можно разсматривать, что поверхность образуется параболою, которая перемѣщается параллельно ей самой, а вершина описываетъ другую параболу.

559. Сѣченія, сдѣланныя плоскостями

$$Ax + By + Cz = l,$$

непараллельными оси, суть гиперболы, проекціи которыхъ на плоскость YOZ выражаются уравненіемъ

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = \frac{2(l - By - Cz)}{A}.$$

Очевидно, что эти гиперболы будутъ подобны между собой, какое бы ни было положеніе сѣкущей плоскости.

Если сѣкущая плоскость

$$By + Cz = l$$

будетъ параллельна оси параболоида, то сѣченіе, проекція котораго на плоскость XOY выражается уравненіемъ

$$\frac{y^2}{p} = \frac{(l - By)^2}{C^2 q} = 2x,$$

будетъ парабола, ось которой параллельна оси параболоида; параллельныя сѣченія суть равныя параболы. Предъидущее уравненіе можно представить въ видѣ

$$\left(\frac{1}{p} - \frac{B^2}{C^2 q}\right) y^2 + \frac{2Bly}{C^2 q} - \frac{l^2}{C^2 y} = 2x;$$

если $\frac{C}{B} = \pm \sqrt{\frac{p}{q}}$, то это уравненіе обратится въ уравненіе первой степени. Такимъ образомъ есть два ряда плоскостей, изъ которыхъ каждая пересѣкаетъ поверхность по прямой. Плоскости этихъ двухъ рядовъ соотвѣтственно параллельны двумъ плоскостямъ, выраженнымъ уравненіемъ

$$\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 0,$$

и которыя проходятъ черезъ ось OX и каждую изъ прямыхъ OA, OB, по которымъ касательная плоскость въ вершинѣ O пересѣкаетъ поверхность.

Діаметральныя плоскости и діаметры.

560. Діаметральная плоскость, сопряженная направленію

$$\frac{x}{\alpha} = \frac{y}{\beta} = \frac{z}{\gamma}$$

выражается уравненіемъ

(6) $$\frac{\beta y}{p} - \frac{\gamma z}{q} = \alpha;$$

она параллельна оси. Если прямыя будутъ параллельны оси, то онѣ пересѣкутъ поверхность только въ одной точкѣ, и діаметральная плоскость будетъ въ безконечности. Прямая, параллельная одной изъ двухъ плоскостей AOX, BOX, пересѣкаетъ поверхность также только въ одной точкѣ, потому что плоскость, проведенная черезъ прямую, параллельно одной изъ двухъ плоскостей, пересѣкаетъ поверхность по прямой. Если будемъ разсматривать направленіе, параллельное плоскости AOX, но не параллельное оси, то уравненіе (6) выразитъ плоскость, параллельную оси и пересѣкающую поверхность по линіи, параллельной этому направленію.

Всякая плоскость, параллельная оси, есть діаметральная плоскость, исключая того случая, когда плоскость будетъ параллельна одной изъ плоскостей AOX, BOX.

Подобно тому, какъ въ эллиптическомъ параболоидѣ, мы увидимъ, что геометрическое мѣсто центровъ ряда параллельныхъ сѣченій есть прямая, параллельная оси.

561. Если за начало координатъ возьмемъ какую-нибудь точку M поверхности, за ось x діаметръ, проходящій черезъ эту точку, за плоскость xy какую-нибудь плоскость, проведенную черезъ прямую MX; за ось y касательную къ параболѣ въ точкѣ M и за ось z линію, параллельную сопряженному направленію плоскости XMY, то уравненіе будетъ вида

$$\frac{y^2}{p'} - \frac{z^2}{q'} = 2x.$$

Это позволяетъ намъ дополнить ученіе о плоскихъ сѣченіяхъ. Плоскость YMZ пересѣкаетъ поверхность по двумъ прямымъ; плоскости, параллельныя этой плоскости, пересѣкаютъ поверхность по подобнымъ гиперболамъ, но положеніе которыхъ измѣняется, смотря по тому, будетъ ли сѣкущая плоскость находиться съ той или другой стороны плоскости YMZ. Если бы за оси y и z взяли двѣ прямыя, проходящія черезъ точку M, то уравненіе поверхности было бы вида

$$yx = kx.$$

Прямолинейныя образующія гиперболическаго параболоида.

562. Дѣйствительную прямую невозможно помѣстить на эллиптическомъ параболоидѣ. Въ самомъ дѣлѣ, если черезъ эту прямую проведемъ плоскость, то эта плоскость пересѣчетъ поверхность по эллипсу или параболѣ. Въ гиперболическомъ параболоидѣ этой невозможности не существуетъ. Мы видѣли, что всякая плоскость, параллельная одной изъ двухъ плоскостей AOX, BOX, пересѣкаетъ поверхность по прямой. Черезъ какую-нибудь точку M поверхности проведемъ плоскость, параллельную плоскости AOX; эта плоскость пересѣчетъ поверхность по прямой, проходящей черезъ точку M; плоскость, параллельная плоскости BOX, дастъ другую прямую, проходящую также черезъ точку M. Такимъ образомъ, *черезъ всякую точку гиперболическаго параболоида проходятъ двѣ прямыя, расположенныя на поверхности.*

Плоскость этихъ двухъ прямыхъ есть касательная плоскость въ точкѣ M. Черезъ точку M невозможно провести третью прямую, расположенную на поверхности; потому что она находилась бы также въ касательной плоскости, а эта плоскость пересѣкаетъ поверхность только по двумъ прямымъ. Прямыя, расположенныя на поверхности гиперболическаго параболоида, можно раздѣлить на два ряда, изъ которыхъ каждый составляетъ цѣлую поверхность. Первый рядъ состоитъ изъ прямыхъ, параллельныхъ плоскости AOX; второй рядъ изъ прямыхъ, параллельныхъ плоскости BOX; эти двѣ плоскости называются *управляющими плоскостями.* Отсюда слѣдуетъ, что проекціи на плоскость YOZ прямыхъ одной и той же системы параллельны; потому что проектирующія плоскости прямыхъ первой системы параллельны управляющей плоскости AOX, а слѣдовательно, ихъ проекціи параллельны прямой OA. Точно также проекціи прямыхъ второй системы параллельны OB.

Будемъ теперь проектировать прямыя на одну изъ главныхъ плоскостей, напримѣръ на плоскость XOY. Замѣтимъ прежде, что прямая не можетъ быть параллельна этой плоскости, потому что сѣченіе, сдѣланное плоскостью, параллельною плоскости XOY, есть парабола, равная параболѣ P. Прямая пересѣкаетъ главную плоскость въ одной точкѣ параболы P; но поверхность проектируется на эту плоскость внѣ параболы; проекція прямой, проходящей черезъ точку параболы и находящейся внѣ ея, есть касательная къ этой кривой. Такимъ образомъ, *проекціи прямолинейныхъ*

образующихъ на главныя плоскости суть касательны къ главнымъ сѣченіямъ.

Такъ какъ двѣ образующія одной и той же системы находятся въ двухъ плоскостяхъ, параллельныхъ одной и той же управляющей плоскости, и слѣдовательно, параллельныя между собой, то онѣ не могутъ пересѣкаться. Онѣ не параллельны, потому что ихъ проекціи на главную плоскость XOY, будучи касательными къ параболѣ P, не параллельны. Такимъ образомъ, *двѣ прямыя одной и той же системы никогда не находятся въ одной плоскости.*

Разсмотримъ теперь двѣ образующія различныхъ системъ; такъ какъ ихъ проекціи на плоскость YOZ соотвѣтственно параллельны прямымъ OA и OB, то онѣ пересѣкаются; если черезъ точку пересѣченія проекцій проведемъ линію, параллельную оси OX, то эта линія пересѣчетъ поверхность только въ одной точкѣ, и слѣдовательно, пересѣчетъ обѣ данныя прямыя въ одной и той же точкѣ. Отсюда заключаемъ, что *двѣ образующія различныхъ системъ всегда пересѣкаются.*

563. Такъ какъ черезъ каждую точку поверхности проходятъ двѣ прямыя, то ясно, что черезъ каждую точку D главной параболы P (*фиг.* 311) проходятъ двѣ прямыя DG, DH, расположенныя на поверхности. Если за оси координатъ возьмемъ діаметръ DX′, касательную DS къ главной параболѣ и перпендикуляръ DZ′ къ главной плоскости, и если черезъ θ означимъ уголъ SDX′, то уравненіе поверхности будетъ (§ 212).

Фиг. 311.

$$\frac{y'^2 \sin^2\theta}{p} - \frac{z'^2}{q} = 2x'.$$

Плоскость Z′DS имѣетъ слѣдомъ на главной плоскости касательную ST къ главной параболѣ; эта плоскость $x' = 0$ пересѣкаетъ поверхность по двумъ прямымъ DG, DH, выражаемымъ уравненіемъ

$$\frac{y'^2 \sin^2\theta}{p} - \frac{z'^2}{q} = 0,$$

и которыя проектируются на главную плоскость по касательной ST. Обѣ прямыя DG, DH образуютъ равные углы съ главною плоскостью или съ перпендикуляромъ DZ′, проведеннымъ къ этой плоскости; если черезъ γ означимъ этотъ послѣдній уголъ, то получимъ

$$\operatorname{tang}\gamma = \sqrt{\frac{p}{q}} \cdot \frac{1}{\sin\theta}.$$

Если точка M двигается отъ вершины O по главной параболѣ P, то уголъ γ, который образуютъ двѣ прямыя DG и DH съ перпендикуляромъ DZ′, будетъ болѣе и болѣе увеличиваться и приближаться къ прямому углу.

Прямыя DH, DG пересѣкаютъ главную плоскость XOZ въ точкахъ H и K, которыя принадлежатъ главной параболѣ Q и находятся на перпендикулярѣ, возставленномъ къ оси OX въ точкѣ, въ которой она пересѣкается касательною DS. Проекціи HO′, KD′ этихъ двухъ прямыхъ на главную плоскость XOZ суть касательныя къ параболѣ Q и проходятъ черезъ точку D′, проекцію точки D. Точка D проектируется въ D″ на плоскость YOZ; точки H и K проектируются въ H″ и K″; соединивъ D″ съ H″, D″ съ K″, получимъ проекціи D″H″, D″G″ двухъ прямыхъ DH, DG на плоскость YOZ. Такъ какъ точки D и H принадлежатъ къ главнымъ параболамъ, то $DD'^2 = 2p \,.\, OD'$, $HT^2 = 2q \,.\, OT$; линіи OD′ и OT равны между собой; слѣдовательно,

$$\frac{OD''}{OH''} = \frac{DD'}{HT} = \sqrt{\frac{p}{q}}.$$

Такимъ образомъ, снова видимъ, что проекція D″H″ прямой DH на плоскость YOZ имѣетъ постоянное направленіе; точно также увидимъ, что проекція K″D″G″ прямой DG имѣетъ постоянное направленіе.

Если точка D будетъ двигаться по главной параболѣ P въ опредѣленномъ направленіи OD, то прямыя, высшія части которыхъ надъ главною плоскостію XOY образуютъ съ касательными, взятыми по направленію движенія, острые углы, пересѣкутъ другую главную плоскость XOZ ниже первой; ихъ проекціи на плоскость YOZ параллельны OA, и эти прямыя составляютъ первую систему образующихъ. Прямыя, высшія части которыхъ образуютъ съ касательными тупые углы, имѣютъ проекціями линіи, параллельныя OB и составляютъ вторую систему.

Такъ какъ двѣ прямыя DD″, HH″ равны и параллельны, то DD″HH″ есть параллелограмъ, и слѣдовательно діагонали DH, D″H″ пересѣкаются пополамъ; такимъ образомъ точка I, въ которой образующая DH пересѣкаетъ плоскость YOZ, есть средина части DH этой прямой, заключающейся между главными плоскостями; слѣдовательно, геометрическое мѣсто точки I есть прямая OA первой системы.

564. Извѣстно, что для опредѣленія движенія прямой, надобно три управляющія. Возьмемъ за директрисы три опредѣленныя прямыя A, B, C, принадлежащія одной изъ системъ, напримѣръ второй; эти прямыя будутъ параллельны второй управляющей плоскости; движущаяся прямая, перемѣщаясь по этимъ тремъ управляющимъ, совпадаетъ послѣдовательно съ каждою изъ прямыхъ первой системы, и слѣдовательно, образуетъ гиперболическій параболоидъ.

Движеніе прямой можно также опредѣлить изъ условія, чтобы она перемѣщалась по двумъ опредѣленнымъ прямымъ и оставалась параллельной опредѣленной плоскости. Если за директрисы возьмемъ двѣ прямыя A и B второй системы, а за опредѣленную плоскость первую управляющую плоскость, то, очевидно, движущаяся прямая совпадаетъ послѣдовательно съ каждою изъ прямыхъ первой системы и образуетъ также параболоидъ.

565. Обратныя заключенія справедливы. Разсмотримъ прежде движущуюся прямую, которая должна перемѣщаться по двумъ опредѣленнымъ прямымъ OZ и AB (*фиг.* 312), оставаясь параллельною одной и той же плоскости. Возьмемъ за ось y частное положеніе OA образующей, за ось z управляющую OZ, за плоскость xy плоскость, параллельную управляющей плоскости, а за плоскость zx плоскость, параллельную прямой AB. Тогда вторая управляющая AB выразится уравненіями $y = b$, $x = az$. Пусть MN будетъ какое-нибудь положеніе образующей; эта прямая, будучи параллельна плоскости XOY и пересѣкая ось OZ, выразится уравненіемъ вида

Фиг. 312.

$$(7) \qquad z = p, \quad y = mx,$$

съ двумя перемѣнными параметрами m и p. Чтобы она пересѣкала вторую управлящую AB, надобно, чтобы удовлетворялось условное уравненіе

$$(8) \qquad amp = b.$$

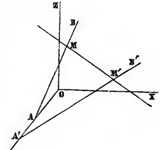
Если изъ уравненій (7) и (8) исключимъ два параметра m и p, то получимъ уравненіе геометрическаго мѣста

$$(9) \qquad ayz - bx = 0.$$

Эта поверхность есть второй степени; она не имѣетъ центра; это не есть параболическій цилиндръ, потому что прямыя OZ и AB, непарал-

лельныя, находятся на поверхности; слѣдовательно, это есть гиперболическій параболоидъ.

566. Разсмотримъ теперь прямую, которая должна перемѣщаться по тремъ опредѣленнымъ прямымъ OZ, AB, A′B′ (*фиг.* 313), параллельнымъ одной и той же плоскости. Возьмемъ за ось z управляющую OZ, за ось y частное положеніе образующей, за плоскость zx плоскость, параллельную тремъ управляющимъ, а въ этой плоскости какую-нибудь прямую, проведенную черезъ точку O, за ось x. Тогда обѣ управляющія AB, A′B′ выразятся уравненіями



Фиг. 313.

$$AB \begin{cases} y = b, \\ z = ax, \end{cases} \qquad A'B' \begin{cases} y = b', \\ z = a'x. \end{cases}$$

Прямую MM′, которая пересѣкаетъ эти двѣ прямыя, можно разсматривать какъ пересѣченіе двухъ плоскостей, изъ которыхъ одна проведена черезъ прямую AB, другая черезъ прямую A′B′; эти двѣ плоскости выражаются уравненіями вида

$$(10) \qquad \begin{aligned} z - ax + \lambda\ (y - b\ ) &= 0, \\ z - a'x + \lambda'\ (y - b') &= 0, \end{aligned}$$

въ которыхъ λ и λ' означаютъ произвольные параметры. Такъ какъ прямая MM′ должна пересѣкать прямую OZ, то между параметрами получимъ соотношеніе

$$(11) \qquad b\lambda = b'\lambda'.$$

Исключивъ изъ этихъ уравненій (10) и (11) два параметра λ и λ', получимъ уравненіе поверхности, образуемой прямою MM′

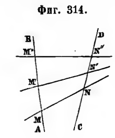
$$(12) \qquad b\,(y - b')\,(z - ax) - b'\,(y - b)\,(z - a'x) = 0.$$

Эта поверхность второй степени; очевидно, что она не имѣетъ центра; сверхъ того, она содержитъ прямыя непараллельныя; слѣдовательно, это есть гиперболическій параболоидъ.

567. Мы нашли (§ 548) соотношеніе, которое существуетъ въ гиперболоидѣ объ одной полости между линіями, описанными на двухъ опредѣленныхъ прямыхъ AB, CD одной изъ системъ движущейся прямой

другой системы. Это соотношеніе болѣе проще для гиперболическаго параболоида. Пусть MN, M′N′, M″N″ (*фиг.* 314) будутъ три какія-нибудь положенія движущейся прямой; если черезъ каждую изъ нихъ проведемъ плоскость, параллельную управляющей плоскости, то получимъ три параллельныя между собой плоскости; но извѣстно, что три параллельныя плоскости опредѣляютъ на двухъ прямыхъ AB, CD пропорціональные отрѣзки; поэтому получимъ соотношеніе

Фиг. 314.



$$\frac{MM''}{NN''}=\frac{MM'}{NN'}$$

Такимъ образомъ, *въ гиперболическомъ параболоидѣ движущаяся прямая одной изъ системъ описываетъ на двухъ опредѣленныхъ прямыхъ другой системы пропорціональныя линіи.*

Обратно, если движущаяся прямая перемѣщается по двумъ опредѣленнымъ прямымъ AB, CD, описывая на этихъ прямыхъ пропорціональныя линіи, то она образуетъ гиперболическій параболоидъ. Пусть MN, M′N′ будутъ два частныя положенія образующей; разсмотримъ плоскость, параллельную этимъ двумъ прямымъ. Пусть теперь M″N″ будетъ какое-нибудь положеніе образующей; тогда получимъ соотношеніе

$$\frac{MM''}{NN''}=\frac{MM'}{NN'}.$$

Если черезъ каждую изъ двухъ прямыхъ MN, M′N′ проведемъ плоскость, параллельную плоскости, опредѣляемой прежде, нежели черезъ точку M″ проведемъ плоскость, параллельную той же плоскости, то получимъ три параллельныя плоскости, которыя опредѣляютъ на двухъ прямыхъ AB, CD пропорціональные отрѣзки. Слѣдовательно, плоскость, проведенная черезъ точку M″, пройдетъ черезъ точку N″ и будетъ содержать прямую M″N″; отсюда заключаемъ, что движущаяся образующая N″M″ остается постоянно параллельною одной и той же плоскости; слѣдовательно, она образуетъ гиперболическій параболоидъ.

568. На этомъ замѣчательномъ свойствѣ основывается устройство нитяныхъ моделей, представляющихъ гиперболическій параболоидъ. Представимъ себѣ деревянный квадратъ ACDB, имѣющій видъ неразгибающагося четыреугольника; если раздѣлимъ двѣ противоположныя стороны AB, CD на одинаковое число равныхъ частей и соединимъ натянутыми

нитками соотвѣтствующія точки дѣленія, то эти нитки представятъ одну изъ системъ прямолинейныхъ образующихъ гиперболическаго параболоида. Если точно также раздѣлимъ двѣ противоположныя стороны AC, BD на одинаковое число равныхъ частей и соотвѣтствующія точки соединимъ нитками, то получимъ вторую систему образующихъ.

Если четыреугольникъ ACDB будетъ плоскій, то нитки будутъ находиться въ плоскости четыреугольника; но если четыреугольникъ преобразуемъ такъ, чтобы сдѣлать его неразгибающимся, то итки не будутъ на ходиться въ одной и той же плоскости и образуютъ гиперболическій параболоидъ; вотъ почему эта поверхность называется *неразгибающейся плоскостью*.

569. Изъ уравненія гиперболическаго параболоида

$$(5)\qquad \frac{y^2}{p}-\frac{z^2}{q}=2x$$

легко вывести уравненія двухъ системъ образующихъ. Дѣйствительно уравненіе (5) можно представить въ видѣ

$$\left(\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}\right)\left(\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}\right)=2x.$$

Два уравненія первой спепени

$$(\lambda)\ \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\lambda,\ \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{2x}{\lambda},$$

въ которыхъ λ есть произвольный параметръ, выражаютъ систему прямыхъ, расположенныхъ на поверхности; дѣйствительно, умноживъ эти два уравненія почленно, снова получимъ уравненіе (5). Два уравненія

$$(\mu)\ \frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=\mu,\ \frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=\frac{2x}{\mu},$$

въ которыхъ μ есть произвольный параметръ, выражаютъ вторую систему прямыхъ, расположенныхъ на поверхности. Очевидно, что черезъ всякую точку поверхности проходятъ двѣ прямыя, по одной изъ каждой системы. Сверхъ того, первое изъ уравненій (λ) показываетъ, что всѣ прямыя первой системы параллельны плоскости $\frac{y}{\sqrt{p}}-\frac{z}{\sqrt{q}}=0$; точно также первое изъ уравненій (μ) показываетъ, что всѣ прямыя второй системы параллельны плоскости $\frac{y}{\sqrt{p}}+\frac{z}{\sqrt{q}}=0$. Такимъ образомъ уравненія (λ) и (μ)

выражаютъ двѣ системы прямолинейныхъ образующихъ гиперболическаго параболоида, такія, какія мы опредѣляли геометрически (§ 562).

570. Замѣтимъ, что если отнесемъ гиперболическій параболоидъ къ его двумъ главнымъ плоскостямъ и касательной плоскости, проведенной къ вершинѣ, то прировнявъ нулю, въ уравненіи поверхности, члены второй степени, получимъ уравненіе $\frac{y^2}{p} - \frac{z^2}{q} = 0$, которое выражаетъ двѣ управляющія плоскости. То же самое будетъ имѣть мѣсто, когда поверхность будетъ отнесена къ какимъ-нибудь осямъ координатъ. Дѣйствительно, если прежде перемѣнимъ направленіе осей, оставляя то же начало координатъ, то часть второй степени въ первомъ уравненіи дастъ часть второй степени въ новомъ уравненіи. Если потомъ перемѣстимъ начало координатъ, сохраняя направленіе осей, то члены второй степени не измѣнятся; слѣдовательно, если приравняемъ нулю совокупность этихъ членовъ, то получимъ плоскости, соотвѣтственно параллельныя двумъ предъидущимъ.

ГЛАВА VI.

Разборъ числовыхъ уравненій второй степени.

Дано числовое уравненіе второй степени; опредѣлить поверхность, выражаемую этимъ уравненіемъ.

Первый способъ.

571. Къ данному уравненію прилагаютъ способъ приведенія, изложенный въ главѣ II; этимъ способомъ опредѣлимъ не только родъ поверхности, но съ точностію опредѣлимъ также ея положеніе и параметры. Если желаемъ только опредѣлить родъ поверхности, то нѣтъ необходимости выполнять всѣ показанныя вычисленія. Сначала составляемъ уравненіе третьей степени, изъ котораго опредѣлимъ S; потомъ надо различать нѣсколько случаевъ.

1-й. Если уравненіе третьей степени не будетъ имѣть никакого корня, то извѣстно, что поверхность будетъ имѣть только одинъ центръ, и уравненіе можетъ быть приведено къ виду (§ 506)

$$Sx^2 + S'y^2 + S''z^2 + F_1 = 0.$$

Для опредѣленія рода поверхности, надо вычислить F_1 и изслѣдовать знаки корней S, S′, S″; эти знаки непосредственно опредѣляются изъ теоремы Декарта. Если уравненіе имѣло бы два равные корня, то поверхность будетъ поверхностью вращенія.

2-й. Если уравненіе третьей степени имѣетъ только одинъ корень, равный нулю, то уравненіе можно привести къ одному изъ двухъ видовъ (§ 509).

$$S'y^2 + S''z^2 + Px = 0,$$
$$S'y^2 + S''z^2 + F_1 = 0.$$

Первое выражаетъ поверхности, неимѣющія центра, а второе выражаетъ поверхности, центры которыхъ суть всѣ точки прямой. Для опредѣленія вида, соотвѣтствующаго данному примѣру, возьмемъ уравненія, которыя опредѣляютъ центръ.

Если эти уравненія будутъ не совмѣстны, то геометрическое мѣсто будетъ или параболоидъ эллиптическій, если S′ и S″ будутъ имѣть одинаковые знаки, или гиперболическій, если S′ и S″ будутъ имѣть обратные знаки. Если геометрическое мѣсто допускаетъ безконечное число центровъ, то это геометрическое мѣсто будетъ цилиндръ, родъ котораго опредѣлимъ сѣченіемъ, непараллельнымъ оси. Если бы два корня S′ и S″ были равны, то поверхность была бы поверхностью вращенія.

3-й. Если уравненіе третьей степени будетъ имѣть два корня, равные нулю, то уравненіе можно привести къ одному изъ видовъ (§ 509)

$$S''z^2 + Px = 0,$$
$$S''z^2 + F_1 = 0.$$

Первое выражаетъ поверхность, неимѣющую центра; второе поверхность, центры которой суть всѣ точки плоскости. Здѣсь точно также беремъ уравненія, опредѣляющія центръ. Если эти уравненія будутъ не совмѣстны, то геометрическое мѣсто будетъ параболическій цилиндръ. Если они приведутся къ одному уравненію, то геометрическое мѣсто будетъ или двѣ параллельныя плоскости, или одна плоскость, или уравненіе не будетъ имѣть дѣйствительнаго рѣшенія; сѣченіе, непараллельное плоскости центровъ, опредѣлитъ родъ геометрическаго мѣста.

Замѣчаніе. При приведеніи, изложенномъ въ главѣ II, предполагаемъ, что первоначальныя оси прямоугольныя. Но очевидно, что если съ помощью двухъ различныхъ системъ осей построимъ геометрическія мѣста, то они будутъ всегда одного и того же рода; однако одна изъ поверхностей

можетъ быть поверхностью вращенія, между тѣмъ какъ другая не будетъ. Такимъ образомъ предъидущія заключенія прилагаются къ системѣ какихъ-нибудь осей.

572. Этотъ разборъ можно представить въ слѣдующей таблицѣ

1-й КЛАССЪ. Уравненіе третьей степени не имѣетъ никакого корня. — Поверхности, имѣющія одинъ центръ.	Три корня съ одинаковымъ знакомъ. — Родъ эллипсоида.	F_1 имѣетъ знакъ, обратный знаку корней.	Эллипсоидъ.
		$F_1 = 0$	Точка.
		F_1 имѣетъ тотъ же знакъ.	Ничего.
	Два корня съ одинаковымъ знакомъ, одинъ съ обратнымъ. — Родъ гиперболоида.	F_1 имѣетъ знакъ, обратный знаку двухъ первыхъ корней.	Гиперболоидъ объ одной полѣ.
		$F_1 = 0$	Конусъ.
		F_1 имѣетъ тотъ же знакъ.	Гиперболоидъ двухъ полахъ.
2-й КЛАССЪ. Уравненіе третьей степени имѣетъ одинъ или два корня, равныхъ нулю. — Поверхности, неимѣющія центра, или съ безконечнымъ числомъ центровъ.	Одинъ только корень, равный нулю и нѣтъ центра. — Родъ параболоида.	Два другіе корня съ одинаковымъ знакомъ.	Эллиптическій параболоидъ.
		Съ обратными знаками.	Гиперболическій параболоидъ.
	Только одинъ корень, равный нулю и безконечное число центровъ на прямой линіи.	Два другіе корня съ одинаковымъ знакомъ.	Эллиптическій цилиндръ. Прямая. Ничего.
		Съ обратными знаками.	Гиперболическій цилиндръ. Двѣ пересѣкающіяся плоскости.
	Два корня равны нулю и нѣтъ центра.	Параболическій цилиндръ.	
	Два корня, равные нулю и безконечное число центровъ въ одной плоскости.	Двѣ параллельныя плоскости. Плоскость. Ничего.	

Примѣръ. Опредѣлить поверхности, выражаемыя уравненіемъ

$$a(x^2+2yz)+b(y^2+2zx)+c(z^2+2xy)=1,$$

въ которыхъ a, b, c означаютъ произвольные параметры.

Какія бы ни были величины параметровъ, начало координатъ будетъ центромъ поверхности; такимъ образомъ это уравненіе выражаетъ только поверхности съ центромъ.

Уравненіе третьей степени, относительно S, будетъ

$$(S-a)(S-b)(S-c)-a^2(S-a)-b^2(S-b)-c^2(S-c)-2abc=0,$$

или

$$S^3-(a+b+c)S^2-(a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab)S+a^3+b^3+c^3-3abc=0.$$

Если для краткости означимъ черезъ m и n двѣ суммы $a+b+c$ и $bc+ca+ab$, то получимъ

$$a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab=m^2-3n,$$
$$a^3+b^3+c^3-3abc=m^3-3mn=m(m^2-3n),$$

и уравненіе, относительно S, будетъ вида

$$S^3-mS^2-(m^2-3n)S+m(m^2-3n)=(S-m[S^2-(m^2-3n)])=0.$$

Величина m^2-3n или $a^2+b^2+c^2-bc-ca-ab$, будучи приравнена

$$\left(a-\frac{b+c}{2}\right)^2+\frac{3}{4}(b-c)^2,$$

никогда не будетъ отрицательною; она обратится въ нуль, когда $a=b=c$. Въ этомъ случаѣ данное уравненіе приведется къ виду

$$(x+y+z)^2=\frac{1}{a};$$

это уравненіе выражаетъ двѣ параллельныя плоскости, дѣйствительныя или мнимыя, смотря по тому, будетъ ли коэффиціентъ a положительный или отрицательный.

Положимъ теперь, что три коэффиціента a, b, c не равны между собой, и означимъ черезъ k^2 положительное количество m^2-3n; тогда три корня уравненія относительно S будутъ m и $\pm k$, и данное уравненіе, помощью преобразованія координатъ, можетъ быть приведено къ виду

$$mx^2+ky^2-kz^2=1.$$

Эта поверхность будетъ гиперболоидъ объ одной или о двухъ полахъ, смотря по тому, будетъ ли m величина положительная или отрицательная. Если этотъ коэффиціентъ будетъ нуль, то уравненіе выразитъ цилиндръ, прямое сѣченіе котораго будетъ равносторонняя гипербола.

Если $m=\pm k$ или $m^2=k^2$, т. е. $n=0$ или $bc+ca+ab=0$, то получимъ гиперболоидъ вращенія. Тогда направленіе оси опредѣлится изъ формулъ (§ 500)

$$a\alpha=b\beta=c\gamma,$$

если три числа a, b, c не будутъ равны нулю; и изъ формулъ

$$\alpha=\frac{\pi}{2},\quad \beta=\gamma,$$

если два коэффиціента b и c будутъ равны нулю. Въ этомъ случаѣ ось вращенія будетъ линія, дѣлящая уголъ YOZ пополамъ.

Второй способъ.

573. Составляемъ уравненія, опредѣляющія центръ поверхности; здѣсь надо различать нѣсколько случаевъ.

1-й. Поверхность имѣетъ только одинъ центръ. Въ этомъ случаѣ, для простоты, перенесемъ оси въ центръ, и тогда уравненіе приведется къ виду

(1) $$Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + F_1 = 0.$$

Если постоянный членъ F_1 будетъ равенъ нулю, то геометрическое мѣсто будетъ одна точка или конусъ. Чтобы изслѣдовать этотъ вопросъ, сдѣлаемъ сѣченіе плоскостью, параллельною одной изъ плоскостей координатъ; если сѣченіе будетъ дѣйствительная кривая, то геометрическое мѣсто будетъ конусъ; если сѣченіе будетъ мнимое, то геометрическое мѣсто будетъ точка.

Разсмотримъ случай, когда постоянный членъ F_1 не равенъ нулю. Положимъ, что уравненіе содержитъ квадраты трехъ перемѣнныхъ; рѣшивъ уравненіе относительно z, и положивъ для краткости

$$M = B'^2 - A''A,\ N = B'B - A''B'',\ P = B^2 - A''A',$$

получимъ

$$A''z = -(B'x + By) \pm \sqrt{Mx^2 + 2Nxy + Py^2 - A''F_1}.$$

Плоскость

(2) $$A''z = -(B'x + By)$$

есть діаметральная плоскость хорды, параллельная OZ. Сѣченіе поверхности этою діаметральною плоскостью проектируется на плоскость XOY по кривой, выражаемой уравненіемъ

(3) $$Mx^2 + 2Nxy + Py^2 - A''F_1 = 0.$$

Эта кривая имѣетъ только одинъ центръ; потому что

$$N^2 - MP = A''D,$$

гдѣ D есть знаменатель или детерминантъ, относящійся къ уравненіямъ центра. Кромѣ того постоянный членъ $A''F_1$ не равенъ нулю.

Положимъ, что геометрическое мѣсто, выражаемое уравненіемъ (3) будетъ родъ эллипса; это геометрическое мѣсто будетъ дѣйствительный или мнимый эллипсъ,—но не точка. Если это геометрическое мѣсто будетъ дѣйствительный эллипсъ, то цилиндръ кривой будетъ начало координатъ и извѣстно, что въ этомъ случаѣ многочленъ $Mx^2 + 2Nxy + Py^2 - A''F_1$ не измѣнитъ знака, когда x и y замѣнимъ координатами внутренней точки (этотъ знакъ есть знакъ члена $- A''F_1$); для внѣшнихъ точекъ много-

членъ имѣетъ обратный знакъ. Если количество — $A''F_1$ будетъ положительное, то всѣ точки поверхности проектируются внутри эллипса; слѣдовательно поверхность будетъ эллипсоидъ. Если величина — $A''F_1$ будетъ отрицательная, то точки поверхности проектируются внѣ эллипса, и мы получимъ гиперболоидъ объ одной полости. Если геометрическое мѣсто будетъ мнимое, то функція $Mx^2 + 2Nxy + Py^2 - A''F_1$ не измѣняетъ знака для всѣхъ точекъ плоскости XOY (этотъ знакъ есть знакъ члена — $A''F_1$) и не обращается въ нуль. Если величина — $A''F_1$ будетъ положительная, то поверхность будетъ состоять изъ двухъ неопредѣленныхъ полостей, раздѣленныхъ діаметральною плоскостью; это есть гиперболоидъ о двухъ полостяхъ; если количество — $A''F_1$ будетъ отрицательное, то уравненіе (1) не будетъ имѣть дѣйствительнаго рѣшенія, потому что z всегда мнимое. Положимъ, что уравненіе (3) выражаетъ геометрическое мѣсто рода гиперболы; такъ какъ членъ — $A''F_1$ не равняется нулю, то геометрическое мѣсто будетъ всегда гипербола, а не система двухъ прямыхъ. Если количество — $A''F_1$ будетъ положительное, то всѣ точки поверхности проектируются между двумя вѣтвями гиперболы; слѣдовательно поверхность будетъ гиперболоидъ объ одной полости. Если величина — $A''F_1$ будетъ отрицательная, то поверхность будетъ гиперболоидъ о двухъ полостяхъ.

Замѣтимъ, что знакъ количества — $A''F_1$ показываетъ, будетъ ли діаметръ OZ дѣйствительный или мнимый. Этотъ діаметръ, въ соединеніи съ двумя сопряженными діаметрами сѣченія, образуетъ систему трехъ сопряженныхъ діаметровъ поверхности, помощью которыхъ можно непосредственно узнать родъ этой поверхности. Положимъ, что діаметральное сѣченіе будетъ дѣйствительный эллипсъ: этотъ эллипсъ допускаетъ два дѣйствительные сопряженные діаметра; если величина — $A''F_1$ будетъ положительная, то, такъ какъ третій діаметръ также дѣйствительный, поверхность будетъ эллипсоидъ; если это количество будетъ отрицательное, то, такъ какъ третій діаметръ мнимый, поверхность будетъ гиперболоидъ объ одной полости. Если сѣченіе будетъ мнимый эллипсъ, то оно допускаетъ два мнимые сопряженные діаметры; если третій діаметръ будетъ дѣйствительный, то геометрическое мѣсто будетъ гиперболоидъ о двухъ полахъ. Положимъ теперь, что сѣченіе будетъ гипербола; одинъ изъ двухъ сопряженныхъ діаметровъ этой гиперболы дѣйствительный, другой мнимый; если третій діаметръ будетъ дѣйствительный, то поверхность будетъ гиперболоидъ объ одной полѣ; если онъ будетъ мнимый, то поверхность будетъ гиперболоидъ о двухъ полахъ.

Замѣтимъ также, что діаметральное сѣченіе есть кривая соприкосновенія цилиндра, описаннаго около поверхности, ребра котораго параллельны оси z.

Если два изъ коеффиціентовъ A, A', A'', напримѣръ A и A', будутъ имѣть разные знаки, то поверхность будетъ гиперболоидъ, потому что сѣченіе, сдѣланное плоскостью $z = 0$, будетъ гипербола.

Положимъ теперь, что одинъ изъ коеффиціентовъ при квадратахъ, напримѣръ A'', будетъ нуль; тогда уравненіе

$$(4) \qquad 2(By + B'x)z + (Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy + F_1) = 0$$

будетъ первой степени относительно z, и всякой системѣ дѣйствительныхъ величинъ x и y будутъ соотвѣтствовать дѣйствительныя величины z; такимъ образомъ поверхность простирается въ безконечность; слѣдовательно, это есть одинъ изъ гиперболоидовъ. Асимптотическій конусъ выражается уравненіемъ

$$2(By + B'x)z + (Ax^2 + A'y^2 + 2B''xy) = 0;$$

прямая OZ есть ребро этого конуса. Если поверхность будетъ гиперболоидъ объ одной полѣ, а обѣ прямыя, параллельныя OZ, будутъ находиться на поверхности, тогда прямая, параллельная Oz, выразится уравненіями $x = \alpha$, $y = \beta$; координата z точки пересѣченія этой прямой съ поверхностью опредѣляется уравненіемъ

$$2(B\beta + B'\alpha)z + A\alpha^2 + A'\beta^2 + A'\beta^2 + 2B''\alpha\beta + F_1 = 0.$$

Чтобы прямая принадлежала поверхности, надобно, чтобы α и β были выбраны такъ, чтобы удовлетворялось предъидущее уравненіе при всякой величинѣ z, т. е. чтобы

$$B\beta + B'\alpha = 0, \quad A\alpha^2 + A'\beta^2 + 2B''\alpha\beta + F_1 = 0;$$

$$\beta = -\frac{B'\alpha}{B} \quad \alpha^2 = -\frac{B^2F_1}{AB^2 + A'B'^2 - 2BB'B''}.$$

Если величина α^2 будетъ положительная, то поверхность будетъ гиперболоидъ объ одной полѣ; если эта величина будетъ отрицательная, то поверхность будетъ гиперболоидъ о двухъ полахъ.

2-й. Поверхность не имѣетъ центра. Эта поверхность можетъ быть только однимъ изъ параболоидовъ или параболическимъ цилиндромъ. Если это будетъ параболоидъ, то по крайней мѣрѣ одна изъ трехъ плоскостей координатъ не будетъ параллельна оси и дастъ эллиптическое сѣченіе или

гиперболическое, смотря по тому, будетъ ли параболоидъ эллиптическій или гиперболическій. Если поверхность будетъ параболическій цилиндръ, то сѣченія, сдѣланныя тремя плоскостями координатъ, будутъ параболы.

Если поверхность будетъ параболоидъ, то діаметральныя плоскости, выражаемыя уравненіями $f'_x = 0$, $f'_y = 0$ $f'_z = 0$, пересѣкутся по прямымъ, параллельнымъ оси поверхности; помощью двухъ изъ этихъ уравненій опредѣлимъ угловые коеффиціенты a и b оси. Плоскости, перпендикулярныя къ оси, опредѣляются уравненіемъ $ax + by + z = l$; геометрическое мѣсто центровъ этихъ параллельныхъ сѣченій или ось поверхности опредѣляется уравненіемъ (§ 486)

$$\frac{f'_x}{a} = \frac{f'_y}{b} = \frac{f'_z}{1}.$$

3-й. Поверхность имѣетъ центромъ всѣ точки прямой. Въ этомъ случаѣ поверхность будетъ цилиндръ; одна по крайней мѣрѣ изъ трехъ плоскостей координатъ не параллельна его оси; сѣченіе цилиндра этою плоскостью опредѣлитъ его родъ.

4-й. Поверхность имѣетъ центрами всѣ точки плоскости. Въ этомъ случаѣ геометрическое мѣсто будетъ или двѣ параллельныя плоскости, или одна плоскость, или уравненіе ничего не выражаетъ. Чтобы разобрать вопросъ, дѣлаемъ сѣченіе одною изъ плоскостей координатъ не параллельно плоскости центровъ.

Примѣръ I. $4x^2 + 3y^2 + 9z^2 + 8xz + 4xy + 4y + 8z + 9 = 0.$
Уравненія, опредѣляющія центръ, суть

$$2x + y + 2z = 0,\ \ 2x + 3y + 2 = 0,\ \ 4x + 9z + 4 = 0.$$

Эти уравненія допускаютъ только одно рѣшеніе $x = \frac{7}{2}$, $y = -3$, $z = -2$. Если начало координатъ перенесемъ въ центръ, то постоянный членъ будетъ равенъ -5, и уравненіе будетъ

$$4x^2 + 3y^2 + 9z^2 + 8xz + 4xy - 5 = 0.$$

Рѣшивъ относительно x, получимъ

$$2x = -y - 2z \pm \sqrt{-2y^2 - 5z^2 + 4yz + 5}.$$

Уравненіе

$$-2y^2 - 5z^2 + 4yz + 5 = 0$$

выражаетъ дѣйствительный эллипсъ; такъ какъ постоянный членъ подъ корнемъ положительный, то поверхность проектируется на плоскость yz внутри эллипса; слѣдовательно, это есть эллипсоидъ.

Если бы въ данномъ уравненіи замѣнили постоянный членъ 9 — 14, то полученное, такимъ образомъ, новое уравненіе выразило бы только одну точку. Если бы постоянный членъ замѣнили числомъ, которое больше 14, то уравненіе не имѣло бы болѣе дѣйствительныхъ рѣшеній.

Примѣръ II. $4x^2 - 15y^2 + 14yz + 4zx - 4xy + 4x - 34y + 24z - 18 = 0$.

Уравненія, опредѣляющія центръ, суть

$$2x - y + z + 1 = 0,\ 2x + 15y - 7z + 17 = 0,\ 2x + 7y + 12 = 0.$$

Они допускаютъ только одно рѣшеніе $x = -\frac{3}{4}$, $y = -\frac{3}{2}$, $z = -1$. Если начало координатъ перенесемъ въ центръ, то уравненіе поверхности будетъ

$$4x^2 - 15y^2 + 14yz + 4zx - 4xy - 6 = 0.$$

Рѣшивъ относительно x, получимъ

$$2x = y - z \pm \sqrt{z^2 + 16y^2 - 16yz + 6}.$$

Уравненіе

$$z^2 + 16y^2 - 16yz + 6 = 0$$

выражаетъ гиперболу; такъ какъ постоянный членъ подъ корнемъ положительный, то поверхность будетъ гиперболоидъ объ одной полѣ.

Если въ данномъ уравненіи членъ -18 замѣнимъ черезъ -12, то получимъ новое уравненіе, выражающее конусъ. Если постоянный членъ замѣнимъ числомъ, которое больше -12, то получимъ гиперболоидъ о двухъ полахъ.

Примѣръ III. $4x^2 + 4y^2 + 12z^2 - 12yz + 4xy + 4x + 2y + 3z = 0$.

Уравненія, опредѣляющія центръ, суть

$$2x + y + 1 = 0,\ 2x + 4y - 6z + 1 = 0,\ 4y - 8z - 1 = 0.$$

Если первое уравненіе вычтемъ изъ втораго, то получимъ уравненіе

$$y - 2z = 0, \text{ или } 4y - 8z = 0,$$

несовмѣстное съ третьимъ. Слѣдовательно, данное уравненіе выражаетъ поверхность, неимѣющую центра. Сѣченіе поверхности, сдѣланное плоскостью xy, выражается уравненіемъ

$$4x^2 + 4y^2 + 4xy + 4x + 2y = 0;$$

такъ какъ это сѣченіе есть эллипсъ, то поверхность будетъ эллиптическій параболоидъ. Ось, угловые коеффиціенты которой суть -1 и 2, выражается уравненіями

$$-(8x + 4y + 4) = 2x + 4y - 6z + 1 = 24z - 12y + 3.$$

Примѣръ IV. $4x^2 - 2y^2 - 12z^2 + 12yz + 4xy + 4x + 2y + 3z = 0$.

Уравненія, опредѣляющія центръ, суть

$$2x + y + 1 = 0,\ 2x - 2y + 6z + 1 = 0,\ 4y - 8z + 1 = 0.$$

Если второе уравненіе вычтемъ изъ перваго, то получимъ уравненіе $y - 2z = 0$,

несовмѣстное съ третьимъ. Такъ какъ плоскость xy пересѣкаетъ поверхность по гиперболѣ

$$4x^2 - 2y^2 + 4xy + 4x + 2y = 0,$$

то поверхность будетъ гиперболическій параболоидъ, ось котораго выражается уравненіями

$$-(8x + 4y + 4) = -2y + 6z + 2x + 1 = -24z + 12y + 3.$$

Примѣръ V. $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 4yz - 2xy + 2x - 2y - 4 = 0.$

Уравненія, опредѣляющія центръ, суть

$$x - y + 1 = 0,\ \ 2y - 2z - x - 1 = 0,\ \ y - 2z = 0.$$

Сложивъ почленно первыя два уравненія, получимъ третье; слѣдовательно, поверхность имѣетъ центромъ всѣ точки прямой $x = 2z - 1$, $y = 2z$; слѣдъ ея на плоскость XOY есть дѣйствительный эллипсъ

$$x^2 + 2y^2 - 2xy + 2x - 2y - 4 = 0.$$

Такимъ образомъ поверхность есть эллиптическій цилиндръ.

Третій способъ.

574. Этотъ способъ основывается на извѣстныхъ преобразованіяхъ, которымъ можно подвергнуть функціи второй степени съ тремя перемѣнными, и которыя, какъ мы увидимъ, приводятся къ преобразованію координатъ. Во всемъ послѣдующемъ буквы a, b, c, k будутъ означать постоянныя количества, а буквы α, β, γ линейныя функціи одного или нѣсколькихъ перемѣнныхъ x, y, z.

Разсмотримъ прежде многочленъ второй степени съ однимъ перемѣннымъ x

(1) $$Ax^2 + Bx + C;$$

такъ какъ коеффиціентъ A не равенъ нулю, то многочленъ можно написать такъ

$$A\left(x + \frac{B}{2A}\right)^2 + C - \frac{B^2}{4A};$$

и слѣдовательно, привести къ виду

(2) $$a\alpha^2 + k.$$

Возьмемъ теперь многочленъ второй степени съ двумя перемѣнными

(3) $$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F,$$

въ которомъ сперва предположимъ, что одинъ изъ коеффиціентовъ при x^2 и y^2, напримѣръ C, не равенъ нулю. Многочленъ (3) есть второй степени относительно y; расположивъ его по этому перемѣнному, получимъ

$$Cy^2 + (Bx + F)\,y + Ax^2 + Dx + F,$$

или

$$C\left(y+\frac{Bx+E}{2C}\right)^2+Ax^2+Dx+F-\frac{(Bx+E)^2}{4C}.$$

Вторая часть $Ax^2+Dx+F-\frac{(Bx+E)^2}{4C}$ будетъ относительно x многочленомъ второй или первой степени, или величина постоянная. Если онъ будетъ второй степени, то его представимъ въ видѣ $b\beta^2+k$; такимъ образомъ, если коеффиціентъ C не равенъ нулю, то многочленъ можно привести къ одному изъ видовъ

$$(4)\qquad a\alpha^2+b\beta^2+k,$$
$$(5)\qquad a\alpha^2+\beta,$$
$$(6)\qquad a\alpha^2+k.$$

Если оба коеффиціента A и C въ одно время равны нулю, то B не должно равняться нулю, и мы получимъ

$$Bxy+Dx+Ey+F=x(By+D)+Ey+F$$
$$=\left(x+\frac{E}{B}\right)(By+D)+\left(F-\frac{DE}{B}\right);$$

многочленъ получитъ видъ

$$(7)\qquad \alpha\beta+k.$$

Замѣтимъ, что видъ (7) приводится къ виду (4); дѣйствительно, мы имѣемъ

$$\alpha\beta=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2-\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2.$$

Но многочлены $\frac{\alpha+\beta}{2}$, $\frac{\alpha+\beta}{2}$ содержатъ два перемѣнныя x и y, между тѣмъ какъ въ многочленѣ (4) функція β содержитъ только перемѣнное x.

Разсмотримъ, наконецъ, многочленъ съ тремя перемѣнными

$$(8)\qquad Ax^2+A'y^2+A''z^2+2Byz+2B'zx+2B''xy$$
$$+2Cx+2C'y+2C''z+F,$$

и положимъ, что коеффиціентъ при одномъ изъ квадратовъ, напримѣръ при z^2, не равенъ нулю. Расположивъ относительно z, получимъ

$$A''z^2+2(By+B'x+C'')z+Ax^2+A'y^2+2B''xy+2Cx$$
$$+2C'y+F-\frac{(By+B'x+C'')^2}{A''}.$$

Вторая часть будетъ многочленъ второй или первой степени относительно перемѣнныхъ x и y, или будетъ величина постоянная; если онъ будетъ второй степени, то его представимъ въ одномъ изъ видовъ (4), (5), (6); такимъ образомъ многочленъ (8) получитъ одинъ изъ видовъ

(9) $a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + k$, (10) $a\alpha^2 + b\beta^2 + \gamma$, (11) $a\alpha^2 + b\beta^2 + k$,

(12) $a\alpha^2 + \beta$, (13) $a\alpha^2 + k$.

Если три коеффиціента A, A′ A″ въ одно время равны нулю, то одинъ, по крайней мѣрѣ, изъ коеффиціентовъ B, B′ B″, напримѣръ B, не будетъ равняться нулю; тогда получимъ

$$\begin{aligned}&2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + F\\ &= z(2By + 2B'x + 2C'') + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + F\\ &= \left(z + \frac{B''}{B}x + \frac{C'}{B}\right)(2By + 2B'x + 2C'') + 2Cx + F\\ &\quad - \frac{2B'B''}{B}x^2 - \frac{2B''C''}{B}x - \frac{2B'C'}{B}x - \frac{2C'C''}{B}.\end{aligned}$$

Такъ какъ вторая часть есть многочленъ, по большей мѣрѣ второй, степени относительно x, то данный многочленъ можно привести къ одному изъ видовъ

(14) $\alpha\beta + c\gamma^2 + k$;

(15) $a\beta + \gamma$,

(16) $\alpha\beta + k$.

Если произведеніе $\alpha\beta$ замѣнимъ $\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$, то многочлены видовъ (14), (15), (16) приведутся къ видамъ (9), (10), (11).

575. Если будетъ дано числовое уравненіе второй степени, то сначала первую часть этого уравненія приведемъ къ одному изъ предъидущихъ видовъ, и потомъ отсюда легко будетъ опредѣлить родъ поверхности. Разсмотримъ, напримѣръ, случай, когда уравненіе можно представить въ видѣ

(17) $$a\alpha^2 + b\beta^2 + c\gamma^2 + k = 0.$$

Представимъ, что преобразовываемъ координаты, принимая за плоскости $y'z'$, $z'x'$ $x'y'$ плоскости, выражаемыя уравненіями $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$. Изъ какой-нибудь точки M, пространства (*фиг.* 315) опускаемъ перпендикуляръ MN на плоскость X′O′Y′ и проводимъ MI параллельно O′Z′; означимъ черезъ x, y, z прежнія координаты точки M, черезъ x', y', z'

новыя координаты, черезъ θ уголъ двухъ прямыхъ MN, MI, уголъ, одинаковый для всѣхъ точекъ пространства, и пусть $\gamma = mx + ny + pz + q$. Тогда перпендикуляръ MN выразится, относительно первой системы координатъ (§ 438), такъ

Фиг. 315.

$$\mathrm{MN} = \pm \frac{mx + ny + pz + q}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}} = \frac{\pm \gamma}{\sqrt{m^2 + n^2 + p^2}},$$

а относительно второй

$$\mathrm{MN} = \pm z' \cos \theta.$$

Въ каждой изъ этихъ формулъ, знакъ второй части измѣняется при переходѣ точки M съ одной стороны плоскости X′O′Y′ на другую; слѣдовательно, если черезъ h назовемъ произведеніе $\sqrt{m^2 + n^2 + p^2} \cdot \cos \theta$, взятое съ приличнымъ знакомъ, то для всѣхъ точекъ пространства получимъ соотношеніе $\gamma = hz'$. Точно также найдемъ соотношеніе $\beta = gy'$, $\alpha = fx'$. Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе поверхности, относительно новыхъ осей, будетъ

$$(18) \qquad af^2x'^2 + bg^2y'^2 + ch^2z'^2 + k = 0.$$

Эта поверхность имѣетъ только одинъ центръ, а новыя плоскости координатъ суть три сопряженныя діаметральныя плоскости. Родъ поверхности непосредственно показывается знаками коеффиціентовъ a, b, c, k.

576. *Замѣчаніе I.* При преобразованіи координатъ, мы предполагали, что плоскости, выражаемыя уравненіями $\alpha = 0$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$, пересѣкаются въ одной точкѣ. Это условіе можетъ не выполняться, если линейныя функціи α, β, γ будутъ взяты произвольно; но оно всегда выполняется, когда эти многочлены происходятъ отъ преобразованія функціи второй степени по изложенному способу.

Замѣчаніе II. Если три коеффиціента a, b, c не имѣютъ одинаковыхъ знаковъ, то поверхность будетъ гиперболоидъ; отбросивъ въ уравненіи (18) постоянный членъ k, получимъ уравненіе асимптотическаго конуса относительно новыхъ осей; отсюда заключаемъ, что, отбросивъ также въ уравненіи (17) постоянное k, получимъ уравненіе асимптотическаго конуса, относительно прежнихъ осей.

Замѣчаніе III. Если a и b будутъ величины положительныя, то поверхность будетъ гиперболоидъ объ одной полѣ.

Положивъ $c = -c_1$, $k = -k_1$, это уравненіе будетъ

$$a\alpha^2 - c_1\gamma_1 = k_1 - b\beta^2.$$

Двѣ системы прямолинейныхъ образующихъ выражаются уравненіями.

$$\begin{cases}\alpha\sqrt{a} + \gamma\sqrt{c_1} = \lambda(\sqrt{k_1} + \beta\sqrt{b}),\\ \alpha\sqrt{a} - \gamma\sqrt{c_1} = \frac{1}{\lambda}(\sqrt{k_1} - \beta\sqrt{b}),\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha\sqrt{a} + \gamma\sqrt{c_1} = \mu(\sqrt{k_1} - \beta\sqrt{b}),\\ \alpha\sqrt{a} - \gamma\sqrt{c_1} = \frac{1}{\mu}(\sqrt{k_1} + \beta\sqrt{b}),\end{cases}$$

въ которыхъ λ и μ суть произвольные параметры.

577. Если первая часть уравненія приведется къ виду (10), то помощью того же преобразованія увидимъ, что поверхность будетъ параболоидъ эллиптическій или гиперболическій, смотря по тому, будутъ ли коэффиціенты a и b имѣть одинаковые знаки или разные. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ, если положимъ, что a есть величина положительная, b отрицательная и равно $-b_1$, то увидимъ, что обѣ системы прямолинейныхъ образующихъ выражаются уравненіями

$$\begin{cases}\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b_1} = \lambda,\\ \alpha\sqrt{a} - \beta\sqrt{b_1} = -\frac{\gamma}{\lambda},\end{cases} \quad \begin{cases}\alpha\sqrt{a} - \beta\sqrt{b_1} = \mu,\\ \alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b_1} = \frac{\gamma}{\mu};\end{cases}$$

прямыя первой системы параллельны плоскости

$$\alpha\sqrt{a} + \beta\sqrt{b_1} = 0,$$

прямыя второй системы параллельны плоскости

$$\alpha\sqrt{a} - \beta\sqrt{b_1} = 0;$$

совокупность двухъ управляющихъ плоскостей выражается уравненіемъ $a\alpha^2 - b_1\beta^2 = 0$, что согласно замѣчанію § 560.

Если первая часть приведется къ виду (11), то, взявъ за новыя плоскости координатъ двѣ плоскости $\alpha = 0$, $\beta = 0$ и третью плоскость, не параллельную прямой пересѣченія двухъ первыхъ, увидимъ, что поверхность будетъ эллиптическій или гиперболическій цилиндръ. Многочленъ вида (12) соотвѣтствуетъ параболическому цилиндру, а многочленъ вида (13) системѣ двухъ параллельныхъ плоскостей.

Многочлены видовъ (14), (15), (16) приводятся къ предъидущимъ; но это приведеніе не есть необходимое. Очевидно, что многочленъ вида (14) выражаетъ гиперболоидъ объ одной полѣ, если c и k будутъ имѣть

разные знаки, и гиперболоидъ о двухъ полахъ, если они будутъ имѣть одинаковые знаки. Для перваго случая, пусть c будетъ положительное, k отрицательное и равно $-k_1$; тогда уравненія двухъ системъ прямолинейныхъ образующихъ поверхности будутъ

$$\begin{cases}\gamma\sqrt{c}+\sqrt{k_1}=\lambda\alpha,\\ \gamma\sqrt{c}-\sqrt{k_1}=-\frac{\beta}{\lambda},\end{cases}\qquad \begin{cases}\gamma\sqrt{c}-\sqrt{k_1}=\mu\alpha,\\ \gamma\sqrt{c}+\sqrt{k_1}=-\frac{\beta}{\mu}.\end{cases}$$

Многочленъ вида (15) соотвѣтствуетъ гиперболическому параболоиду; тогда двѣ системы прямолинейныхъ образующихъ выражаются уравненіями

$$\begin{cases}\alpha=\lambda,\\ \beta=-\frac{\gamma}{\lambda},\end{cases}\qquad \begin{cases}\beta=\mu,\\ \alpha=-\frac{\gamma}{\mu}.\end{cases}$$

Наконецъ, многочленъ вида (16) выражаетъ гиперболическій цилиндръ.

578. Въ предъидущемъ мы предполагали, что оси прямоугольныя. Тотъ же способъ преобразованія можно употреблять для косоугольныхъ координатъ и найти, что

$$\gamma=mx+ny+pz+q=\pm\frac{pz'\cos\theta'}{\cos\theta},$$

гдѣ θ и θ' означаютъ углы, которые нормаль, проведенная къ плоскости $\gamma=0$, образуетъ съ осями OZ и O'Z'; отсюда находимъ, какъ и для прямоугольныхъ координатъ, $\gamma=hz'$, гдѣ h есть величина постоянная.

Примѣръ I. $4x^2+3y^2+9z^2+8xz+4xy+4y+8z+9=0$.
Расположивъ первую часть по x, получимъ

$$4x^2+4x(y+2z)+3y^2+9z^2+4y+8z+9,$$

или

$$(2x+y+2z)^2-(y+2z)^2+3y^2+9z^2+4y+8z+9,$$

и, сдѣлавъ приведеніе во второй части,

$$(2x+y+2z)^2+2y^2+5z^2-4yz+4y+8z+9.$$

Расположивъ вторую часть по y, получимъ

$$2y^2-4y(z-1)+5z^2+8z+9=2(y-z+1)^2-2(z-1)^2+5z^2+8z+9.$$

Наконецъ, послѣдняя часть этого новаго многочлена будетъ

$$3z^2+12z+7=3(z+2)^2-5.$$

Изъ предъидущаго слѣдуетъ, что данное уравненіе можно представить въ видѣ

$$(2x+y+2z)^2+2(y-z+1)^2+3(z+2)^2-5=0.$$

Это уравненіе выражаетъ эллипсоидъ; а три плоскости, выражаемыя уравненіями

$$2x+y+2z=0,\quad y-z+1=0,\quad z+2=0,$$

суть три сопряженныя діаметральныя плоскости поверхности. Эти плоскости пересѣкаются въ точкѣ $x=\frac{7}{2}$, $y=-3$, $z=-2$, которая есть центръ поверхности.

Примѣръ II. $4x^2-15y^2+14yz+4zx-4xy+4x-34y+24z-18=0$. Послѣдовательно получимъ

$$\begin{aligned}&4x^2-15y^2+14yz+4zx-4xy+4x-34y+24z=18\\&=4x+4x(z-y+1)-15y^2+14yz-34y+24z-18\\&=(2x-y+z+1)^2-16y^2+16yz-z^2-32y+22z-19;\end{aligned}$$

потомъ

$$-16y^2+16y(z-2)-z^2+22z-19=-4(2y-z+2)^2+3z^2+6z-3$$

и наконецъ

$$3z^2+6z-3=3(z+1)^2-6;$$

это уравненіе выражаетъ гиперболоидъ объ одной полѣ. Уравненія двухъ системъ прямолинейныхъ образующихъ поверхности будутъ

$$\begin{cases}2x+3y-z+5=\lambda\left[\sqrt{6}+(z+1)\sqrt{3}\right],\\2x-5y+3z-3=\dfrac{1}{\lambda}\left[\sqrt{6}-(z+1)\sqrt{3}\right];\end{cases}$$

$$\begin{cases}2x+3y-z+5=\mu\left[\sqrt{6}-(z+1)\sqrt{3}\right],\\2x-5y+3z-3=\dfrac{1}{\mu}\left[\sqrt{6}+(z+1)\sqrt{3}\right].\end{cases}$$

Уравненіе асимптотическаго конуса будетъ

$$(2x-y+z+1)^2-4(2y-z+2)^2+3(z+1)^2=0.$$

Примѣръ III. $4x^2+4y^2+12z^2-12yz+4xy+4x+2y+3z=0$.
Находимъ

$$\begin{aligned}&4x^2+4x(y+1)+4y^2+12z^2-12yz+2y+3z\\&=(2x+y+1)^2+3y^2+12z^2-12yz+2y+3z-1,\\&3y^2+12z^2-12yz+3z-1=3(y-2z)^2+3z-1,\end{aligned}$$

и уравненіе поверхности можно представить въ видѣ

$$(2x+y+1)^2+3(y-2z)^2+3z-1=0;$$

оно выражаетъ эллиптическій параболоидъ.

Примѣръ IV. $4x^2-2y^2-12z^2+12yz+4xy+4x+2y+3z=0$.
Уравненіе представится въ видѣ

$$(2x+y+1)^2-3(y-2z)^2+(3z-1)=0;$$

оно выражаетъ гиперболическій параболоидъ. Двѣ системы прямолинейныхъ образующихъ поверхности выражаются уравненіями

$$\begin{cases} 2x + y + 1 + (y - 2z)\sqrt{3} = \lambda, \\ 2x + y + 1 - (y - 2z)\sqrt{3} = \dfrac{1}{\lambda}(1 - 3z); \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2x + y + 1 + (y - 2z)\sqrt{3} = \mu(1 - 3z), \\ 2x + y + 1 - (y - 2z)\sqrt{3} = \dfrac{1}{\mu}. \end{cases}$$

Примѣръ V. $x^2 + 4y^2 + z^2 - 4yz - 2zx + 4xy + 6x + 4y - 5z + 3 = 0.$

Расположивъ первую часть по x, найдемъ

$$\begin{aligned} x^2 + 2x(2y - z + 3) + 4y^2 + z^2 - 4yz + 4y - 5z + 3 \\ = (x + 2y - z + 3)^2 - 8y + z - 6, \end{aligned}$$

а данное уравненіе получитъ видъ

$$(x + 2y - z + 3)^2 + (z - 8y - 6) = 0;$$

это уравненіе выражаетъ параболическій цилиндръ; ребра цилиндра параллельны прямой, выражаемой двумя уравненіями

$$x + 2y - z + 3 = 0, \ \ z - 8y - 6 = 0.$$

Примѣръ VI. Найти различныя поверхности, выражаемыя уравненіемъ

$$x^2 + (2m^2 + 1)(y^2 + z^2) - 2(yz + zx + xy) = 2m^3 - 3m + 1,$$

въ которомъ m есть произвольный параметръ. Вторая часть есть многочленъ третьей степени, корни котораго суть 1 и $\dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$; если положимъ $m' = -\dfrac{1 + \sqrt{3}}{2}$, $m'' = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$, то этотъ многочленъ можно написать въ видѣ

$$2(m - m')(m - m'')(m - 1).$$

Если параметръ m не будетъ равенъ нулю, то, преобразовавъ первую часть въ сумму квадратовъ, получимъ

$$(x - y - z)^2 + 2m^2\left(y - \frac{z}{m^2}\right)^2 + 2\left(m^2 - \frac{1}{m^2}\right)z^2 = 2(m - m')(m - m'')(m - 1).$$

Если параметръ m будетъ равенъ нулю, то уравненіе будетъ

$$(x - y - z)^2 - 4yz = 1.$$

Корень m'' менѣе единицы, абсолютная величина m', наоборотъ, болѣе единицы.

1. Если величина параметра m заключается между $-\infty$ и m', то, такъ какъ коэффиціенты квадратовъ положительные, а вторая часть отрицательная, получимъ мнимый эллипсоидъ. Если величина m будетъ равна m', то геометрическое мѣсто будетъ точка.

2. Если m заключается между m' и -1, то такъ какъ коэффиціенты квадратовъ, положительные и вторая часть также положительная, поверхность будетъ эллипсоидъ. При $m=-1$, эллипсоидъ обратится въ эллиптическій цилиндръ.

3. Если m заключается между -1 и m'', то геометрическое мѣсто будетъ гиперболоидъ объ одной полѣ. Въ этомъ промежуткѣ заключается величина $m=0$, которой не соотвѣтствуетъ первый видъ; но второй показываетъ, что въ этомъ случаѣ поверхность будетъ всегда гиперболоидъ объ одной полѣ. При $m=m''$ гиперболоидъ обратится въ конусъ.

4. Если m заключается между m'' и $+1$, то, такъ какъ вторая часть должна быть отрицательная, получимъ гиперболоидъ о двухъ полахъ. При $m=1$ получимъ прямую.

5. Наконецъ, если m заключается между 1 и $+\infty$, получимъ снова эллипсоидъ.

Чтобы поверхность была поверхностью вращенія, то, такъ какъ три коэффиціента B, B′, B″ отличаются отъ нуля, надобно, чтобы

$$A-\frac{B'B''}{B}=A'-\frac{B''B}{B'}=A''-\frac{BB'}{B''},$$

что въ этомъ случаѣ приводится къ $m=0$. Въ этомъ случаѣ уравненіе можно представить въ видѣ

$$2(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2=1,$$

и отсюда видно, что поверхность есть поверхность вращенія.

ГЛАВА VII.

Общія теоремы о поверхностяхъ втораго порядка.

579. Общее уравненіе втораго порядка

$$(1)\qquad \begin{aligned} Ax^2+A'y^2+A''z^2+2B'yz+2B'zx+2B''xy \\ +2Cx+2C'y+2C''z+F=0, \end{aligned}$$

съ тремя перемѣнными x, y, z содержитъ десять членовъ, и поверхность, опредѣляемая этимъ уравненіемъ, зависитъ отъ девяти произвольныхъ параметровъ, отношеній девяти коэффиціентовъ къ десятому. Слѣдовательно, для опредѣленія поверхности втораго порядка, надобно девять геометрическихъ условій, предполагая, что каждое геометрическое условіе выражается только однимъ соотношеніемъ между коэффиціентами. Такъ, напримѣръ, поверхность втораго порядка опредѣляется девятью точками.

580. Чтобы выразить, что плоскость $Ax + By + Cz + D = 0$ есть касательная къ поверхности $F(x, y, z) = 0$, то замѣтимъ, что координаты (x, y, z) точки прикосновенія должны удовлетворять въ одно и то же время уравненію поверхности и уравненію плоскости; кромѣ того, такъ какъ эта плоскость должна совпадать съ касательною плоскостью, уравненіе которой есть

$$(X - x)\,F'_x + (Y - y)\,F'y + (Z - z)\,F'z = 0,$$

то мы должны имѣть соотношенія

$$\frac{F'_x}{A} = \frac{F'_y}{B} = \frac{F'_z}{C}.$$

Исключивъ изъ этихъ четырехъ уравненій x, y, z, получимъ соотношеніе между перемѣнными коеффиціентами, заключающимися въ уравненіи поверхности. Такъ какъ прикосновеніе плоскости и какой нибудь поверхности выразится однимъ уравненіемъ, то для опредѣленія поверхности второй степени надобно точно также девять касательныхъ плоскостей.

Вычисленіе можно сдѣлать другимъ образомъ, когда поверхность будетъ второй степени; въ самомъ дѣлѣ, линія пересѣченія поверхности второй степени и касательной плоскости состоитъ изъ двухъ прямыхъ, или приводится къ точкѣ, т. е. къ двумъ сопряженнымъ мнимымъ прямымъ. Слѣдовательно, чтобы выразить, что плоскость есть касательная къ поверхности, надобно написать условіе, чтобы линія пересѣченія приводилась къ двумъ прямымъ.

Ясно, что касательная плоскость съ точкою прикосновенія равнозначуща тремъ условіямъ. Чтобы выразить, что поверхность второй степени есть конусъ, напишемъ, что координаты центра удовлетворяютъ уравненію поверхности, или что новый членъ постоянный, когда перенесемъ начала въ центръ, есть нуль, что дастъ соотношеніе между коеффиціентами. Чтобы выразить, что поверхность есть параболоидъ, надо приравнять нулю общій знаменатель или детерминантъ координатъ центра. Такимъ образомъ восемь точекъ достаточно для опредѣленія конуса второй степени или параболоида. Чтобы выразить, что поверхность есть цилиндръ, надо приравнять нулю знаменатель координатъ центра и одинъ изъ числителей, что дастъ два условія; такимъ образомъ, для опредѣленія цилиндра второй степени, достаточно семь точекъ.

Мы придемъ къ тѣмъ же результатамъ, разлагая квадраты. Чтобы поверхность была конусомъ, надобно, чтобы, составивъ три перемѣнныя квадрата, получить постоянную часть нуль. Чтобы поверхность была пара-

болоидъ, надобно, чтобы, составивъ два первыхъ квадрата, оставшаяся часть была функція первой степени съ однимъ перемѣннымъ; слѣдовательно, приравниваемъ нулю коеффиціентъ члена второй степени. Чтобы поверхность была цилиндръ, надобно, чтобы эта оставшаяся часть была постоянная; слѣдовательно, приравниваемъ нулю коеффиціенты членовъ первой и второй степени. Чтобы поверхность была параболическій цилиндръ, надобно, чтобы, составивъ первый квадратъ, оставшаяся часть была функція первой степени съ двумя перемѣнными; слѣдовательно, приравниваемъ нулю коеффиціенты трехъ членовъ второй степени.

581. Чтобы прямая была расположена вся на поверхности m-го порядка, надобно, какъ мы видѣли въ § 552, чтобы уравненіе, происходящее отъ исключенія x и y изъ уравненія прямой и уравненія поверхности, удовлетворялось при всякой величинѣ z, и мы получимъ $m+1$ соотношеній между параметрами перемѣнныхъ поверхности. Къ подобному заключенію придемъ другимъ способомъ, замѣчая, что для того, чтобы прямая принадлежала поверхности, надобно и достаточно, чтобы $m+1$ этихъ точекъ удовлетворяли уравненію этой поверхности. Для частнаго случая, если поверхность будетъ второй степени, то прямая соотвѣтствуетъ тремъ точкамъ, а три прямыхъ опредѣляютъ поверхность. Если между данными точками четыре или большее число будетъ находиться на одной прямой, то эти точки надо считать за три.

Три какія нибудь прямыя опредѣляютъ гиперболоидъ объ одной полости. Двѣ какія нибудь прямыя и двѣ точки опредѣляютъ гиперболическій параболоидъ. Пять прямыхъ, проходящихъ черезъ одну и ту же точку, опредѣляютъ конусъ второго порядка; потому что точки, въ которыхъ эти пять прямыхъ пересѣкаютъ плоскость, опредѣляютъ кривую втораго порядка, которая, вмѣстѣ съ вершиною, опредѣляетъ конусъ.

Теорема I.

582. *Черезъ девять данныхъ точекъ можно всегда провести, по крайней мѣрѣ, одну поверхность втораго порядка.*

Мы сказали, что девять точекъ опредѣляютъ поверхность втораго порядка; остается иногда изслѣдовать, допускаетъ-ли система девяти уравненій первой степени между коеффиціентами всегда одно рѣшеніе. Если черезъ x', y', z' назовемъ координаты первой точки, черезъ, x'', y'', z'' координаты второй точки, и т. д., то для опредѣленія отношеній девяти коеффиціентовъ къ десятому получимъ уравненія вида

$$\begin{cases} Ax'^2 + A'y'^2 + A''z'^2 + 2By'z' + \ldots = 0, \\ Ax''^2 + A'y''^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Чтобы составить детерминантъ, возьмемъ члены въ каждой горизонтальной линіи и членъ въ каждой вертикальной линіи всѣми возможными способами; два члена детерминанта не могутъ быть составлены точно однимъ и тѣмъ же образомъ и, слѣдовательно, детерминантъ не равенъ нулю; такимъ образомъ, вообще есть только одно рѣшеніе.

Положимъ теперь, что для частнаго положенія данныхъ точекъ детерминантъ будетъ нуль; этотъ детерминантъ есть функція второй степени координатъ каждой точки; если въ немъ замѣнимъ x', y', z' перемѣнными x, y, z, то получимъ функцію второй степени $f(x, y, z)$. Разсмотримъ поверхность второй степени, выражаемую уравненіемъ $f(x, y, z) = 0$; эта поверхность проходитъ черезъ первую точку; дѣйствительно, если x, y, z замѣнимъ x', y', z', то снова получимъ детерминантъ, который равенъ нулю. Она проходитъ также черезъ вторую точку, потому что если x, y, z замѣнимъ въ уравненіи x'', y'', z'', то придемъ къ замѣнѣ въ детерминантѣ x', y', z' — x'', y'', z'', и тогда, извѣстно, что детерминантъ будетъ нуль. Поверхность проходитъ также черезъ девять данныхъ точекъ.

Мы располагали детерминантъ относительно x', y', z'; разсужденіе было бы ошибочно, если бы всѣ коефиціенты были нули; но тогда располагаютъ относительно x'', y'', z'' или относительно x''', y''', z''' и т. д.; разсужденіе небудетъ ошибочно, если всѣ коеффиціенты этихъ различныхъ многочленовъ были бы въ одно время нули. Положимъ, что это имѣетъ мѣсто, и разсмотримъ коеффиціентъ однаго изъ членовъ въ первомъ многочленѣ; этотъ коеффиціентъ содержитъ координаты x'', y'', z'', x''', y''', z''' и т. д.; если въ немъ x'', y'', z'' замѣнимъ перемѣнными x, y, z, то получимъ функцію второй степени $f_1(x, y, z)$. Подобный коеффиціентъ во второмъ многочленѣ содержитъ координаты x', y', z' x''', y''', z''', ...; если въ немъ замѣнимъ x', y', z', черезъ x, y, z, то получимъ ту же функцію $f_1(x, y, z)$. Очевидно, что поверхность, опредѣляемая уравненіемъ $f_1(x, y, z)$, проходитъ черезъ двѣ первыя точки; по предъидущему увидимъ, что она проходитъ также чрезъ каждую изъ слѣдующихъ точекъ. То же затрудненіе представилось бы, если бы всѣ коеффиціенты предъидущихъ многочленовъ, будучи располо-

жены относительно координатъ одной какой нибудь изъ точекъ, которые они содержатъ, всѣ частные коеффиціенты были въ одно время нули. Но, продолжая подобное разсужденіе, такъ какъ число точекъ, координаты которыхъ входятъ въ каждый коеффиціентъ, уменьшаются, получимъ коеффиціенты, содержащіе только координаты одной буквы; коеффиціенты всѣхъ этихъ многочленовъ, будучи числовыми, не могутъ быть въ одно время нулями; дѣйствительно, тогда детерминантъ будетъ равенъ нулю. Отсюда заключаемъ, что черезъ девять точекъ, взятыхъ произвольно, всегда можно провести, по крайней мѣрѣ, одну поверхность втораго порядка.

Теорема II.

583. *Черезъ линію пересѣченія двухъ поверхностей втораго порядка и одну точку можно провести только одну поверхность втораго порядка.*

Пусть $S = 0$, $S_1 = 0$ будутъ уравненія двухъ поверхностей втораго порядка; уравненіе $S - kS_1 = 0$, въ которомъ k есть произвольный параметръ, выражаетъ поверхность втораго порядка, проходящую черезъ неразгибающуюся прямую четвертаго порядка, пересѣченіе двухъ первыхъ; параметръ k можно опредѣлить такъ, чтобы эта поверхность проходила черезъ точку M, взятую произвольно въ пространствѣ. Такимъ образомъ, черезъ линію пересѣченія двухъ данныхъ поверхностей и точку M можно всегда провести поверхность втораго порядка.

Кромѣ того, легко доказать, что можно провести только одну поверхность. Дѣйствительно, какая нибудь плоскость, проходящая черезъ точку M, пересѣкаетъ обѣ поверхности S и S_1 по двумъ коническимъ сѣченіямъ; эти сѣченія, находясь въ одной и той же плоскости, имѣютъ четыре общія точки; эти четыре точки и точка M опредѣляютъ коническое сѣченіе, которое должно принадлежать искомой поверхности; такъ какъ каждая изъ плоскостей, проведенныхъ черезъ точку M, пересѣкаетъ искомыя поверхности по одному и тому же коническому сѣченію, то нельзя имѣть двѣ различныя поверхности, удовлетворяющія изложеннымъ условіямъ.

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе

$$S - kS_1 = 0 \tag{1}$$

можно разсматривать, какъ общее уравненіе поверхностей втораго порядка, которые проходятъ черезъ линію пересѣченія двухъ поверхностей $S = 0$, $S_1 = 0$.

584. *Примѣчаніе I.* Разсмотримъ два коническія сѣченія, по которымъ поверхность втораго порядка $S = 0$ пересѣкается двумя плоскостями $\alpha = 0$ и $\beta = 0$; такъ какъ уравненіе $\alpha\beta = 0$ опредѣляетъ поверхность втораго порядка, то уравненіе

(2) $$S - k\alpha\beta = 0$$

выражаетъ всѣ поверхности втораго порядка, которыя проходятъ чрезъ эти два коническія сѣченія.

Точно также уравненіе

(3) $$\alpha\beta - k\gamma\delta = 0$$

выражаетъ всѣ поверхности втораго порядка, которыя проходятъ черезъ четыре прямыя пересѣченія двухъ системъ плоскостей $\alpha\beta = 0$ и $\gamma\delta = 0$. Эти четыре прямыя составляютъ неразгибающійся четыреугольникъ.

585. *Примѣчаніе II. Если два коническія сѣченія, находящіяся въ различныхъ плоскостяхъ, имѣютъ двѣ общія точки, то черезъ эти два коническія сѣченія можно провести безконечное число поверхностей втораго порядка.*

Если на каждомъ изъ двухъ сѣченій возьмемъ три другія точки, то получимъ всѣ восемь точекъ, черезъ которыя можно провести безконечное число поверхностей втораго порядка. Разсмотримъ одну изъ этихъ поверхностей; плоскости двухъ коническихъ сѣченій пересѣкаютъ эту поверхность по двумъ коническимъ сѣченіямъ, изъ которыхъ каждое имѣетъ пять общихъ точекъ съ однимъ изъ данныхъ коническихъ сѣченій, и слѣдовательно, совпадаетъ съ этими. Сверхъ того, изъ предъидущаго слѣдуетъ, что для опредѣленія поверхности достаточно внѣшней точки.

Теорема III.

586. *Если двѣ поверхности втораго порядка имѣютъ пять общихъ точекъ, находящихся въ одной и той же плоскости, то линія пересѣченія двухъ поверхностей состоитъ изъ двухъ плоскихъ кривыхъ.*

Положимъ, что двѣ поверхности S и S_1 имѣютъ пять общихъ точекъ, находящихся въ одной и той же плоскости P; эти пять точекъ опредѣляютъ коническое сѣченіе C, которое принадлежитъ двумъ поверхностямъ. Возьмемъ три другія точки, не находящіяся въ плоскости P; плоскость P', которая проходитъ черезъ эти три точки, пересѣкаетъ коническое сѣченіе C въ двухъ точкахъ, которыя съ тремя предъидущими опредѣ-

ляютъ коническое сѣченіе C′, принадлежащее также двумъ поверхностямъ. Двѣ поверхности не могутъ имѣть общей точки, не находящейся на коническихъ сѣченіяхъ C и C′, но чтобы онѣ не совпадали вслѣдствіе предъидущаго примѣчанія. Слѣдовательно, линія пересѣченія состоитъ изъ двухъ коническихъ сѣченій C и C′.

Теорема IV.

587. *Если двѣ поверхности втораго порядка прикасаются въ двухъ точкахъ, то онѣ пересѣкаются по двумъ плоскимъ кривымъ.*

Разсмотримъ двѣ поверхности втораго порядка, которыя прикасаются въ двухъ точкахъ a и b. Пусть c будетъ третья точка, общая двумъ поверхностямъ; черезъ три точки a, b, c проведемъ плоскость P; эта плоскость пересѣчетъ каждую изъ поверхностей по коническому сѣченію; эти два коническія сѣченія имѣютъ три общія точки a, b, c и однѣ и тѣ же касательныя въ двухъ точкахъ a и b; слѣдовательно, онѣ совпадаютъ (§ 278). Такъ какъ плоскость P пересѣкаетъ обѣ поверхности по одной и той же кривой, то изъ предъидущей теоремы слѣдуетъ, что линія пересѣченія двухъ поверхностей состоитъ изъ двухъ коническихъ сѣченій.

Въ предъидущемъ доказательствѣ мы предполагали, что касательныя плоскости въ точкѣ a и b не пересѣкаются по прямой ab, т. е. что данныя точки не принадлежатъ прямой, находящейся на поверхности. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ мы увидимъ, что вообще линія пересѣченія состоитъ изъ прямой линіи и неразгибающейся линіи третьяго порядка.

Теорема V.

588. *Если двѣ поверхности втораго порядка прикасаются въ трехъ точкахъ, то онѣ соединяются по длинѣ плоской линіи.*

Разсмотримъ двѣ поверхности втораго порядка, которыя касаются въ трехъ точкахъ a, b, c; эти поверхности не имѣютъ общей точки внѣ плоскости P, опредѣляемой точками a, b, c; потому что, если бы онѣ имѣли общую точку d, внѣ плоскости P, то, по предъидущей теоремѣ, каждая изъ трехъ плоскостей dab, dbc, dca пересѣкала бы двѣ поверхности по одному и тому же коническому сѣченію, что невозможно. Обѣ поверхности пересѣкаются плоскостью P по одному и тому же коническому сѣченію C; очевидно, что онѣ имѣютъ одну и ту же касательную

плоскость въ каждой точкѣ m кривой. Дѣйствительно, черезъ точку m и точку a, напримѣръ, проведемъ какую нибудь плоскость, отличающуюся отъ плоскости P; эта плоскость пересѣкаетъ обѣ поверхности по двумъ кривымъ, которыя суть касательныя въ a, и такъ какъ онѣ не имѣютъ другой общей точки, кромѣ m, то онѣ также касательныя въ этой точкѣ.

589. *Примѣчаніе I.* Мы видѣли, что уравненіе $S - k\alpha\beta = 0$ выражаетъ поверхность втораго порядка, которая проходитъ черезъ кривыя пересѣченія поверхности $S = 0$ съ плоскостями $\alpha = 0$, $\beta = 0$. Отсюда слѣдуетъ, что поверхности, выражаемыя уравненіемъ

$$S - k\alpha^2 = 0, \tag{4}$$

касаются поверхности S по кривой пересѣченія C этой поверхности и плоскости α.

Уравненіе (4) содержитъ произвольный параметръ k, который позволяетъ провести поверхность черезъ произвольную точку; съ другой стороны, докажемъ, какъ § 583, что поверхность, которая должна быть касательна къ поверхности втораго порядка во всѣхъ точкахъ плоской кривой и проходить черезъ данную точку, совершенно опредѣлена. Слѣдовательно, уравненіе (4) можно разсматривать, какъ общее уравненіе поверхностей втораго порядка, которыя прикасаются съ поверхностью S по длинѣ коническаго сѣченія, опредѣляемаго плоскостью α.

590. *Примѣчаніе II.* Два коническія сѣченія C и C′, проведенныя на одной и той же поверхности втораго порядка S, пересѣкаются въ двухъ точкахъ a и b; хорда ab есть прямая пересѣченія плоскостей двухъ коническихъ сѣченій; отсюда слѣдуетъ, что двѣ поверхности втораго порядка, которыя прикасаются съ первой поверхностью по двумъ коническимъ сѣченіямъ C и C′, прикасаются въ двухъ точкахъ a и b, и слѣдовательно, по теоремѣ IV, пересѣкаются по двумъ плоскимъ кривымъ. Такъ какъ уравненія двухъ поверхностей имѣютъ видъ

$$S - k\alpha^2 = 0,\ S - k\alpha'^2 = 0,$$

то два коническія сѣченія, которыя составляютъ линію пересѣченія, находятся въ плоскостяхъ $k\alpha^2 = k'\alpha'^2$.

591. Найдемъ, напримѣръ, уравненіе конуса, описаннаго около эллипсоида

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0,$$

и вершина котораго находится въ данной точкѣ p, координаты которой суть x_1, y_1, z_1.

Такъ какъ уравненіе соприкасающейся плоскости есть $\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}-1=0$, то общее уравненіе поверхностей втораго порядка, которыя сливаются съ эллипсоидомъ по коническому сѣченію, опредѣляемому этою плоскостью, будетъ

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1-k\left(\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}-1\right)^2=0.$$

Если возьмемъ k такъ, чтобы предъидущее уравненіе удовлетворялось координатами x_1, y_1, z_1 точки P, то оно выразитъ вписанный конусъ, потому что существуетъ только одна поверхность втораго порядка, касающаяся эллипсоида по разсматриваемой кривой и проходящей черезъ данную точку; такимъ образомъ получимъ искомое уравненіе

$$\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1\right)\left(\frac{x_1^2}{a^2}+\frac{y_1^2}{b^2}+\frac{z_1^2}{c^2}-1\right)-\left(\frac{x_1x}{a^2}+\frac{y_1y}{b^2}+\frac{z_1z}{c^2}-1\right)^2=0.$$

Теорема VI.

592. *Если двѣ поверхности втораго порядка имѣютъ одну и ту же діаметральную плоскость, для извѣстнаго ряда параллельныхъ хордъ, то проекція линіи пересѣченія на эту плоскость параллельно хордамъ будетъ коническое сѣченіе.*

Извѣстно, что, исключивъ z изъ двухъ уравненій второй степени съ тремя неизвѣстными x, y, z, получимъ вообще уравненіе четвертой степени относительно x и y. Такимъ образомъ линія пересѣченія двухъ поверхностей втораго порядка проектируется вообще на плоскость по кривой четвертаго порядка. Исключеніе составляютъ нѣкоторые случаи. Разсмотримъ двѣ поверхности втораго порядка, которыя имѣютъ одну и ту же діаметральную плоскость для одного и того же ряда хордъ; если эту діаметральную плоскость возьмемъ за плоскость xy, а линію, параллельную хордамъ, за ось z, то уравненія двухъ поверхностей будутъ имѣть видъ $Az^2+C=0$, $A'z^2+C'=0$, гдѣ C и C' означаютъ два многочлена второй степени, которые содержатъ только два перемѣнныя x и y. Исключивъ z изъ двухъ предъидущихъ уравненій, получимъ уравненіе второй степени $A'C-AC'=0$. Это есть уравненіе проекціи линіи пересѣченія двухъ поверхностей на діаметральную плоскость. Если двѣ поверхности имѣютъ общую прямолинейную образующую, то линія пересѣченія двухъ поверхностей проектируется на какую-нибудь плоскость по прямой линіи и кривой третьяго порядка.

ПРИМѢРЫ.

1. Проводимъ нормаль къ эллипсоиду черезъ различныя точки плоскаго сѣченія; найти геометрическое мѣсто слѣда этихъ нормалей на одну изъ главныхъ плоскостей. Изслѣдовать случай, когда плоскость сѣченія перпендикулярна къ главной плоскости.

2. Данъ эллипсоидъ; проводимъ діаметральныя плоскости, которыя пересѣкаютъ эллипсоидъ по эллипсу, имѣющему постоянную площадь; найти геометрическое мѣсто: 1) перпендикуляра, проведеннаго чрезъ центръ къ этой плоскости; 2) сопряженнаго діаметра.

3. Глазъ помѣщенъ въ точкѣ поверхности эллипсоида, перспективы всѣхъ плоскихъ сѣченій поверхности на діаметральную плоскость, сопряженную радіусу, который идетъ къ радіусу, суть подобныя кривыя; центръ каждой изъ нихъ есть перспектива вершины конуса, описаннаго около эллипсоида по разсматриваемому плоскому сѣченію.

4. Доказать, что геометрическое мѣсто прямой пересѣченія двухъ перпендикулярныхъ плоскостей, проведенныхъ черезъ двѣ данныя прямыя, есть гиперболоидъ объ одной полости, круговыя сѣченія котораго перпендикулярны къ каждой изъ двухъ данныхъ прямыхъ.

5. Конусъ вершиною имѣетъ точку гиперболоида вращенія съ одной полостью, образуемою равносторонней гиперболою, а основаніемъ горжевой кругъ; доказать, что анти-параллельныя сѣченія этого конуса перпендикулярны къ плоскости горжеваго круга.

6. Четыре перпендикуляра, опущенные изъ вершинъ тетраэдра на противоположныя стороны, находятся на гиперболоидѣ объ одной полости. Центръ шара, описаннаго около тетраэдра, центръ тяжести тетраэдра и центръ гиперболоида находятся на прямой линіи.

7. Найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, чтобы отношенія разстояній каждой изъ нихъ къ двумъ даннымъ прямымъ было постоянное. Опредѣлить потомъ поверхность втораго порядка, способную къ этому роду, различныя пары прямыхъ, которыя можно употреблять.

8. Геометрическое мѣсто нормалей, проведенныхъ къ какой-нибудь прямолинейной поверхности, по длинѣ одной и той же образующей, есть гиперболическій параболоидъ.

9. Даны точка и двѣ перпендикулярныя плоскости; найти геометрическое мѣсто такихъ точекъ, чтобы разстояніе каждой изъ нихъ отъ данной точки было среднее пропорціональное между ея разстояніями отъ двухъ опредѣленныхъ плоскостей.

10. Найти линію пересѣченія для каждой изъ системъ прямолинейныхъ образующихъ гиперболическаго параболоида.

11. Найти конусъ, который вершиною имѣетъ центръ, а управляющею линіи пересѣченія гиперболоида объ одной полости.

12. Черезъ точку O, взятую на ребрѣ двуграннаго угла, проводимъ на одной изъ сторонъ прямую OA, а на второй сторонѣ прямую OB, перпендикулярную къ OA; найти геометрическое мѣсто перпендикуляра, проведеннаго изъ точки O на плоскость AOB.

13. Данъ кругъ и двѣ опредѣленныя точки A и B въ пространствѣ; черезъ точку B и прямую соприкосновеній, относящуюся къ какой-нибудь точкѣ P плоскости круга, проводимъ плоскость; найти геометрическое мѣсто точки пересѣченія этой плоскости съ прямою AP.

14. Если двѣ поверхности втораго порядка проходятъ черезъ двѣ прямыя, не находящіяся въ одной плоскости, то пересѣченіе двухъ поверхностей состоитъ изъ этихъ прямыхъ и двухъ другихъ прямыхъ, дѣйствительныхъ или мнимыхъ.

15. Если двѣ поверхности втораго порядка соприкасаются по одной образующей, то на этой образующей вообще находятся двѣ такія точки, что вторая образующая, которая проходитъ черезъ каждую изъ нихъ, будетъ одна и та же на двухъ поверхностяхъ.

16. Перспективы на одну и ту же плоскость плоскихъ сѣченій поверхности втораго порядка имѣютъ двойное соприкосновеніе, дѣйствительное или мнимое, съ контуромъ поверхности.

17. Двѣ поверхности втораго порядка, которыя имѣютъ однѣ и тѣ же главныя плоскости, называются однофокусными, если ихъ главныя сѣченія имѣютъ одни и тѣ же фокусы, дѣйствительные или мнимые; такимъ образомъ уравненіе

$$\frac{x^2}{A-\lambda}+\frac{y^2}{B-\lambda}+\frac{z^2}{C-\lambda}=1,$$

въ которомъ λ означаетъ произвольный параметръ, выражаетъ всѣ поверхности, однофокусныя съ поверхностію $\frac{x^2}{A}+\frac{y^2}{B}+\frac{z^2}{C}=1$. Доказать, что черезъ данную точку проходятъ три поверхности втораго порядка, однофокусныя съ данной поверхностію; изъ этихъ трехъ поверхностей одна есть эллипсоидъ, другая гиперболоидъ объ одной полости, третья гиперболоидъ о двухъ полостяхъ.

18. Три уравненія

$$\frac{x^2}{a^2-p^2}+\frac{y^2}{b^2-p^2}+\frac{z^2}{c^2-p^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{a^2-q^2}+\frac{y^2}{b^2-q^2}+\frac{z^2}{c^2-q^2}=1,$$
$$\frac{x^2}{a^2-r^2}+\frac{y^2}{b^2-r^2}+\frac{z^2}{c^2-r^2}=1,$$

въ которыхъ мы предполагаемъ $a>b>c$, $p<c$, $c<q<b$, $b<r<a$, выражаютъ однофокусныя поверхности; первая есть эллипсоидъ, вторая гиперболоидъ объ одной полости, третья гиперболоидъ о двухъ полостяхъ. Доказать: 1) что эти поверхности пересѣкаются по двѣ подъ прямымъ угломъ; 2) что двѣ кривыя, по которымъ одна изъ поверхностей пересѣкается двумя другими, имѣютъ касательными въ ихъ точкѣ пересѣченія прямыя, параллельныя осямъ сѣченія, сдѣланнымъ въ первой поверхности плоскостью, параллельною касательной плоскости въ этой точкѣ.

19. Около даннаго эллипсоида описанъ конусъ, который вершиною имѣетъ данную точку; доказать, что три оси этого конуса суть нормали къ однофокуснымъ поверхностямъ даннаго эллипсоида и проходящаго черезъ данную точку.

20. Даны двѣ однофокусныя поверхности; найти поверхность вращенія втораго порядка, имѣющую осью одну изъ осей этихъ поверхностей и которой принадлежитъ линія пересѣченія.

21. Даны два однофокусные параболоида, выражаемые уравненіемъ

$$\frac{y^2}{p-\lambda}+\frac{z^2}{q-\lambda}=2x-\lambda,$$

въ которомъ λ есть произвольный параметръ; если параметру λ дадимъ двѣ такія величины, чтобы соотвѣтствующіе параболоиды пересѣкались, то они пересѣкутся подъ прямымъ угломъ. Если параболоидъ пересѣчемъ двумя другими различными образами,

то касательныя къ двумъ линіямъ пересѣченія въ общей точкѣ параллельны осямъ сѣченія, сдѣланнаго въ первой поверхности плоскостью, параллельною касательной плоскости въ этой точкѣ.

22. Даны два однофокусные параболоида; найти поверхность вращенія втораго порядка, имѣющую ось, общую ось параболоидовъ и которой принадлежитъ линія пересѣченія.

23. Дана поверхность втораго порядка и двѣ прямыя, касательныя къ этой поверхности; найти поверхность, образуемую прямою, которая двигается по двумъ даннымъ прямымъ, оставаясь касательною къ данной поверхности.

24. Найти геометрическое мѣсто вершинъ трехграннаго угла, описаннаго около эллипсоида, и стороны котораго параллельны тремъ діаметральнымъ плоскостямъ, сопряженнымъ другому эллипсоиду.

25. Найти геометрическое мѣсто вершины трехграннаго угла, ребра котораго суть касательныя къ эллипсоиду.

26. Черезъ различныя точки плоскаго сѣченія конуса вращенія проводимъ нормали къ поверхности; найти геометрическое мѣсто второй точки пересѣченія каждой нормали съ поверхностью.

27. Прямая двигается такъ, что три изъ ея точекъ остаются въ трехъ опредѣленныхъ плоскостяхъ; какое будетъ геометрическое мѣсто, описанное какою нибудь точкою движущейся прямой?

28. Вершина конуса находится въ центрѣ эллипсоида, а основаніемъ имѣетъ кривую пересѣченія эллипсоида съ концентричнымъ шаромъ; всякая касательная плоскость къ конусу пересѣкаетъ эллипсоидъ по эллипсу, ребро прикосновенія котораго есть одна изъ осей.

29. Пересѣкаемъ эллипсоидъ $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0$ плоскостью

$$x\cos\alpha+y\cos\beta+z\cos\gamma=0;$$

доказать, что оси сѣченія опредѣляются уравненіемъ

$$\frac{a^2\cos^2\alpha}{a^2-r^2}+\frac{b^2\cos^2\beta}{b^2-r^2}+\frac{c^2\cos^2\gamma}{c^2-r^2}=0,$$

въ которомъ r означаетъ величину одной изъ осей.

30. Двѣ поверхности втораго порядка, которыя соприкасаются въ двухъ точкахъ, могутъ быть вписаны въ одинъ и тотъ же конусъ втораго порядка.

31. Два эллипсоида соприкасаются по плоской кривой; проводимъ касательную плоскость къ одному изъ эллипсоидовъ параллельно круговымъ сѣченіямъ этого эллипсоида; эта плоскость пересѣкаетъ другой эллипсоидъ по эллипсу, одинъ изъ фокусовъ котораго есть точка соприкосновенія.

КОНЕЦЪ.

ОГЛАВЛЕНІЕ.

ГЕОМЕТРІЯ НА ПЛОСКОСТИ.

КНИГА ПЕРВАЯ. — Введеніе.

КНИГА ВТОРАЯ. — Прямая линія и кругъ.

КНИГА ТРЕТЬЯ. — Кривыя втораго порядка.

КНИГА ЧЕТВЕРТАЯ. — Общая теорія кривыхъ.

ГЕОМЕТРІЯ ВЪ ПРОСТРАНСТВѢ.

КНИГА ПЯТАЯ.

КНИГА ШЕСТАЯ. — **Поверхности втораго порядка.**

